# PHILOSOPHIÆ NATURALIS
# PRINCIPIA
# MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, Eq. Aurato.

PERPETUIS COMMENTARIIS ILLUSTRATA,

COMMUNI STUDIO

PP. THOMÆ LE SEUR ET FRANCISCI JACQUIER

EX GALLICANA MINIMORUM FAMILIA,

MATHESEOS PROFESSORUM.

EDITIO NOVA,
SUMMA CURA RECENSITA.

---

VOLUMEN SECUNDUM.

---

GLASGUÆ:
EX PRELO ACADEMICO,
TYPIS ANDREÆ ET JOANNIS M. DUNCAN.
VENEUNT APUD LACKINGTON & SOC., R. PRIESTLEY, G. & W. B. WHITTAKER, J. CUTHEL, G. COWIE & SOC., J. COLLINGWOOD, TREUTTEL & WÜRTZ, ET TREUTTEL, JUN. & RICHTER, LONDINI; NECNON PARISIIS, ET ARGENTORATI APUD TREUTTEL & WÜRTZ.

1822.

Presented by
Mansfield College.
May 1917

NEWTONI PRINCIPIA.

# MONITUM.

Altera tandem Principiorum Mathematicorum Pars in lucem prodit. De Motibus Corporum in Medio Resistente agitur potissimùm in hoc secundo Newtoni Libro. Rem difficultatis plenam norunt omnes; ita tamen nostra studuimus accommodare Commentaria ut iis qui in primi Libri lectione eâ quâ par est diligentiâ et attentione fuerint versati, facilia planaque omnia futura esse speremus. Nec satis nobis fuit præclara clariss. autoris inventa explicare, nos ipsi quoque usu didicimus nonnulla interdùm invenire quæ hùc et illùc in nostris Commentariis inserere ausi sumus. Sed quod maximum est hujusce Operis decus et ornamentum, nova quamplurima doctissimi Euleri Problemata, quæ in egregio Mechanices opere leguntur, addidimus. Nostros etiam abundè locupletant Commentarios pretiosa monumenta quibus Acta Eruditorum Lipsiensia exornarunt clariss. viri Joannes et Daniel Bernoullius. Silentio tandem prætermittendus non est illustrissimus doctissimusque Polenus, cujus elegans de Logarithmicæ Constructione Epistola, nonnullaque de Motu Aquarum experimenta nobis plurimùm profuêre. Sed longè majora sunt quàm verbis exprimi possint, de hoc universo opere clariss. viri Joan. Ludovici Calandrini merita, qui, eâdem quam primi Libri initio laudavimus, diligentiâ indefessâque curâ huic secundæ Parti invigilavit.

Reprehendendum multis fortasse videbitur quod oblatam frequenter occasionem quasi e manibus dimittentes, celeberrimas philosophorum controversias vel omninò omittamus vel leviter duntaxat perstringamus. Verùm sciant eum fuisse Newtoni scopum a quo ne latum unguem maximè vellemus discedere, ut ingeniosa quoque systematum commenta e physicâ eliminaret atque profligaret. Nos itaque a philosophicis litibus maximè aversi, altercationes summo studio declinavimus. Tot insuper nova his de rebus scripta quotidiè circumferuntur ut justi operis molem excederet hic secundus Liber, si recentiora explicare aggrederemur philosophorum placita.

Hanc secundam laboris nostri partem benignè excipiant Mathematicarum Disciplinarum candidati, tertiamque tandem et ultimam anno proximè futuro expectent.

*Romæ in Regio Conventu SS$^{æ}$. Trinitatis.*
*Anno* 1740.

# INDEX SECTIONUM

## DE MOTU CORPORUM,

## VOLUMINIS SECUNDI.



### ADMONITIO.

In initio singularum notarum quibus numerus præfixus non fuit, ejus loco asteriscus * depictus est: a pagina verò 101 alter asteriscus subinde reperietur, cujus alius non est usus quàm ut distinguat ea quæ inserta sunt ab Editore (eo jure sibi ab Autoribus Commentarii concesso); idem etiam designat signum (†) quibusdam notis præfixum, nc scilicet turbaretur ordo litterarum ab Autoribus ipsis adhibitus.

# DE

# MOTU CORPORUM

## LIBER SECUNDUS.

## SECTIO I.

### (*) *De motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis.*

### (*) LEMMA

*Generales resistentiæ notiones exponens.*

1. Non potest corpus in medio fluido moveri atque in illud agere, quin ex fluidi reactione vim seu resistentiam aliquam patiatur. Vis illa resistentiæ, proportionalis est decremento motûs quod dato tempore generat, et illius directio directioni mobilis semper opposita est (per Mot. Leg. 2. et 3.) Quapropter datâ corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum quod dato tempore producit; datâ enim mobilis massâ, motûs decrementum est ut decrementum velocitatis (6. Lib. 1.)

2. Vis resistentiæ quam momento quolibet temporis experitur corpus est ut motûs decrementum directè et temporis momentum inversè. Nam resistentia dato temporis momento est ut motûs decrementum directè (1) et dato motûs decremento est inversè ut momentum temporis quo motûs decrementum generatur. Si enim subduplo vel subtriplo temporis momento, idem motûs incrementum vel decrementum generetur, vis generans dupla aut tripla est.

3. Hinc datâ corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum directè et momentum temporis inversè.

4. Quoniam directio vis resistentiæ, directioni mobilis contraria est (1), corpus solâ vi insitâ in medio resistente motum, per rectam lineam continuò fertur, quod etiam evenire debere manifestum est, si corpus vi quâlibet acceleratrice vel retardatrice, secundum vel contrà directionem motûs insiti urgeatur.

5. Resistentia considerari potest tanquam vis retardans et cum vi gravitatis quâ corporum ascendentium motus perpetuò minuitur conferri. Vis enim resistentiæ sicut vis gravitatis infinitè parva est, si conferatur cum vi illâ quâ corpus motu finito cietur, seu quâ spatium finitum finito tempore describit. Nam si resistentiæ quam omni temporis momento patitur corpus, vis esset finita, sivè ejusdem generis cum vi finitâ corporis motu finito acti, infinita multitudo resistentiarum momentanearum finito quovis tempore producta, totum corporis motum finito quolibet exiguo tempore extingueret, quod est contrà hyp., quâ supponimus corporis motum tempore aliquo finito in medio resistente perseverare.

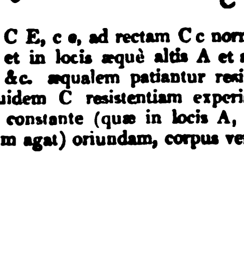
6. Hinc corporis in medio resistente moti velocitas finita per spatium infinitè parvum, atque etiam tempore infinitè parvo æquabilis censeri potest, neglecto nimirum infinitè parvo velocitatis decremento.

7. Jam verò resistentia corporum in fluidis, cæteris paribus, oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, et partim ex reactione partium medii, tresque sunt celebriores circà hujus resistentiæ legem hypotheses, quarum mathematicas consequentias Newtonus hoc libro exponit. 1°. Hypothesis resistentiam ponit velocitati corporis dati proportionalem, secunda velocitatis quadrato, et tertia partim velocitati, et partim velocitatis quadrato. Præterea cùm experimentis sit cognitum partem quamdam resistentiæ fluidorum uniformem esse, considerandæ sunt quatuor aliæ hypotheses, in quarum primâ resistentia fingatur uniformis; in secundâ partim uniformis et partim velocitati proportionalis; in tertiâ partim uniformis et partim ut quadratum velocitatis, et in quartâ denique partim uniformis, partim ut velocitas, et partim ut velocitatis quadratum. Prima ex his quatuor hypothesibus nihil habet difficultatis, cum uniformis resistentia considerari possit tanquam gravitas constans cùm motum ascendentis corporis retardat; quâ de re satis actum est Lib. 1. tres verò quæ se-

quuntur hypotheses non ægrè referri plerumque possunt ad determinationes motuum quas aliæ priores hypotheses (de quibus ab initio actum est) suppeditant, quod deinceps ostendemus.

8. Si medium in quo corpus movetur perfectè fluidum sit, hoc est, partibus constet optimè lævigatis nullâque tenacitate cohærentibus, quæ proindè vi cuicumque illatæ cedant, et cedendo facillimè moveantur inter se, sola ea considerandа est resistentia quæ ex medii reactione ortum ducit, estque illa ut densitas medii et quadratum velocitatis mobilis dati conjunctim. Hæc enim resistentia (per Motûs Leg. 2. et 3. Lib. 1.) est ut quantitas motûs dato tempusculo communicati; sed datâ mobilis velocitate, quantitas motûs communicati est ut quantitas fluidi tempusculo dato movenda, hoc est, ut densitas medii; datâ autem medii densitate, quantitas motûs communicati est ut quantitas fluidi dato tempusculo dimovenda, et ut velocitas quâ quantitas illa fluidi movetur conjunctim, et quantitas fluidi dato tempusculo dimovenda velocitati mobilis proportionalis est, corpus enim duplo velocius altero, duplo majus spatium in fluido percurret, sicque duplo pluribus particulis occurret. Quare datâ densitate medii, resistentia est ut quadratum celeritatis mobilis, atque adeò si neque fluidi densitas, neque mobilis celeritas data sit, erit resistentia ut medii densitas et quadratum velocitatis conjunctim, atque hæc est resistentia quæ ortum ducit ab inertiâ particularum fluidi quas corpus motum e loco dimovet et quæ in velocioribus motibus sola ferè observatur.

9. Altera resistentia quæ ex tenacitate partium fluidi uniformis nascitur, constans est, aut quod idem est, temporis momento proportionalis, eamque in tardissimis motibus sensibilem faciunt experimenta. Si enim partium fluidi cohæsio sit ubique eadem, vi quâdam determinatâ opus est ut partes illæ separentur, corporique transitum præbeant, quâcumque demum velocitate illud feratur, et ideò vis illa resistentiæ cum vi gravitatis uniformi, quæ corporis ascendentis motum retardat, conferri potest. Nam corpora duo similia et æqualia cum pari velocitate e locis C et c




per lineas C E, c e, ad rectam C c normales projiciantur, et in locis æquè altis A et a, B et b, D et d, &c. æqualem patiantur resistentiam; corpus quidem C resistentiam experiatur a vi gravitatis constante (quæ in locis A, B, D, E, &c. tantùm agat) oriundam, corpus verò c resistentiam ex tenacitate datâ, vi illi gravitatis æquali, in locis tantùm a, b, d, &c. reagente ortam; in spatiis verò intermediis A B et a b, B D et b d, &c. nullum sit motibus obstaculum; dum corpora perveniunt in A et a, æqualem habent velocitatem, et deindè victis æqualibus in A et a obstaculis, pari adhuc velocitate per spatia minimè resistentia A B et a b, feruntur; et simili modo, ob æquales resistentias in locis B et b per spatia B D et b d simul moventur, et itâ deinceps eandem semper velocitatem in locis æquè altis habent. Minuantur jam æqualia illa spatia A B et a b, B D et b d, &c. et eorum numerus augeatur in infinitum, ut vis gravitatis et resistentiæ actio vel reactio continua reddatur, et corpora duo eandem ubique resistentiam patientur, et in locis æquè altis eandem velocitatem habebunt. Quarè resistentia quæ ex fluidi tenacitate ortum ducit, potest cum vi gravitatis uniformis comparàri, licet medii tenacitas in corpus quiescens (quod quidem vi gravitatis semper urgetur) agere nullo modo possit.

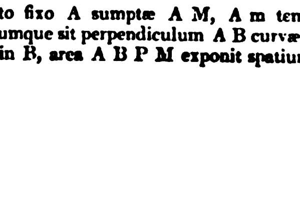
10. In fluidis igitur tenacitate aliquâ præditis, resistentia est partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis (8. 9.)

11. *Lemma.* In quâcunque resistentiæ hypothesi, corporis tam in medio resistente quam in vacuo moti velocitas finita in singulis locis est ut elementum spatii descripti directè et momentum temporis quo describitur inversè. Velocitas enim uniformis est ut spatium quodcunque descriptum directè et tempus quo id spatium describitur inversè. In medio autem sive resistente sive vacuo velocitas per spatium infinitè parvum æquabilis est (6.)

12. *Corol.* 1. Hinc temporis momentum est ut momentum seu elementum spatii directè et velocitas inversè; momentum verò spatii ut velocitas et momentum temporis conjunctim.

13. *Corol.* 2. Si igitur velocitas dicatur v, spatium descriptum s, tempus quo descriptum est t erit $v = \frac{ds}{dt}$, $v\,dt = ds$ et $dt = \frac{ds}{v}$, sumptisque fluentibus $S.\, v\,dt = s$, et $t = S.\, \frac{ds}{v}$.

14. *Corol.* 3. Si itâ descripta fuerit curva B P C ut ejus applicatæ M P, m p, axi A D, normales, exponant velocitatem v, et abscissæ a




puncto fixo A sumptæ A M, A m tempus t, erectumque sit perpendiculum A B curvæ occurrens in B, area A B P M exponit spatium tem-

pore t descriptum. Sit enim applicata p m, priori P M infinitè propinqua, et erit $M m = d t$, adeóque areæ A B P M elementum $M P p m = v d t = d s$ (11) et proindè area $A B P M = S. v d t = s$. Recta A D dicatur linea temporum et curva B P C linea celeritatum. Eodem modo si abscissa A M exponeret spatium descriptum s et applicata M P velocitatem inversam, ità ut esset $A M = s$, et $M P = \frac{1}{v}$, area A B P M exponeret tempus quo spatium A M descriptum est; esset enim $M P p m = \frac{d s}{v} = d t$, et hinc area $A B P M = S. \frac{d s}{v} = t$.

15. *Lemma.* Si corpus datæ massæ solâ vi insitâ in medio resistente moveatur, *decrementum velocitatis*, erit ut *resistentia* et *momentum temporis* conjunctim. *Incrementum* verò *spatii* erit ut *velocitas et velocitatis decrementum* directè et *resistentia* inversè. Datâ enim corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum directè et momentum temporis inversè (2) ideóque decrementum velocitatis est ut resistentia et momentum temporis conjunctim. Quod erat $1^{um}$. Sed incrementum spatii est ut velocitas et momentum temporis conjunctim (12) momentum verò temporis est ut decrementum velocitatis directè et resistentia inversè (2); Quarè incrementum spatii est ut velocitas et illius decrementum directè et resistentia inversè. Quod erat $2^{um}$.

16. *Corol.* 1. Hinc resistentia est ut velocitas et illius decrementum directè ac spatii incrementum inversè, et velocitas in suum decrementum ducta, est ut resistentia et incrementum spatii conjunctim.

17. *Corol.* 2. Quarè si spatium dicatur s, tempus t, velocitas v, resistentia r, erit $r d t = - d v$, et $r d s = - v d v$.

18. *Lemma.* Si corpus datæ massæ in medio resistente urgeatur vi centripetâ in directione motûs corporis agente; corpore ascendente, erit *velocitatis decrementum* ut *momentum temporis* et *summa vis centripetæ et resistentiæ conjunctim.* Et *velocitas* in *suum decrementum* ducta erit ut *incrementum spatii* et *summa vis centripetæ et resistentiæ* conjunctim.

At corpore descendente, *velocitatis incrementum* erit ut *momentum temporis*, et *differentia inter vim centripetam et vim resistentiæ* conjunctim. Et *velocitas* in *suum incrementum* ducta, erit ut *incrementum* sive elementum *spatii* et *differentia inter vim centripetam ac resistentiam* conjunctim.

Resistentia enim considerari potest tanquam vis continuò retardans (5) et vis centripeta corporis ascendentis motum etiam retardat, ideóque vis tota retardatrix est summa ipsa vis centripetæ et resistentiæ, dum corpus ascendit; sed vis retardatrix in temporis momentum ducta est ut decrementum velocitatis quod producit (2); ergò corpore ascendente, decrementum velocitatis est ut temporis momentum et summa vis centripetæ ac resistentiæ conjunctim. Quod erat $1^{um}$.

Sed momentum temporis est ut incrementum sive elementum spatii directè et velocitas inversè (12). Quarè si corpus ascendat decrementum velocitatis est ut elementum spatii et summa vis centripetæ ac resistentiæ directè, et velocitas inversè, adeóque velocitas in suum decrementum ducta est ut elementum spatii et summa vis centripetæ ac resistentiæ conjunctim. Quod erat $2^{um}$.

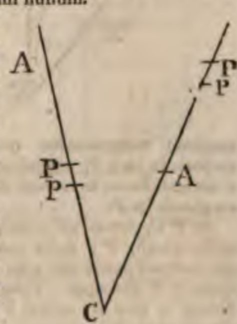
Descendente corpore vis centripeta motum corporis accelerat dum resistentia retardat, et ideò si vis centripeta major sit vi resistentiæ, excessus vis centripetæ suprà resistentiam est vis tota accelerans; Si vis centripeta minor est vi resistentiæ, vis tota retardans erit excessus resistentiæ suprà vim centripetam. Quarè differentia inter resistentiam et vim centripetam in temporis momentum ducta erit in primo casu ut incrementum velocitatis, et in secundo casu, ut illius decrementum. Quod erat $3^{um}$. Sed momentum temporis est ut elementum spatii directè et velocitas inversè (12), quarè velocitas in suum elementum (sive incrementum sit sive decrementum) ducta, est ut elementum spatii, et differentia inter vim centripetam ac resistentiam conjunctim. Quod erat $4^{um}$.

19. *Corol.* 1. Undè si vis centripeta dicatur g, resistentia r, spatium s, tempus t, velocitas v erit pro corporis ascensu $g d t + r d t = - d v$, et $g d s + r d s = - v d v$; et pro corporis descensu, si vis centripeta vi resistentiæ sit major $g d t - r d t = d v$, et $g d s - r d s = v d v$ at si vis centripeta vi resistentiæ sit minor $r d t - g d t = - d v$, et $r d s - g d s = - v d v$.

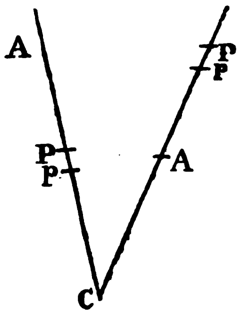
20. *Corol.* 2. Si in his formulis ponatur $r = o$, mutabuntur illæ in formulas, quibus motus corporis in medio non resistente determinantur. Quâ ratione motus corporis in medio resistente conferri possunt cum ejusdem motibus in medio non resistente.

21. *Corol.* 3. Si corpore descendente, resistentia vi centripetæ æqualis fuerit, corporis celeritas æquabilis manet; nam in formulis $g d t - r d t = d v$, et $r d t - g d t = - d v$, positâ $g = r$, fit $d v = o$, hoc est, velocitatis incrementum vel decrementum nullum.

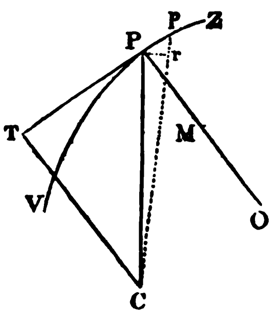
22. *Corol.* 4. Si corpus in lineâ rectâ A C vi centripetâ urgeatur ad punctum datum C, et de loco dato A sursum vel deorsum projiciatur cum velocitate datâ in medio resistente, et spatium A P quod ascendendo vel descendendo describit tempore t dicatur s, data A C dica-

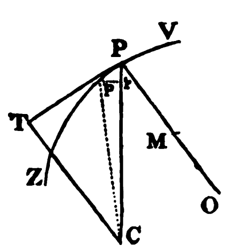


tur b, et tam in ascensu quam in descensu scribatur C P = x, adeóque in ascensu, x — b = s, et d x = d s, in descensu b — x = s, et — d x = d s; si loco d s substituatur ipsius valor in formulis Corol. 1. (19) erunt illæ pro ascensu $g\,dx + r\,dx = - v\,dv$, et pro descensu $g\,dx - r\,dx = - v\,dv$, quarum una in alteram abit, mutato signo + vel —, quantitati r præfixo.




23. *Lemma.* Si corpus vi quâlibet centripetâ sollicitatum curvam V P Z in medio resistente aut etiam in vacuo describat, visque centripeta in loco quovis P dividatur in vires duas, quarum altera directionem habeat P O tangenti P T per P ductæ normalem, altera directionem cum tangente congruentem, quadratum velocitatis corporis in loco P, exponi poterit per factum ex vi normali ductæ in radium circuli curvam V P Z osculantis in P.




Sit P C, totius vis centripetæ directio, P O radius osculi, P p arcus curvæ infinitè parvus qui usurpari potest pro arcu circuli centro O et radio O P descripti. Velocitas corporis in P dicatur v, quæ per arcum P p tam in medio resistente quam in vacuo æquabilis est, (6) et totius vis centripetæ pars illa quæ secundum directionem P O agit, seu vis normalis dicatur N et quia vis resistentiæ ut potè semper contraria directioni mobili P T, (1) vim normalem N non afficit, erit vis illa N quâ corpus in arcu P p retinetur in medio resistente æqualis vi centripetæ quâ corpus idem cum eâdem velocitate æquabili v, in medio non resistente circulum describeret cujus centrum O, et radius O P. Corpus autem vi constante N, sollicitatum in vacuo de loco P cadat per radii partem P M ita ut eo lapsu acquirat celeritatem v quâ in medio non resistente circulum describeret cujus centrum est O et radius est O P; sitque P M = s, velocitas eo lapsu acquisita in M erit ergo = v, et erit (20. 19.) $N\,ds = v\,dv$, sumptisque fluentibus $N s = \frac{1}{2} v v$, et $2 N s = v v$. Sed altitudo ex quâ corpus vi constante N sollicitatum in vacuo cadere debet ut velocitatem acquirat æqualem illi cum quâ circulum ipsum describit, est æqualis dimidio radii P O, (119. Lib. 1.) ergo $2 s = P O$ et $2 N s = v v = N \times P O$. Q. e. d.

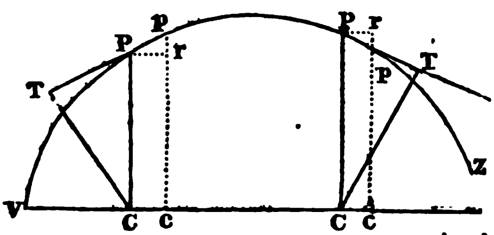
24. *Corol.* 1. Iisdem positis, totius vis centripetæ juxtà directionem P C urgentis ea pars quæ secundum directionem tangentis P T agit, seu vis tangentialis in P dicatur T resistentia ibidem r, arcus V P s, ideoque P p = d s, et si corpus descendit, erit $T\,ds - r\,ds = v\,dv$ (18. 19.) quia vis tangentialis motum accelerat et vis resistentiæ eundem retardat, vis autem normalis nec accelerat nec retardat. Sed si corpus ascendit, erit $T\,ds + r\,ds = - v\,dv$ (18. 19.) vi tangentiali et resistentiâ motum corporis simul retardantibus.

25. *Corol.* 2. Sit C virium centrum, vis tota centripeta in directione P C urgens = g, C P = y, C T tangenti perpendicularis = p, ideoque $P T = \sqrt{y y - p p}$. Ex puncto p, alteri P infinitè propinquo demissum sit ad C P perpendiculum p r, ut sit p r = d y, et triangulum P r p, simile triangulo P T C, et erit P p (d s) : p r (d y) = P C : P T = g : $T = \frac{g\,dy}{ds}$, ubi observandum est d y, esse affirmativam, quando crescente arcu V P sive s, crescit etiam recta C P, seu y, id est, quando corpus ascendit, et contrà d y esse negativam, dum corpus descendit, adeóque in hoc casu fieri $T = - \frac{g\,dy}{ds}$. Hi valores vis tangentialis T, substituantur in formulis Corollarii 1. et ambæ in hanc mutabuntur, $g\,dy + r\,ds = - v\,dv$.

26. *Corol.* 3. Quia P p (d s) : p r (± d y) = P C (y) : P T $(\sqrt{y y - p p})$ erit $ds = \pm \frac{y\,dy}{\sqrt{y y - p p}}$, (signo superiori pro ascensu et inferiori pro descensu usurpato.) Quarè fiet $g\,dy + r\,ds = g\,dy \pm \frac{r\,y\,dy}{\sqrt{y y - p p}} = - v\,dv$.

27. *Corol.* 4. Si radius osculi P O dicatur R, est (23) $R \times N = v^2$, et quia y : p = g : N,

adeóque $\frac{pg}{y} = N$, fiet $\frac{Rpg}{y} = v^2$; sed radius osculi $R = \frac{ydy}{dp}$ (214. Lib 1.) quarè erit $\frac{gpdy}{dp} = v^2$, et $g = \frac{v^2 dp}{pdy}$. Substituatur hic valor in formulâ Corollarii 2[i.] et fiet $gdy + rds = \frac{v^2 dp}{p} + rds = -vdv$, et ideò $vdv + \frac{v^2 dp}{p} = -rds$.




28. *Corol.* 5. Vis centripetæ directio P C, sibi semper parallela maneat, ut hic assumitur vis gravitatis, et per punctum V, in curvâ V P Z datum, ducatur recta V C directioni gravitatis P C perpendicularis, dicanturque ut suprà $VP = s$, $Pp = ds$, $CP = y$, $pr = dy$, vis tota gravitatis in $P = g$, resistentia $r$, velocitas corporis ibidem $= v$, et erit ut in Corollario 2°. $gdy + rds = -vdv$.

29. *Corol.* 6. Si in Hypothesi Corollarii 5[i.] dicantur radius osculi in $P = R$, vis normalis $= N$, abscissa $VC = x$, et $Cc$ seu $Pr = dx$, erit ob triangulorum $Ppr$, $CPT$ similitudinem, $Pp : Pr = PC : TC = g : N$, sive $ds : dx = g : N = \frac{gdx}{ds}$; sed (23) $N = \frac{v^2}{R}$, ergò $\frac{gdx}{ds} = \frac{v^2}{R}$, et hinc $v^2 = \frac{Rgdx}{ds}$.

30. *Corol.* 7. Est autem (216. Lib. 1.) $R = \frac{ds^2 dy}{dsddx - dxdds} = -\frac{ds^2 dy}{dxdds}$, si ponatur $dx$, constans, et ideò $ddx = 0$; Et quia $ds^2 = dy^2 + dx^2$, sumptisque fluxionibus, factâ $dx$, constante $dsdds = dyddy$, et $dds = \frac{dyddy}{ds}$, fiet $R = -\frac{ds^3}{dxddy}$; quarè (29) $v^2 = \frac{Rgdx}{ds} = -\frac{gds^2}{ddy}$, ideóque $g = -\frac{v^2 ddy}{ds^2}$, et hinc (28) $gdy + rds = -\frac{v^2 dyddy}{ds^2} + rds = -vdv$, hoc est, ob $dyddy = dsdds$, $vdv = \frac{v^2 dds}{ds} - rds$.

31. *Scholion.* In superioribus quinque Lemmatis ipsorumque Corollariis, fere complexi sumus principia omnia, quibus et ad inventionem et ad demonstrationem motuum in mediis resistentibus usi sunt Clariss. viri Newt. in hoc Libro; Varignonius in Monumentis Academiæ Regiæ an. 1707. 1708. 1709. 1710. 1711. Joannes Bernoulli ibid. an. 1711. et in Actis Eruditorum Lips. an. 1713. et 1719. Hermannus Lib. 2. Phoronomiæ et in Commentariis Academiæ Petropolitanæ, ac Eulerus in opere exquisito quod de Mechanicâ scripsit analyticè. Nunc alia nonnulla de logarithmicæ proprietatibus, et de methodo maximorum et minimorum quæ ad doctrinam motuum in mediis resistentibus explicandam spectant, subjungenda sunt.

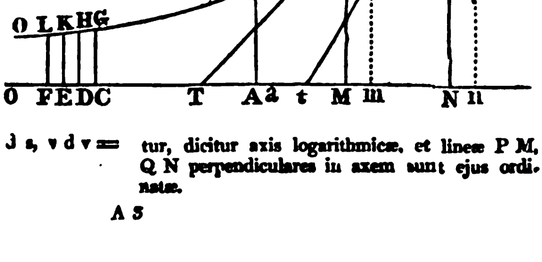
## LEMMA

*Præcipuas logarithmicæ proprietates exponens.*

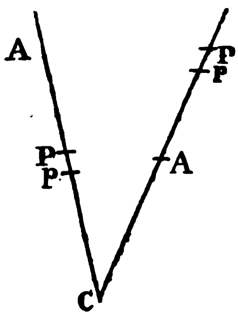
III. Hugenius de hac ipsâ Newtoniani operis parte loquens, in quâ agitur de corporibus in mediis resistentibus motis, (quam summâ cum voluptate se vidisse testatur) ait se notasse lineam curvam quam logarithmicam aut logisticam nuncupat, summæ utilitatis esse in hoc negotio, et quædam de eâ Theoremata indicat quorum demonstrationem Guido Grandus postea evulgavit; Hujus ergo curvæ proprietates ab initio explicare a scopo nostro alienum non duximus.

32. *Defin.* Sit linea recta N A O secundum quam feratur perpendicularis M *P* motu uniformi et sibi parallelo, dum in ea perpendiculari M P mobile P velocitate variabili movetur secundum hanc legem, ut ejus velocitas sit semper proportionalis distantiæ ejus a rectâ N A O, curva ab illo puncto *P* descripta dicetur logarithmica vel logistica.

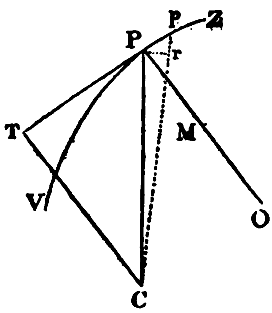
Linea N A O secundum quam perpendicularis P M motu uniformi et sibi parallelo fertur, dicitur axis logarithmicæ, et lineæ P M, Q N perpendiculares in axem sunt ejus ordinatæ.

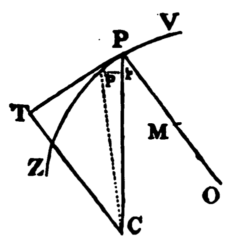


tur b, et tam in ascensu quam in descensu scribatur $CP = x$, adeóque in ascensu, $x - b = s$, et $dx = ds$, in descensu $b - x = s$, et $-dx = ds$; si loco $ds$ substituatur ipsius valor in formulis Corol. 1. (19) erunt illæ pro ascensu $gdx + rdx = -vdv$, et pro descensu $gdx - rdx = -vdv$, quarum una in alteram abit, mutato signo + vel —, quantitati r præfixo.




23. *Lemma.* Si corpus vi quâlibet centripetâ sollicitatum curvam V P Z in medio resistente aut etiam in vacuo describat, visque centripeta in loco quovis P dividatur in vires duas, quarum altera directionem habeat P O tangenti P T per P ductæ normalem, altera directionem cum




tangente congruentem, quadratum velocitatis corporis in loco P, exponi poterit per factum ex vi normali ductæ in radium circuli curvam V P Z osculantis in P.

Sit P C, totius vis centripetæ directio, P O radius osculi, P p arcus curvæ infinitè parvus qui usurpari potest pro arcu circuli centro O et radio O P descripti. Velocitas corporis in P dicatur v, quæ per arcum P p tam in medio resistente quam in vacuo æquabilis est, (6) et totius vis centripetæ pars illa quæ secundum directionem P O agit, seu vis normalis dicatur N et quia vis resistentiæ ut potè semper contraria directioni mobili P T, (1) vim normalem N non afficit, erit vis illa N quâ corpus in arcu P p retinetur in medio resistente æqualis vi centripetæ quâ corpus idem cum eâdem velocitate æquabili v, in medio non resistente circulum describeret cujus centrum O, et radius O P. Corpus autem vi constante N, sollicitatum in vacuo de loco P cadat per radii partem P M ita ut eo lapsu acquirat celeritatem v quâ in medio non resistente circulum describeret cujus centrum est O et radius est O P; sitque $PM = s$, velocitas eo lapsu acquisita in M erit ergo $= v$, et erit (20. 19.) $Nds = vdv$, sumptisque fluentibus $Ns = \frac{1}{2}vv$, et $2Ns = vv$. Sed altitudo ex quâ corpus vi constante N sollicitatum in vacuo cadere debet ut velocitatem acquirat æqualem illi cum quâ circulum ipsum describit, est æqualis dimidio radii P O, (119. Lib. 1.) ergo $2s = PO$ et $2Ns = vv = N \times PO$. Q. e. d.

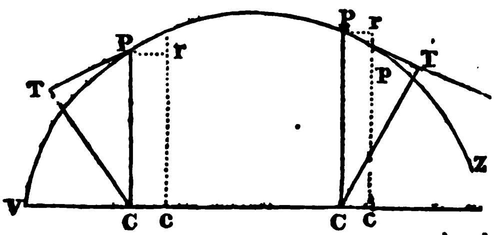
24. *Corol.* 1. Iisdem positis, totius vis centripetæ juxtà directionem P C urgentis ea pars quæ secundum directionem tangentis P T agit, seu vis tangentialis in P dicatur T resistentia ibidem r, arcus V P s, ideoque $Pp = ds$, et si corpus descendit, erit $Tds - rds = vdv$ (18. 19.) quia vis tangentialis motum accelerat et vis resistentiæ eundem retardat, vis autem normalis nec accelerat nec retardat. Sed si corpus ascendit, erit $Tds + rds = -vdv$ (18. 19.) vi tangentiali et resistentiâ motum corporis simul retardantibus.

25. *Corol.* 2. Sit C virium centrum, vis tota centripeta in directione P C urgens $= g$, $CP = y$, C T tangenti perpendicularis $= p$, ideoque $PT = \sqrt{yy - pp}$. Ex puncto p, alteri P infinitè propinquo demissum sit ad C P perpendiculum p r, ut sit $pr = dy$, et triangulum P r p, simile triangulo P T C, et erit $Pp\,(ds) : pr\,(dy) = PC : PT = g : T = \frac{gdy}{ds}$, ubi observandum est d y, esse affirmativam, quando crescente arcu V P sive s, crescit etiam recta C P, seu y, id est, quando corpus ascendit, et contrà d y esse negativam, dum corpus descendit, adeóque in hoc casu fieri $T = -\frac{gdy}{ds}$. Hi valores vis tangentialis T, substituantur in formulis Corollarii 1. et ambæ in hanc mutabuntur, $gdy + rds = -vdv$.

26. *Corol.* 3. Quia $Pp\,(ds) : pr\,(\pm dy) = PC\,(y) : PT\,(\sqrt{yy - pp})$ erit $ds = \pm \frac{ydy}{\sqrt{yy - pp}}$, (signo superiori pro ascensu et inferiori pro descensu usurpato.) Quarè fiet $gdy + rds = gdy \pm \frac{rydy}{\sqrt{yy - pp}} = -vdv$.

27. *Corol.* 4. Si radius osculi P O dicatur R, est (23) $R \times N = v^2$, et quia $y : p = g : N$,

adeóque $\frac{p g}{y} = N$, fiet $\frac{R p g}{y} = v^2$; sed radius osculi $R = \frac{y d y}{d p}$ (214. Lib 1.) quarè erit $\frac{g p d y}{d p} = v^2$, et $g = \frac{v^2 d p}{p d y}$. Substituatur hic valor in formulâ Corollarii 2[i]. et fiet $g d y + r d s = \frac{v^2 d p}{p} + r d s = - v d v$, et ideò $v d v + \frac{v^2 d p}{p} = - r d s$.




28. *Corol.* 5. Vis centripetæ directio P C, sibi semper parallela maneat, ut hic assumitur vis gravitatis, et per punctum V, in curvâ V P Z datum, ducatur recta V C directioni gravitatis P C perpendicularis, dicanturque ut suprà $V P = s$, $P p = d s$, $C P = y$, $p r = d y$, vis tota gravitatis in $P = g$, resistentia $r$, velocitas corporis ibidem $= v$, et erit ut in Corollario 2°. $g d y + r d s = - v d v$.

29. *Corol.* 6. Si in Hypothesi Corollarii 5[i]. dicantur radius osculi in $P = R$, vis normalis $= N$, abscissa $V C = x$, et $C c$ seu $P r = d x$, erit ob triangulorum $P p r$, $C P T$ similitudinem, $P p : P r = P C : T C = g : N$, sive $d s : d x = g : N = \frac{g d x}{d s}$; sed (23) $N = \frac{v^2}{R}$, ergò $\frac{g d x}{d s} = \frac{v^2}{R}$, et hinc $v^2 = \frac{R g d x}{d s}$.

30. *Corol.* 7. Est autem (216. Lib. 1.) $R = \frac{d s^2 d y}{d s d d x - d x d d s} = - \frac{d s^2 d y}{d x d d s}$, si ponatur $d x$, constans, et ideò $d d x = 0$; Et quia $d s^2 = d y^2 + d x^2$, sumptisque fluxionibus, factâ $d x$, constante $d s d d s = d y d d y$, et $d d s = \frac{d y d d y}{d s}$, fiet $R = - \frac{d s^3}{d x d d y}$; quarè (29) $v^2 = \frac{R g d x}{d s} = - \frac{g d s^2}{d d y}$, ideóque $g = - \frac{v^2 d d y}{d s^2}$, et hinc (28) $g d y + r d s = - \frac{v^2 d y d d y}{d s^2} + r d s = - v d v$, hoc est, ob $d y d d y = d s d d s$, $v d v = \frac{v^2 d d s}{d s} - r d s$.

31. *Scholion.* In superioribus quinque Lemmatis ipsorumque Corollariis, fere complexi sumus principia omnia, quibus et ad inventionem et ad demonstrationem motuum in mediis resistentibus usi sunt Clariss. viri Newt. in hoc Libro; Varignonius in Monumentis Academiæ Regiæ an. 1707. 1708. 1709. 1710. 1711. Joannes Bernoulli ibid. an. 1711. et in Actis Eruditorum Lips. an. 1713. et 1719. Hermannus Lib. 2. Phoronomiæ et in Commentariis Academiæ Petropolitanæ, ac Eulerus in opere exquisito quod de Mechanicâ scripsit analyticè. Nunc alia nonnulla de logarithmicæ proprietatibus, et de methodo maximorum et minimorum quæ ad doctrinam motuum in mediis resistentibus explicandam spectant, subjungenda sunt.

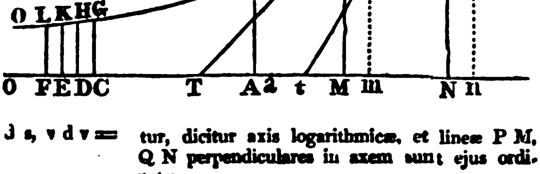
## LEMMA

*Præcipuas logarithmicæ proprietates exponens.*

III. Hugenius de hac ipsâ Newtoniani operis parte loquens, in quâ agitur de corporibus in mediis resistentibus motis, (quam summâ cum voluptate se vidisse testatur) ait se notasse lineam curvam quam logarithmicam aut logisticam nuncupat, summæ utilitatis esse in hoc negotio, et quædam de eâ Theoremata indicat quorum demonstrationem Guido Grandus postea evulgavit; Hujus ergo curvæ proprietates ab initio explicare a scopo nostro alienum non duximus.

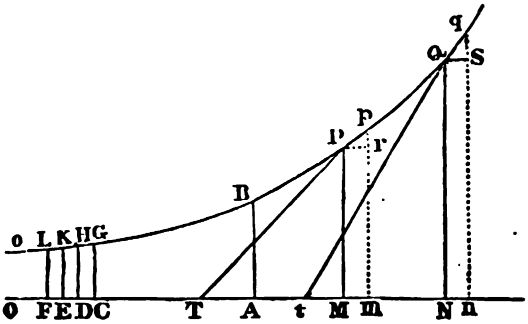
32. *Defin.* Sit linea recta N A O secundum quam feratur perpendicularis M P motu uniformi et sibi parallelo, dum in ea perpendiculari M P mobile P velocitate variabili movetur secundum hanc legem, ut ejus velocitas sit semper proportionalis distantiæ ejus a rectâ N A O, curva ab illo puncto P descripta dicetur logarithmica vel logistica.

Linea N A O secundum quam perpendicularis P M motu uniformi et sibi parallelo fer-




tur, dicitur axis logarithmicæ, et lineæ P M, Q N perpendiculares in axem sunt ejus ordinatæ.

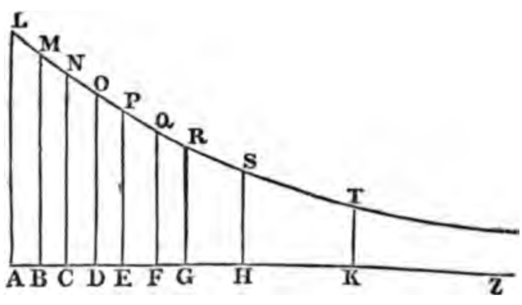
Si quædam ex ordinatis logarithmicæ, ut A B, sit æqualis unitati, punctum axeos A cui insistit censetur abscissarum origo, et abscissæ a parte A M sumptæ, sunt positivæ, a parte A O negativæ et abscissa pertinens ad ordinatam A B sive ad unitatem est ipsum o.




*Corol.* 1. *Differentiæ quamminimæ ordinatarum logarithmicæ æqualibus tempusculis genitæ, sunt ut illæ ordinatæ.*

In quovis enim puncto logarithmicæ velocitas axi perpendicularis quâ ordinatæ crescunt vel decrescunt, est ordinatæ proportionalis (ex def.), sed durante tempusculo infinitè parvo illa velocitas uniformis est censenda, et æqualibus tempusculis incrementa vel decrementa linearum sunt ut velocitates uniformes quibus generantur, ergo incrementa vel decrementa ordinatarum h. e. earum differentiæ æqualibus tempusculis genitæ, sunt ut illæ ordinatæ.

*Corol.* 2. *Sint ordinatæ quævis P M, Q N, ducantur duæ aliæ ordinatæ p m, q n ipsis quamproximæ et ab iis æqualiter distantes, p m et q n erunt prioribus ordinatis proportionales:* Velocitas enim quâ ordinata motu sibi parallelo fertur est uniformis, ideóque eodem tempore ordinata P M ad p m perveniet ac Q N ad q n ob æquales distantias, ergo, per Cor. 1. differentiæ ordinatarum P M et Q N dum perveniunt ad p m et q n erunt iis ipsis ordinatis proportionales, sed adjectis vel detractis iis differentiis a lineis P M et Q N fiunt ordinatæ p m, q n, et adjectis vel detractis ex terminis rationis cujusvis, correspondentibus terminis rationis ipsi æqualis non mutatur prior ratio, ergo ordinatæ p m et q n erunt inter se ut P M ad Q N, et etiam alternando P M : p m = Q N : q n.




*Corol.* 3. *Si sumantur in axe puncta C, D, E, F ad distantias æquales et quamminimas, in iisque punctis erigantur ordinatæ, illæ ordine constituent progressionem geometricam.* Nam quia ex Hyp. ordinatæ G C et H D, H D et K E sunt quamproximæ et æqualiter distantes, est per Corollarium præcedens G C : H D = H D : K E, eadem ratione est H D : K E = K E : L F, sicque deinceps, unde liquet ordinatas G C : H D : K E : L F, &c. esse in progressione geometricâ.

33. *Theor. I. Sumantur in axe logarithmicæ quatuor puncta, ita ut duo priora æque a se mutuò distent ac duo posteriora, ordinatæ in iis punctis erectæ erunt in proportione geometricâ.*

*Et si sumantur in axe quotlibet puncta æque distantia ordine continuo, ordinatæ iis insistentes erunt in progressione geometricâ.*

Sumantur in axe duo puncta quævis A et E, et alia duo H et K talia ut sit A E = H K, eriganturque in illa puncta ordinatæ A L, E P, H S, K T; dico illas ordinatas fore et proportione geometricâ.

Dividatur tam A E quam H K, in partes infinitè parvas æquales inter se, totidem erunt divisiones in utroque intervallo; erigantur in illa puncta ordinatæ, fient duæ progressiones geometricæ, in quibus totidem erunt termini, et rationes terminorum successivorum æquales erunt, quia ordinatæ in utrâque progressione æqualiter distant; ergo ex æquo. primus terminus A L prioris progressionis erit ad E P ultimum terminum ejus progressionis, ut H S primus terminus alterius progressionis ad ejus ultimum terminum K T. Q. e. d.

Et si sumantur in axe plura puncta æquè distantia ordine continuo sibi succedentia, ordinatæ in iis punctis erectæ erunt in progressione geometricâ: probatur ut in Cor. 3. defin.

*Corol. E converso, si in lineâ quâvis sumantur plura puncta, æquè distantia ordine continuo, et in iis erigantur perpendiculares quæ sint in progressione geometrica, logarithmica aliqua per earum perpendicularium extremitates transibit.*

Sint enim A, D, G, &c. ea puncta æquè distantia dividanturque eorum intervalla in partes æquales quamminimas, totidem erunt in quovis intervallo, assumantur mediæ proportionales in-

ter perpendiculares A L et D O, D O et G R, &c. tot quot sunt divisionum puncta, et in singulis punctis erigantur perpendiculares iis mediis proportionalibus ordine sumptis æquales; Denique curva tangat tam perpendiculares datas A L, D O, G R quam hasce medias, dico eam curvam esse logarithmicam.

Facile enim liquet ex naturâ progressionum, quod cum sit A L : D O = D O : G R, &c. et totidem mediæ proportionales assumantur inter A L et D O, quot assumuntur inter D O et G R, sicque deinceps, formari progressionem continuam constantem ex omnibus illis perpendicularibus tam datis quam inventis, ideò quamlibet ex illis, ut A L, esse ad sibi proximam B M, ut alia quævis D O, est ad proximam P E, unde dividendo, est A L ad suam differentiam a proximâ, ut est etiam D O ad suam differentiam a proximâ, ideóque perpendicularium proximarum differentiæ erunt ubique eis perpendicularibus proportionales; Evanescentibus ergo punctorum in axe sumptorum intervallis, et perpendicularibus ad vicinas æquali ubique celeritate latis et æquali tempusculo (ob æqualitatem intervallorum), velocitates quibus crescunt vel decrescunt perpendiculares erunt iis ipsis perpendicularibus proportionales; Ergo (ex definitione logarithmicæ) ea curva quæ tanget eas perpendiculares erit logarithmica.

34. *Theor. II. Abscissæ axis logarithmicæ, sunt logarithmi ordinatarum in earum extremo insistentium.* Ferantur hinc inde ab origine axis partes æquales quamminimæ, in extremo singularum erigantur ordinatæ, illæ omnes ordinatæ constituent progressionem geometricam inter cujus terminos occurrit unitas, earum verò abscissæ erunt in progressione arithmeticâ propter partium in axe sumptarum æqualitatem, et abscissa quæ unitati respondet est 0; Jam autem cùm termini progressionis arithmeticæ inter quos est 0 ita aptantur terminis progressionis geometricæ ut 0 respondeat unitati et reliqui termini sibi respondeant, tum termini progressionis arithmeticæ sunt logarithmi terminorum correspondentium progressionis geometricæ; Ergo abscissæ logarithmicæ, sunt logarithmi ordinatarum correspondentium.

*Corol.* 1. *Portio axis quæ intercipitur inter duas ordinatas est logarithmus rationis quæ intercedit inter illas ordinatas.* Quotiens enim duarum quantitatum exprimit rationem quæ inter illas intercedit, et differentia logarithmorum earum quantitatum, est logarithmus quotientis earum, sed abscissæ sunt logarithmi ordinatarum, et portio axis quæ intercipitur inter duas ordinatas est differentia abscissarum sive logarithmorum ad eas ordinatas pertinentium, ergo illa portio est logarithmus quantitatis quæ exprimit rationem quæ inter ordinatas intercedit.

*Corol.* 2. *Si dentur duarum aut plurium quantitatum logarithmi, et a puncto dato rectæ alicujus sumantur longitudines eis logarithmis æquales, et in earum extremo erigantur perpendiculares quantitatibus quarum sumuntur logarithmi æquales, logarithmica aliqua per earum perpendicularium extremitates transibit.*

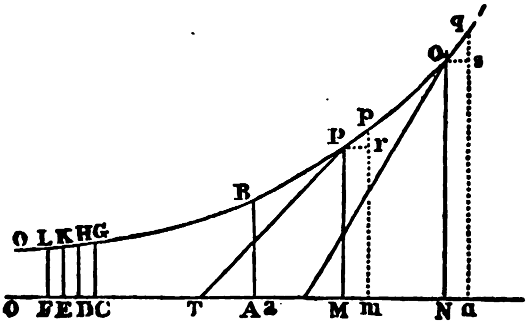
In recta O A N *(vid. fig. prim. pag. succed.)* sumatur punctum A in quod erigatur perpendicularis A B unitati æqualis, sitque A M logarithmus quantitatis cui æqualis est perpendicularis M P, sit A a differentia progressionis arithmeticæ ex quâ desumuntur logarithmi, quæ ideò accuratè continebitur in intervallo A M toties quot sunt termini in progressione geometrica ex qua desumuntur quantitates quarum habentur logarithmi, quærantur tot mediæ proportionales inter A B et M P quot sunt divisionum puncta inter A et M, et in illa puncta erigantur perpendiculares illis mediis proportionalibus ordine æquales, fiet progressio geometrica, quæ est ipsa progressio quantitatum quarum abscissæ lineæ O A N quantitate A a successivè auctæ sunt logarithmi, siquidem in utrâque progressione occurrunt termini A B et M P eodem intervallo in utraque dissiti, sed si in punctis æquidistantibus lineæ cujusvis erigantur perpendiculares in progressione geometricâ, logarithmica aliqua earum vertices tanget (Cor. Theor. I.) Ergo si dentur numeri cum suis logarithmis concipi semper poterit logarithmica cujus abscissæ sint illi logarithmi et cujus ordinatæ sint quantitates quibus respondent.

35. *Theor. III. Axis logarithmicæ est ejus asymptotus ad quam ab unâ parte accedit propius datâ quâvis quantitate numquam tamen eam attingit, et a quâ ab alterâ parte longius recedit datâ quâvis quantitate.*

Sint duæ ordinatæ A B, M P quarum una sit alterius dupla vel plusquam dupla, feratur portio axis A M hinc inde secundum axem sine fine, ordinatæ in ea puncta erecta crescent ab unâ parte, et ab alterâ decrescent in ratione duplâ vel plusquam duplâ (per Cor. Theor. I.) sed ex principiis Archimedeis quantitas crescens in progressione duplâ vel plusquam duplâ omnem quantitatem datam tandem excedet, et ex principiis Euclideis quantitas quævis decrescens in ratione duplâ vel plusquam dupla minor fit quâvis quantitate datâ; Ergo logarithmica longius ab axe recedit, aut propiùs ad eum accedit quâvis quantitate datâ, numquam tamen eum attinget, attingat enim eum si fieri potest in quodam puncto X, ferendo distantiam A M secundum axem, fiet tandem ut cadat proximè citra X, putà in Y, tum proximè ultra, ut in Z; in puncto Y nondum attinget axem ex Hypothesi, et aliquo intervallo Y V ab eo distabit, sed quia Y Z = A M debebit esse A B : M P = Y V ad ordinatem in Z, quæ ideò dabitur, ac per consequens logarithmica nondum attinget axem in Z, nedum eum attigerit in X. Q. e. d.

36. *Theor. IV. Subtangens logarithmicæ est constans.* Capiantur enim ubivis in axe particulæ æquales quamminimæ M m, N n, erectisque ordinatis M P, m p, et N Q, n q, per puncta P et Q concipiantur tangentes P T, Q t axi occurrentes in T, t; ducantur etiam rectæ P r, Q s, ordinatis m p, n q perpendiculares. Evan-

æqualibus ordinatarum distantiis M m, N n, triangulum P p r fit simile triangulo T P M, et triangulum Q q s simile triangulo t Q N, ideóque est p r : P M = P r (sive M m) : M T, et q s : Q N = N n (sive M m) : N t, sed ob dis-

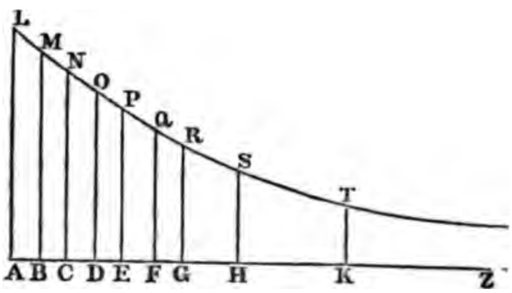



tantias M m, N n æquales est p m : P M = q n : Q N et dividendo est p r : P M = q s : Q N, quare P r (sive M m) : M T = N n (sive M m) : N t, adeóque M T = N t. Q. e. d.

*Corol. Hinc cum ordinata sit ad subtangentem constantem ut fluxio ordinatæ ad fluxionem abscissæ, obtinetur logarithmicæ æquatio fluxionalis.* Abscissa A M dicatur x, ordinata M P, y, subtangens M T, s, fluxio M m erit d x, p r = d y, cumque sit y : s = d y : d x, est y d x = s d y æquatio ad logarithmicam.

37. *Probl. I. Datâ subtangente et duabus ordinatis logarithmicæ, invenire portionem axis inter eas ordinatas interceptam.*

1^mo^. Casus, major ex illis ordinatis non sit plusquam dupla alterius; major illa ordinata sit L A quæ dicatur y, minor sit G R, differentia earum L A — R G sit b. Portio axis A G inter eas intercepta sit x, divisaque concipiatur in partes æquales infinite parvas A B = d x, earum numerus (qui infinitus censendus est) dicatur n, erit ergo n d x = x; subtangens data sit s, eritque per Corollarium præcedens y : s = (d y : d x = n d y : n d x =) n d y : x; hoc autem modo determinatur valor




n d y. Concipiantur erectæ omnes ordinatæ in puncta divisionum portionis axis A G, erunt in progressione geometricâ (per Cor. 3. def. n. 32.) et cum earum differentiæ sint ut illæ ordinatæ (per Cor. 1. def. n. 32.) differentiæ successivæ earum ordinatarum erunt in progressione geometricâ, cujus omnes termini simul sumpti differentiam L A — R G sive b efficient; numerus autem terminorum ejus progressionis erit n, primus terminus d y, secundus invenitur per hanc proportionem L A : M B = d y : $\frac{MB}{LA}dy$ sive (quia M B = y — d y et L A = y) secundus ille terminus erit $\frac{y-dy}{y}dy$, unde juxta methodum summandi progressiones geometricas

$$\text{est } b = dy \times \frac{\frac{\overline{y-dy}|^n}{y^n}-1}{\frac{y-dy}{y}-1}$$

$= -\frac{1}{y^{n-1}} \times (\overline{y-dy}|^n - y^n)$ = (valore $\overline{y-dy}|^n$ in seriem reducto) $-\frac{1}{y^{n-1}} \times (y^n - ny^{n-1}dy + n \times \frac{n-1}{2}y^{n-2}dy^2$, &c. $-y)^n$, sive deletis terminis $y^n$ et $-y^n$, totâque serie per $-y^{n-1}$ divisa est $b = +ndy - \frac{nn-n}{2}y^{-1}dy^2 + \frac{n^3-3n^2-2}{2\times 3}y^{-2}dy^3$, &c. sed quoniam n est numerus infinitus, in singulis coefficientibus altissima ejus dignitas sola assumi debet, reliquis terminis neglectis, unde series ad hanc reducitur $b = +ndy - \frac{n^2y^{-1}dy^2}{2} + \frac{n^3y^{-2}dy^3}{2\times 3}$ &c. qui quidem termini finiti sunt, compensatâ dignitate numeri infiniti n per infiniti parvi d y similem dignitatem.

Ex eâ autem serie, per serierum reversionem obtinebitur valor ipsius n d y, sit enim n d y = A b + B b² + C b³ + D b⁴ &c.

erit $+ndy = +Ab + Bb^2 + Cb^3$ &c.

$-\frac{nndy^2}{2y} = \quad -\frac{A^2b^2}{2y} - \frac{2ABb^3}{2y}$

$+\frac{n^3dy^3}{2\times 3y^2} = \quad +\frac{A^3b^3}{2\times 3y^2}$

Cum ergo hi omnes termini debeant efficere b, fiat primus terminus A b = b erit A = 1, et reliqui omnes termini debebunt esse æquales 0,

suppeditabuntque totidem æquationes ad determinandos coefficientes B, C, D, &c. v. gr. est $+ B b^2 - \frac{A^2 b^2}{2 y} = o$, unde invenitur $B = \frac{1}{2 y}$; est $C b^2 - \frac{2 A B b^3}{2 y} + \frac{A^3 b^3}{2 \times 3 y^2} = o$, substitutoque valore A et B divisoque per $b^3$, est $C = \frac{1}{3 y^2}$, sicque de cæteris, unde reperietur $n d y = b + \frac{b 2}{2 y} + \frac{b^3}{3 y^2} + \frac{b^4}{4 y^3}$, &c.

Cum itaque sit $y : s = n d y : x$, erit $x = s \times \frac{b}{y} + \frac{b^2}{2 y^2} + \frac{b^3}{3 y^3} + \frac{b^4}{4 y^4}$, &c. Q. e. i.

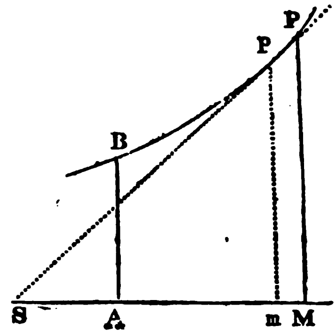
2$^{us}$. Cas. Quod si ordinata L A fit plusquam dupla ordinatæ T K, quæratur media proportionalis inter L A et T K, cujus si L A non sit plusquam dupla, invenietur intervallum abscissum inter eam et L A, ut prius, eritque dimidia pars intervalli quæsiti A K, erit enim L A ad eam mediam, ut ea media ad T K, unde portio axis inter L A et eam mediam, erit æqualis portioni axis inter eam mediam et T K: si L A ejus mediæ sit plusquam dupla, quæratur nova media inter L A et priorem mediam, intervallum inter hanc et L A erit quarta pars portionis quæsitæ A K. Quod si L A sit adhuc plusquam dupla istius mediæ repetatur operatio donec media inveniatur cujus L A non sit plusquam dupla, ex cujus intervallo, intervalli A K valorem assignare licebit, eo quo prius usi sumus ratiocinio.

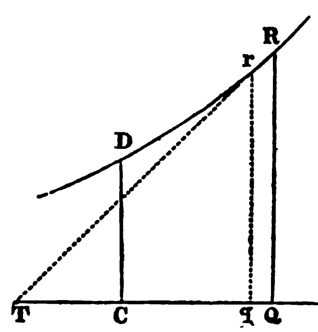
*Corol.* 1. *Si una ex ordinatis sit unitas, portio axis quæsita* x *erit alterius ordinatæ abscissa, ideóque ejus erit logarithmus*, positivus quidem si ea ordinata sit unitate major, negativus verò si unitate sit minor.

*Corol.* 2. Si ordinata G R sit unitas, et ordinata L A ejus dupla, et si subtangens logarithmicæ sit æqualis unitati, series abscissam exhibens in hanc mutatur $x = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 8} + \frac{1}{4 \times 16}$, &c. quorum terminorum calculus est facillimus, qui si instituatur, abscissa quæsita invenietur $x = .6931472$.

38. *Theor. V. Sint duæ diversæ logarithmicæ in utrâque sumantur ordinatæ æquales, abscissæ illis ordinatis correspondentes in utrâque logarithmicâ erunt ut earum logarithmicarum subtangentes, adeóque in constanti ratione.*

Sint duæ logarithmicæ P B, R D prioris subtangens sit M S = s, subtangens alterius sit Q T = t; Ordinatæ P M, R Q in utrâque sumptæ sint æquales dicanturque y; sint ordinatæ B A et D C æquales unitati; abscissa A M dicatur x, et C Q, z; dico fore s : t = x : z. Dividatur A M in partes infinitè parvas d x, quarum numerus (infinitus) dicatur n. In totidem partes d z dividatur C Q, et concipiantur ordinatæ in omnes divisiones erectæ, illæ ordinatæ erunt in progressione geometricâ in utroque intervallo, sitque p m secundus terminus primæ progressionis, et q r secundus terminus progressionis alterius, erit in primâ $P M : B A = P M^{n-1} : p m^{n-1}$, in secunda $R Q : D C = R Q^{n-1} : r q^{n-1}$, ex natura progressionis geometricæ, et quia tres priores termini



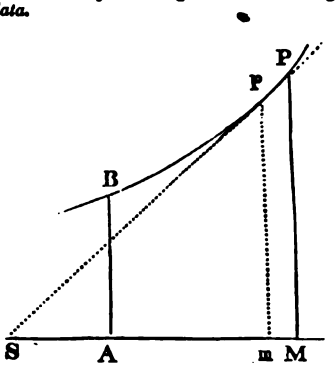

harum proportionum ex hypothesi sunt æquales; æquales etiam erunt $p m^{n-1}$ et $r q^{n-1}$, ideóque p m = r q, et P M — p m = R Q — r q, differentiæ ergo proximarum ordinatarum sunt æquales, dicanturque d y. Est autem in prima logarithmica (per Probl. 1. n. 37.) y : s = n d y : n d x sive x, et alternando y : n d y = s : x; in secunda y : t = n d y : n d z sive z, et alt. y : n d y = t : z, est ergo s : x = t : z sive s : t = x : z. Q. e. d.

*Corol.* 1. Hinc liquet quod (manente unitate) logarithmicæ quarum eædem erunt subtangentes, in omnibus erunt æquales, quippe si sumantur in iis æquales ordinatæ abscissæ etiam æquales erunt.

*Corol.* 2. Logarithmicæ vero diversæ speciei dicentur, quarum subtangentes erunt diversæ; et logarithmi diversæ speciei dicentur, ubi eisdem quantitatibus logarithmi diversi respondebunt, unde etiam logarithmicæ ad quas pertinent diversæ illæ logarithmorum species, habebunt diversas subtangentes (per hoc Theor.) ideóque erunt diversæ speciei.

*Corol.* 3. *Datis logarithmis cujusvis speciei, logarithmi alîus speciei eisdem numeris respondentes inveniri possunt, si dentur subtangentes utriusque speciei;* Hinc si dentur logarithmi quorum subtangens est unitas (qui hyperbolici dicuntur), sitque data subtangens alîus speciei .4342944 multiplicentur logarithmi dati per hunc numerum, habebunturque eorumdem numerorum logarithmi in hac alterâ specie, ut liquet ex hoc Theor. Ideóque in posterum per hanc expressionem L. x, intelligemus logarithmum hyperbolicum quantitatis x, qui si multiplicetur per quantitatem quamlibet ut a, a L. x exprimet logarithmum x ex eâ specie depromptum quæ habet a pro subtangente, est enim 1 : a = L. x ad eum logarithmum qui ergo erit a L. x.

39. *Probl. II. Datâ ordinatâ logarithmicæ et ejus abscissâ, invenire ejus subtangentem, dummodo alterius cujuslibet logarithmicæ subtangens sit data.*

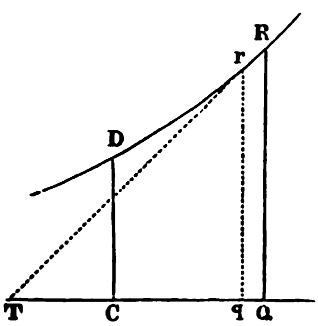


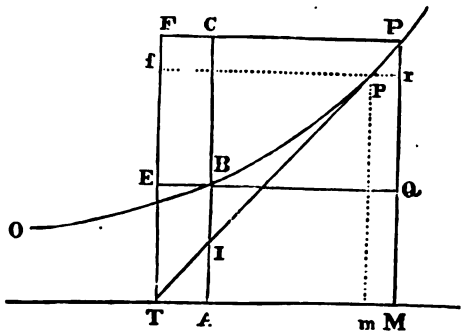

bularum æquales, et cujus ordinatæ sint æquales numeris eis logarithmis correspondentibus, quæraturque ejus logarithmicæ subtangens; inveniatur in altera logarithmica cujus subtangens est unitas abscissa respondens ordinatæ quæ sit unitatis dupla (per Cor. 2. Prob. I.) quæ est .6931472. fiatque ut .6931472. ad .3010300. ita unitas ad subtangentem logarithmicæ tabularum quæ invenietur .4342944.

*Corol.* Hinc dato logarithmo alicujus numeri desumpto ex logarithmica cujus subtangens data est, habebitur ejus numeri logarithmus in tabulis, dicendo ut subtangens data ad .4342944. ita logarithmus datus ad ejusdem numeri logarithmum in tabulis.

40. *Probl. III. Sit quantitas variabilis, cujus logarithmus etiam variabilis est, ex ejus quantitatis variabilis fluxione, fluxionem ejus logarithmi determinare.* Concipiatur logarithmica ad quam pertinet species logarithmi quæ assumitur; sit a ejus subtangens, sitque y variabilis proposita, quæ consideretur ut ejus logarithmicæ ordinata, sitque x ejusdem logarithmicæ abscissa ei ordinatæ y respondens, erit per naturam logarithmicæ (n 36.) $y\,d\,x = a\,d\,y$ et $d\,x = \frac{a\,d\,y}{y}$, sed x est logarithmus ordinatæ y, ergo d x est ejus differentia, ergo $d\,L.\,y = \frac{a\,d\,y}{y}$ hoc est, differentia logarithmi est differentia variabilis propositæ divisa per ipsam variabilem, et ducta in constantem quæ sit subtangens logarithmicæ ad quam pertinet species logarithmi assumpti.

Et e converso, si habeatur hæc fluxio $\frac{a\,d\,y}{y}$, ejus fluens est logarithmus ipsius quantitatis y ex eâ logarithmicâ desumptus cujus subtangens est a.




Data sit subtangens logarithmicæ F B, logarithmicæ verò R D data sit abscissa C Q et ordinata Q R, quæritur hujus logarithmicæ subtangens: Quæratur primùm abscissa quæ in logarithmica P B responderet ordinatæ æquali Q R, per Probl. I. sitque ea A M, fiatque ut A M ad C Q ita subtangens data ad quæsitam.

*Exempl.* In tabulis logarithmorum, logarithmus numeri 2. est .3010300. si ergo concipiatur logarithmica cujus abscissæ sint logarithmis ta-

41. *Theor. V. Spatium logarithmicum A B P M duabus ordinatis A B, P M arcu B P et abscissâ A M comprehensum, æquale est rectangulo subtangentis et differentiæ ordinatarum.*

Ductâ enim per punctum P tangente P T, compleatur rectangulum T F P M, agatur per B recta E Q, parallela T M, secans T F in E et M P in Q; per m ordinata m p alteri M P infinitè propinqua, et per p recta f r parallela T M, occurrens T F in f et M P in r; His po-

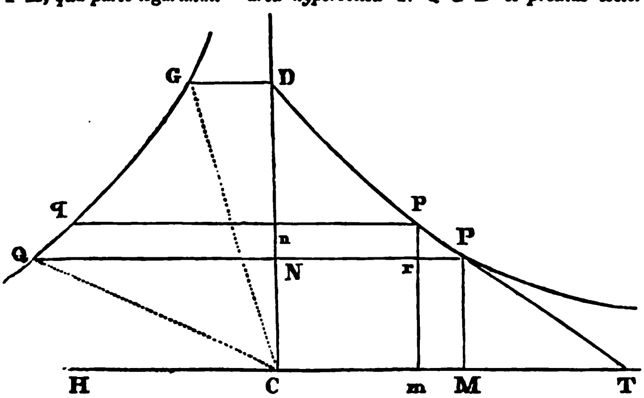
sitis (ob triangula P r p, P M T similia) erit P r : p r = P M : M T, seu P F, ideóque rectangulum M m p r æquale erit rectangulo P F f r. Quarè si area logarithmica A B P M divisa intelligatur in rectangula innumera ut M p, rectangulum E F P Q divisum erit in totidem rectangula ut F r correspondentibus M p, æqualia, et proindè area logarithmica A B P M æqualis est rectangulo E F P Q. Q. e. d.

Hinc *spatium logarithmicum A B P M est ut ordinatarum A B, P M differentia P Q,* ob datam subtangentem T M (36.)

Trilineum verò logarithmicum B P Q = P Q × M T — A M × B A; et producta A B ut rectæ F P occurrat in C, erit trilineum logarithmicum B P C = A C × C P — C B × M T.

42. *Corol.* 1. *Hinc spatium logarithmicum infinitè protensum O O P M, quâ parte logarithmica ad asymptotum M O continuò accedit, duplum est trianguli P T M.* Nam ob distantiam infinitam M O evanescit ordinata A B, fitque spatium O o P M, æquale rectangulo T F P M, sub ordinatâ PM et subtangente M T contento.

43. *Corol.* 2. *Tangens P T (producta si opus est) secet ordinatam A B in I, et spatium logarithmicum B P C erit ut B I inter logarithmicam et tangentem intercepta.* Nam ob triangulorum T F P, I C P, similitudinem, est T F ad F P, (seu A C ad M T) ut C I ad C P, et ideò A C × C P = M T × C I. Quarè (41) rilineum B P C = A C × C P — M T × C B = M T × C I — M T × C B = M T × B I. Est igitur, ob datam M T, trilineum B P C ut B I.




44. *Theor. VI. Asymptotis orthogonalibus C H, C D descripta sit hyperbola Q q G, et per punctum D in asymptoto C D datum, logarithmica D p P axem habens C H productum; per punctum D agatur ad hyperbolam ordinata D G, et per punctum alterum quodvis N ordinata N Q quæ producta logarithmicæ occurrat in P; erit area hyperbolica N Q G D, ad dignitatem hyperbolæ seu ad rectangulum C D × D G, in ratione rectæ N P ad subtangentem logarithmicæ.*

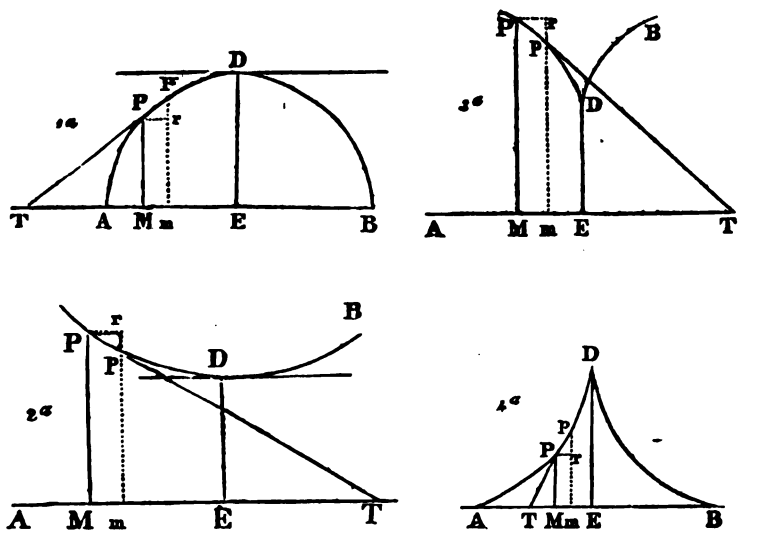
Agatur enim altera q p ipsi Q P infinitè propinqua, ex punctis p, P demittantur ad axem C T perpendiculum p m secans Q P in r et perpendiculum P M; P T tangat logarithmicam in P; erit ob triangula p r P, P M T similia, p r (seu N n) : P r = P M (seu C N) : M T, et (ex naturâ hyperbolæ per Theor. 4. de Hyp. Lib. 1.) N Q : D G = C D : C N; ideóque per compositionem rationum et ex æquo N Q × N n : P r × D G = C D : M T; Quarè ob datas C D et M T, summa omnium rectangulorum N Q × N n, in quæ dividi potest area N Q G D, hoc est, hæc area ipsa est ad rectangulum sub data G D, et summâ omnium P r, seu totâ rectâ N P, ut C D ad M T, proindéque N Q G D × M T = N P × G D × C D, et hinç N Q G D : G D × C D = N P : M T. Q. e. d.

45. *Corol. Hinc* (ob datas M T, G D, C D) *area hyperbolica N Q G D et proindè sector C G Q ipsi æqualis* (377. Lib. 1.) *est ut recta N P productio ordinatæ Q N, inter asymptotum hyperbolæ C D et logarithmicam intercepta.*

46. *Scholium.* Cum Ill. Marchio Polenus in Epistolâ ad Hermannum Patavii an. 1729. editâ, ità facilem et expeditam logarithmicæ descriptionem organicam, pro ingenii sui sagacitate invenerit, ut curva illa sectionibus conicis haud difficilius construatur, cumque logarithmica per lineas rectas id præstet quod hyperbola per sectores vel quadrilatera sua, in problematum constructionibus quæ per areas hyperbolicas absolvuntur, loco hyperbolæ non malè usurparetur logarithmica; quamvis si problema ad merum calculum reducatur, æquè benè possint usurpari spatia hyperbolica, quam abscissæ logarithmicæ. Quomodo autem constructiones quæ per spatia hyperbolica fiunt, ad logarithmicam transferantur, pluribus exemplis ostendemus deinceps.

### De Maximis et Minimis.

47. *Theor. Si quantitas variabilis,* (quam exponat recta P M curvæ P D B ordinata) *ad certum usque terminum D continuò crescat et postea decrescat, vel contrà, decrescat primùm et*




*deinde crescat.* Actaque sit altera ordinata p m priori P M infinitè propinqua, et per punctum P recta P r abscissæ A P parallela secans p m in r, *ratio incrementi vel decrementi evanescentis p r ordinatæ P M, ad incrementum evanescens M m abscissæ A M in puncto D ubi ordinata M P omnium maxima vel minima evadit, infinita est vel nulla.*

Per punctum P ducatur P T tangens curvam in P, et abscissæ occurrens in T, et propter similitudinem triangulorum p r P, P M T, erit p r ad P r, seu M m ut P M ad M T. Sed si coincidente puncto P cum D, tangens P T evadat abscissæ A E parallela et proindè M P fiat maxima vel minima ordinata E D ut in figurâ 1ª. et 2ª. punctum T in infinitum abit, et ideò ratio P M ad M T seu ratio p r ad M m nulla est. Contrà verò si coincidente P cum D, tangens P T cum ordinatâ maximâ vel minimâ D E conveniat, ut in figurâ 3. et 4. evanescit subtangens M T et ratio P M ad M T, sive p r ad M m infinita evadit.

48. *Corol.* 1. Ut ex datâ æquatione inter abscissam A M et ordinatam M P, inveniatur valor abscissæ A E cui maxima vel minima applicata E D ordinatur, sumenda est æquationis fluxio, et ratio fluxionis ordinatæ ad fluxionem abscissæ, seu ratio p r ad M m, eaque vel infinito vel nihilo æquanda est, aut quod idem est, factâ M m constante, fluxio ordinatæ vel infinito vel nihilo æqualis supponenda.

49. *Corol.* 2. Si quantitas variabilis cujus maximum vel minimum quæritur non sit ordinata curvæ, potest illa supponi æqualis ordinatæ curvæ alicujus in datam quantitatem ductæ, uti si proposita esset quantitas variabilis $a x^2 - x^3$ in quâ a data est, x indeterminata, poneretur $a x^2 - x^3 = b b y$, quæ est æquatio ad curvam cujus abscissa est x, et ordinata y, et hinc, sumptis fluxionibus, foret $2 a x d x - 3 x^2 d x = b b d y$, et $2 a x - 3 x^2 = \frac{b b d y}{d x} = 0$ adeóque $2 a x - 3 x x = 0$ et $x = \frac{2}{3} a$. Si itaque loco x substituatur $\frac{2}{3}$ a in quantitate propositâ, obtinebitur maximum ejus $\frac{4}{9} a^3 - \frac{8}{27} a^3 = \frac{4}{27} a^3$. Idem inventum fuisset brevius, si nullâ factâ suppositione, fluxio variabilis propositæ videlicet $2 a x d x = 3 x^2 d x$, nihilo fuisset æquata.

## PROPOSITIO I. THEOREMA I.

*Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentiâ amissus est ut spatium movendo confectum.*

Nam cum motus singulis temporis particulis æqualibus amissus sit ut velocitas, hoc (a) est, ut itineris confecti particula, erit, componendo, motus toto tempore amissus ut iter totum. Q. e. d.

*Corol.* Quare si corpus, gravitate omni destitutum, in (b) spatiis liberis sola vi insitâ moveatur; ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum: (c) dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum, ut motus totus sub initio ad motûs illius partem amissam.

## LEMMA I.

*Quantitates differentiis suis proportionales sunt continuè proportionales.*

Sit A ad A — B ut B ad B — C et C ad C — D, &c. et convertendo fiet A ad B ut B ad C et C ad D, &c. Q. e. d.

## PROPOSITIO II. THEOREMA II.

*Si corpori resistitur in ratione velocitatis, et idem solâ vi insitâ per medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione geometricâ, et spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.*

*Cas.* 1. Dividatur tempus in particulas æquales; et si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulsu unico, quæ sit ut veloci-

(a) * *Hoc est, ut itineris confecti particula* (12) ob datum temporis momentum (ex hyp.)

(b) * *In spatiis liberis,* id est, in quibus nullum aliud est obstaculum præter medii resistentiam velocitati proportionalem.

(c) * *Dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest,* hoc est, usque ad motus exstinctionem. (Ostendetur autem infra, in nota f, infinitum tempus requiri ut motus omnis extinguatur, quando resistitur motui in ratione velocitatis.) Cùm ergo motus ad exstinctionem usque amissus, sit ipse motus totus, et motus amissi sint ut spatia movendo confecta (per Theor.) erit motus totus ad motûs partem amissam post datum spatium descriptum, ut spatium ad exstinctionem usque motûs descriptum ad illud datum spatium. Unde liquet spatium quod corpus ad motûs usque extinctionem describit finitum esse, cùm datam habeat rationem ad spatium finitum.

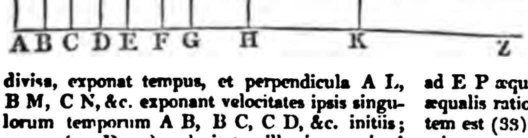
tas: (d) erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, et propterea (per Lem. I. Lib. II.) continuè proportionales. (e) Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressione continuâ, qui per saltum capiuntur omisso passim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex rationibus inter se iisdem terminorum intermediorum æqualiter repetitis, et propterea eæ quoque rationes compositæ inter se eædem sunt. Igitur velocitates, his terminis proportionales, sunt in progressione geometricâ. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ; et augeatur earum numerus in infinitum, eò ut resistentiæ impulsus reddatur continuus; et velocitates in principiis æqualium temporum, semper continuè proportionales, erunt in hoc etiam casu continuè proportionales. Q. e. d.

*Cas.* 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est, earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ (per Prop. I. Lib. II.) et propterea etiam ut totæ. Q. e. d.

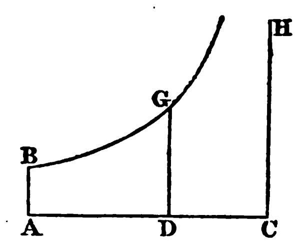
*Corol.* Hinc si asymptotis rectangulis A C, C H describatur hyperbola B G, sintque A B, D G ad asymptoton A C perpendiculares, et exponatur tum corporis velocitas tum resistentia medii, ipso motus initio,

(d) * *Erit decrementum velocitatis.* (15) ut resistentia ob datum temporis momentum, ideóque (per hyp.) ut velocitas.

(e) 50. *Proinde si ex æquali*, &c. Linea recta A Z in particulas æquales A B, B C, C D, &c. divisa, exponat tempus, et perpendicula A L, B M, C N, &c. exponant velocitates ipsis singulorum temporum A B, B C, C D, &c. initiis; erunt (ex Dem.) velocitates illæ in continuâ progressione geometricâ decrescente. Proindè si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, ut A E, E H, H K, &c. erunt velocitates A L, E P, H S, &c., ipsis temporum initiis ut termini qui e progressione geometricâ per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum B M, C N, &c. et F Q, G R, &c. numero. Componuntur autem horum terminorum A L, E P, H S, &c. rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis; nimirum ratio A L ad E P, componitur ex rationibus A L ad B M, B M ad C N, &c. quæ tum magnitudine, tum numero æquales sunt rationibus E P ad F Q, F Q ad G R, &c. ex quibus componitur ratio E P ad S H, et ità porrò. Quarè ratio A L ad E P æqualis est rationi E P ad H S, et hæc æqualis rationi H S ad K T. Manifestum autem est (33) curvam L M N S T, ad quam terminantur perpendicula omnia A L, B M, C N, &c. esse logarithmicam.



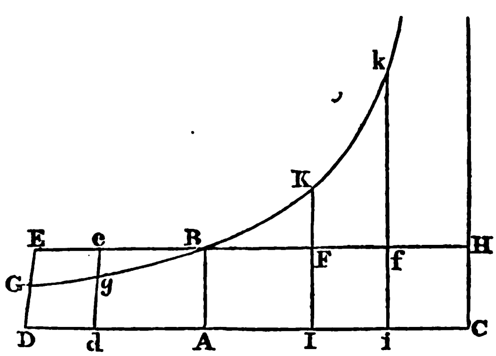
per lineam quamvis datam A C, elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam D C: exponi potest tempus per aream A B G D, et spatium eo tempore descriptum per lineam A D. (f) Nam si area illa per motum puncti D augeatur uniformiter ad modum temporis, decrescet recta D C in ratione geometricâ ad modum velocitatis, et (g) partes rectæ A C æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eâdem ratione.




## PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

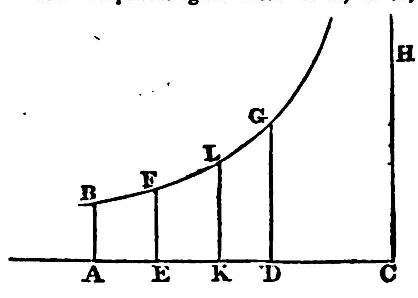
*Corporis, cui, dum in medio similari rectà ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.*

Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum B A C H, et resistentia medii initio ascensus per rectangulum B A D E sumptum ad contrarias partes rectæ A B. Asymptotis rectangulis A C, C H, per punctum B describa-



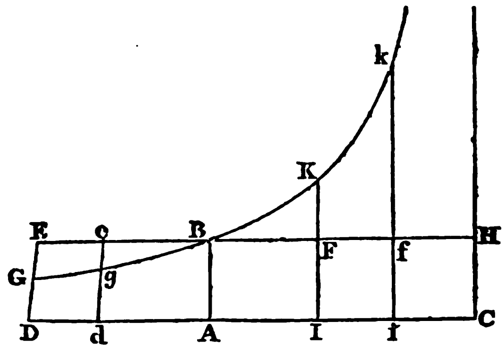

(f) * *Nam si area illa per motum puncti D* sive ordinatæ D G *augeatur uniformiter ad modum temporis,* exhibeatque proindè tempus, *decrescet recta D C, in ratione geometricâ* (380. Lib. I.) *ad modum velocitatis,* et ideò velocitatem poterit exponere (per Cas. 1. Dem.) et quia recta A C exponit velocitatem ipso motûs initio, et D C, velocitatem residuam elapso tempore A B G D erit A D ut velocitas amissa, atque ideò ut spatium descriptum (per Prop. I. hujus). Quia verò coincidentibus punctis D et C, area A B G D infinita evadit, manifestum est tempore infinito finitum spatium A C describi.

(g) * *Et partes rectæ A C æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eâdem ratione,* &c. Nam si area A B G D ductis ordinatis F E, L K in partes æquales A B F E, E F L K, K L G D divisa sit, erunt lineæ C A, C E, C K, C D in progressione geometricà decrescente (380. Lib. I.) hoc est C A . C E = C E : C K = C K : C D, et dividendo A E : E K = E K : K D = C A : C E. Decrescunt ergo partes rectæ A C in ratione velocitatis. Exponent igitur rectæ A E, E K,




K D, &c., spatia temporibus A B F E, E F L K, K L G D, descripta, et tota recta A D spatium toto tempore A B G D descriptum.

tur hyperbola secans perpendicula D E, d e in G, g; et corpus ascendendo tempore D G g d describet spatium E G g e, tempore D G B A spatium ascensus totius E G B; tempore A B K I spatium descensus B F K, atque tempore I K k i spatium descensus K F f k; et velocitates corporis (resistentiæ medii proportionales) in horum temporum periodis erunt A B E D, A B e d, nulla, A B F I, A B f i respectivè; atque maxima velocitas, quam corpus descendendo potest acquirere, erit B A C H.




([h]) Resolvatur enim rectangulum B A C H in rectangula innumera A k, K l, L m, M n, &c. quæ sint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; et erunt nihil, A k, A l, A m, A n, &c. ut velocitates totæ, atque ideo (per hypothesin) ut resistentiæ medii principio singulorum temporum æqualium. ([i]) Fiat A C ad A K vel A B H C ad A B k K ut vis gravitatis ad resistentiam in principio temporis secundi, deque vi gravitatis subducantur resistentiæ, et manebunt A B H C, K k H C, L l H C, M m H C, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur, atque ideo (per Motûs Legem II.) ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula A k, K l, L m, M n, &c. et ([k]) propterea (per Lem. I. Lib. II.) in progressione geometricâ. Quare si rectæ K k, L l, M m, N n, &c. productæ occurrant hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ A B q K, K q r L, L r s M, M s t N, &c. ([l]) æquales, ideóque tum temporibus tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ. ([m]) Est autem area A B q K (per Corol. 3. Lem. VII.

([h]) * *Resolvatur enim*, &c. Demonstratio quæ sequitur est pro corporis descensu.

([i]) * *Fiat A C ad A K*, &c. Cùm enim sit A K k B, proportionalis resistentiæ principio temporis secundi, si fiat A K k B ad A B H C seu A K ad A C, ut resistentia illa ad gravitatem, rectangulum A H exponet vim gravitatis datam; et simili modo, cum sit A l, ad A k, ut resistentia initio temporis tertii ad resistentiam initio temporis secundi, erit, ex æquo perturbatè A l ad A H, seu A L ad A C, ut resistentia in principio temporis tertii ad gravitatem, et ità deinceps. Quoniam verò gravitas motum corporis cadentis accelerat quem resistentia retardat, de vi gravitatis auferenda est vis resistentiæ ut habeatur vis absoluta quâ corpus deorsum urgetur.

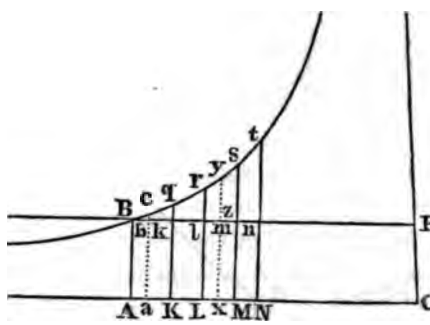
([k]) * *Et propterea*. Rectangula A B H C, K k H C, L l H C, &c. differentiis suis A k K l, &c., proportionalia, erunt in progressione geometricâ (per Lem. I. Lib. II.)

([l]) * *Æquales*. (380) Lib. I.

([m]) *Est autem area A B q K (per Corol. 3 Lem. VII. et Lem. VIII. Lib. I.) ad aream*

et Lem. VIII. Lib. I.) ad aream B k q ut K q ad $\frac{1}{2}$ k q seu A C ad $\times$ $\frac{1}{2}$ A K, hoc est, ut vis gravitatis ad resistentiam in medio temporis primi.

Et ([n]) simili argumento areæ q K L r, r L M s, s M N t, &c. sunt ad areas q k l r, r l m s, s m n t, &c. ut vires gravitatis ad resistentias in medio temporis secundi, tertii, quarti, &c. Proindè cùm areæ æquales B A K q, q K L r, r L M s, s M N t, &c. sint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ B k q, q k l r, r l m s, s m n t, &c. resistentiis in mediis singulorum temporum, hoc est (per hypothesin) velocitatibus, atque ([o]) ideo descriptis spatiis analogæ. Sumantur analogarum summæ, et erunt areæ B k q, B l r, B m s, B n t, &c. spatiis totis descriptis analogæ; necnon areæ A B q K, A B r L, A B s M, A B t N, &c. temporibus. Corpus igitur inter descendendum, tempore quovis A B r L, describit spatium B l r, et tempore L r t N



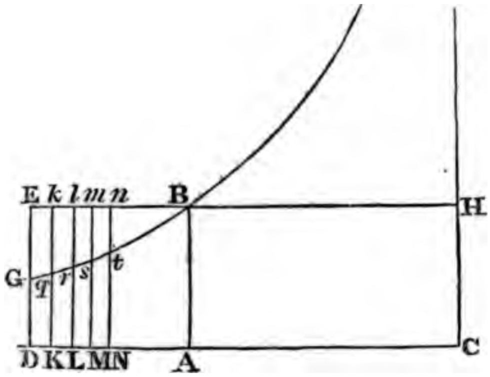

*B k q ut K q ad $\frac{1}{2}$ k q seu ut A C ad $\frac{1}{2}$ A K.* Etenim per ea Lemmata has areas pro rectilineis sumi posse constat, erigatur in medio partis A K perpendicularis a c ad hyperbolam usque, facile constabit ex elementis trapezium A B q K fore ad triangulum B k q ut tota ea perpendicularis a c (pro quâ K q sumi poterit) ad portionem ejus b c intrà triangulum comprehensam, quæ erit (ex const. et 2â. 6ti. Elem.) = $\frac{1}{2}$ k q, est verò ex natura hyperbolæ ea perpendicularis a c ad A B, ut A C ad C a sive A C — $\frac{1}{2}$ A K et dividendo, est ea perpendicularis a c ad a c — a b sive b c quæ est $\frac{1}{2}$ k q ut A C ad A C — A C + $\frac{1}{2}$ A K sive $\frac{1}{2}$ A K; Ergo area A B q K est ad aream B q k ut A C ad $\frac{1}{2}$ A K, sive ut rectangulum A B C H ad rect. $\frac{1}{2}$ A B k K, seu *ut vis gravitatis* quam exponit rectang. A H ad *resistentiam in medio temporis primi* quam exponit rectang. A k, cùm enim sit A K ut velocitas toto primo tempore acquisita, erit $\frac{1}{2}$ A K ut velocitas in medio temporis primi acquisita; resistentiæ autem sunt velocitatibus analogæ.

([n]) *Et simili argumento areæ.* Sumptis enim istis areis pro trapeziis rectilineis: ducantur perpendiculares x z y in medio partium A K, K L, L M, M N ad hyperbolam usque, et (ex Elementis) facile constabit quod area tota singuli trapezii (v. gr. r L M s) est ad ejus areæ portionem supra B H positam (nempe r l m s) ut linea tota x y per medium trapezii ducta ad ejus partem z y supra B H, sed ex naturâ hyperbolæ est ea perpendicularis x y ad A B sive x z, ut A C ad abscissam C x illi perpendiculari respondentem (quæ est C L — $\frac{1}{2}$ L M), et dividendo, est ea perpendicularis x y ad ejus partem z y supra B H, ùt A C ad A x portionem abscissæ inter A et eam perpendicularem (hoc est, in exemplo assumpto, ut A C ad A L + $\frac{1}{2}$ $\times$ L M). Ergo area tota singuli trapezii ad ejus areæ portionem supra B H, ut A C ad A x portionem abscissæ inter A et medium partis cujusvis assumptæ, sive (assumpta communi altitudine A B) ut rectangulum A H, ad rectangulum sub A B et lineâ inter A et medium partis assumptæ comprehensa; sed illud est ut vis gravitatis, hoc ut velocitas ac proinde ut resistentia in medio temporis cui respondet pars assumpta, ergo alternando, area singuli trapezii est ad vim gravitatis ut portio trapezii supra B H ad resistentiam sive ad velocitatem in medio temporis cui respondet trapezium, sed areæ totæ trapeziorum sunt ubique æquales, et vis gravitatis semper eadem, constans ergo est eorum ratio; ergo, portiones trapeziorum super B H, ut r l m s sunt sicut resistentiæ sive ut velocitates, adeóque ut spatia singulis tempusculis quibus respondent descripta.

([o]) * *Atquè ideò descriptis spatiis analogæ.* Spatia enim singulis temporibus descripta sunt ut velocitates per Prop. II. hujusce libri.

spatium r l n t. Q. e. d. Et (p) similis est demonstratio motûs expositi in ascensu. Q. e. d.

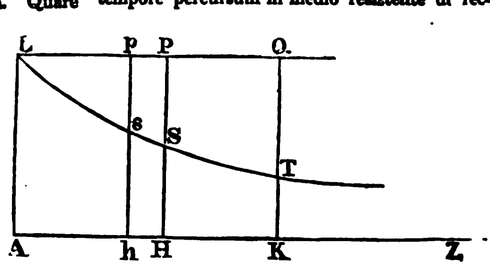
(p) *Et similis est demonstratio.* Resolvatur enim rectangulum D B in rectangula innumera D k, K l, L m, M n, &c. quæ sint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta, et erunt, nihil, D k, D l, D m, D n, &c.




ut velocitates totæ amissæ in principio singulorum temporum æqualium. Quia igitur totum rectangulum D B, exponit (per hyp.) velocitatem corporis et resistentiam medii velocitati proportionalem initio ascensus, rectangula A E, A k, A l, A m, A n, &c. exponent velocitates residuas, resistentiasque medii initio singulorum temporum æqualium. Fiat A C, ad A K, sive rectang. A H ad rectang. A k, ut vis gravitatis ad resistentiam principio temporis secundi, et vi gravitatis addatur resistentia (quod gravitas et resistentia corporis ascendentis motum retardent) et erunt D E H C, K k H C, L l H C, M m H C, &c., ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum retardatur, atquè ideò (per Mot. Leg. 2. vel per not. 18.) ut decrementa velocitatum, id est, ut rectangula D k, K l, L m, M n, &c., et propterea (per Lem. I. Lib. II.) in progressione geometricâ. Quarè si rectæ K k, L l, M m, N n, &c., occurrant hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ D G q k, k q r L, L r s M, M s t N, &c. æquales, ideóque tum temporibus, tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ.

Erigatur in medio partis D K perpendicularis usque ad E B, erit area D G q K ad aream G E k q ut pars ejus perpendicularis ad hyperbolam ordinata ad ejus partem reliquam usque ad E B, sed (per Theor. IV. de Hyperbola,) ea ordinata ad hyperbolam est ad A B sive ad totam perpendicularem, ut A C ad ejus ordinatæ abscissam, ideóque dividendo, est ea ordinata ad perpendicularis partem reliquam usque ad lineam E B, sive est area D G q K ad aream G E k q ut A C ad portionem abscissæ inter A et perpendicularem, et assumptâ communi altitudine A B, ut rectangulum A H ad rectangulum sub A B et portione abscissæ inter A et perpendicularem, ideóque area D G q K ad aream G E k q ut vis gravitatis ad resistentiam sive velocitatem residuam in medio temporis primi, cùmque vis gravitatis sit ubique eadem et areæ D G q K, q K L r, ubique æquales, areæ G E k q, k q r l, &c. erunt semper ut resistentiæ in singulis temporibus sive ut velocitates, ideóque ut spatia singulis tempusculis descripta, ac per consequens areæ totæ G E n t, erunt ut spatia toto tempore G D N t descripta, dum areæ A B N n erunt ut velocitates in fine eorum temporum residuæ.

51. Si asymptoto A Z descripta sit logarithmica quævis L S T, ad asymptotum versus Z accedens, et ordinata A L exponat velocitatem corporis initio motûs, abscissæque A H, A K, exponant tempora; erunt (50) ordinatæ H S, K T, ut velocitates residuæ elapsis temporibus A H, A K, et ideò ductâ per punctum L rectâ L Q, asymptoto A Z parallelâ, et ordinatas productas H S, K T secante in P, Q, erunt P S, Q T ut velocitates amissæ, atquè etiam ut spatia descripta, temporibus A H, A K, vel L P, L Q. Ductâ ordinatâ, h s, alteri H S, infinitè propinquâ, spatium velocitate uniformi A L, tempusculo h H descriptum in vacuo, erit ad spatium eodem tempore cum velocitate H S, confectum in medio resistente, ut rectangulum H P × H h, ad rectangulum S H × H h, seu aream H S s h (12) et ideò si totum tempus A H in particulas innumeras ut h H divisum sit, erit spatium cum velocitate A L, in vacuo descriptum toto tempore A H, ad spatium eodem tempore percursum in medio resistente ut rec-




tangulum A P ad aream logarithmicam A L S H; sed area A L S H, æqualis est rectangulo subtangentis logarithmicæ in P S, (39) et ideò si

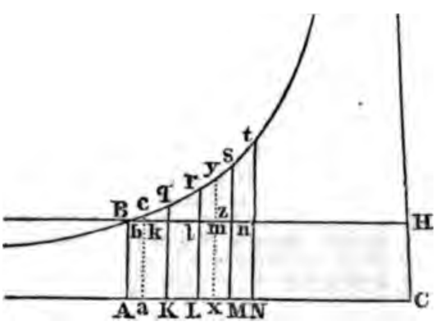
*Corol.* 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo potest acquirere, est ad velocitatem dato quovis tempore acquisitam, ut vis data gravitatis, quâ corpus illud perpetuò urgetur, ad vim resistentiæ, quâ (q) in fine temporis illius impeditur.

*Corol.* 2. Tempore autem aucto in progressione arithmeticâ, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis in ascensu, atque etiam earundem differentia in descensu (r) decrescit in progressione geometricâ.

*Corol.* 3. (s) Sed et differentiæ spatiorum, quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur, decrescunt in eâdem progressione geometricâ.

assumpta sit A L subtangenti æqualis, est area A L S H, æqualis rectangulo A L × P S; Quarè in hâc hypothesi, erit spatium prius ad posterius ut L P, ad P S.

(q) * *In fine temporis illius impeditur.* Est enim velocitas dato tempore, A B r L acquisita, ad velocitatem alio quovis tempore A B t N acquisitam, ut rectangulum A l ad rectangulum A n, sivè ut linea data A L, ad lineam A N, (ex




dem.), et ideò velocitas corporis cadentis cum areâ A B t N, seu cum tempore continuò crescit. Sed coincidentibus puncto N cum puncto C et ordinatâ N t cum asymptoto C H, area A B t N infinita evadit, hoc est, tempus fit infinitum et velocitas maxima; Quarè velocitas maxima quæ etiam *terminalis* dicitur, est ad velocitatem dato quovis tempore A B r L, acquisitam ut A C ad A L, seu ut rectangulum A H, ad rectangulum A l, hoc est, (ex dem.) ut vis gravitatis ad vim resistentiæ in fine temporis A B r L.

(r) * *Decrescit in progressione geometricâ.* In ascensu corporis temporibus D G q K, D G r L, D G s M, &c. in arithmeticâ progressione crescentibus, abscissæ C D, C K, C L, &c. in progressione geometricâ decrescunt (380. Lib. I.) sed singulæ abscissæ illæ sunt (ex dem.) ut summa velocitatis maximæ quam exponit linea C A, et velocitatis residuæ quam exponit linea A K vel A L, vel A M, &c., in fine temporis D G q K, vel D G r L, vel D G s M, &c. Quarè tempore aucto in progressione arithmeticâ, summa velocitatis maximæ ac velocitatis in ascensu residuæ decrescit in progressione geometricâ. Simili modo in descensu corporis patet quod crescentibus temporibus (vid. fig. notæ super.) A B q K, A B r L, A B s M, &c., in progressione arithmeticâ, abscissæ C A, C K, C L, C M, &c., decrescunt in progressione geometricâ (380. Lib. I.), sed abscissæ illæ sunt ut differentiæ velocitatis maximæ quam exhibet linea A C et velocitatis acquisitæ quam exponit linea A K, vel A L, vel A M, &c., crescente igitur tempore in progressione arithmeticâ, differentia velocitatis maximæ, et velocitatis dato quovis tempore in descensu acquisitæ, decrescit in progressione geometricâ. Hinc si summa illa in ascensu et differentia in descensu numeris exprimantur, erunt tempora ut eorum numerorum logarithmi.

(s) * *Sed et differentiæ spatiorum.* Nam si in ascensu corporis capiantur tempora D G q K, K q r L, L r s M, M s t N, &c. (*vid. fig. prim. pag. præced.*) æqualia, erit spatium primo tempore descriptum ut G E k q = D K × D E — D G q K; spatium tempore secundo descriptum ut q k l r = K L × D E — K q r L (sive quia K q r L = D G q K) = K L × D E — D G q K, et ità de cæteris. Quarè differentia spatiorum primo et secundo tempore descriptorum est ut D K × D E — K L × D E, id est, ob datam D E, ut D K — K L; et simili argumento differentia spatiorum secundi et tertii temporis est ut K L.— L M; differentia spatiorum tertii et quarti temporis ut L M — M N. Erunt igitur differentiæ spatiorum quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur ut differentiæ D K — K L, K L — L M, L M — M N, &c., sed (ex dem.) termini D K, K L, L M, M N, &c., decrescunt ut termini progressionis geometricæ D C, K C, L C, M C, &c. Ergò differentiæ D K — K L, K L — L M, L M — M N, &c., decrescunt ut D K, K L, L M, M N, &c., seu ut termini progressionis geometricæ D C, K C, L C, M C, &c. Eadem est demonstratio pro descensu.

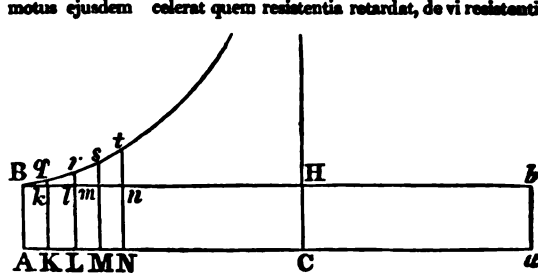
*Corol.* 4. Spatium verò a corpore descriptum differentia est duorum spatiorum quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio descensus, et (t) alterum ut velocitas, quæ etiam ipso (u) descensûs initio æquantur inter se.

(t) * *Alterum ut velocitas.* Nam spatium tempore quovis A B t N, in descensu descriptum, est ut area B t n, est autem area B t n = A B t N — A B n N, et est A B n N ut velocitas tempore A B t N acquisita.

(u) * *Descensûs initio æquantur.* Descensûs initio est area nascens A B q K æqualis rectangulo A B k K.

52. *Scholium.* Ex demonstratis non solùm corporis ascendentis aut e quiete descendentis motus determinatur, sed etiam motus ejusdem datâ cum velocitate deorsum projecti facilè inveniri potest. Nam velocitas projectionis vel æqualis est velocitati maximæ, quam in figuris superioribus exponit linea A C, sive rectangulum A H, aut velocitate maximâ minor est, aut eâ major. Si 1um. motus corporis deorsum verticaliter projecti æquabilis est, ob resistentiam gravitati æqualem et contrariam. Si 2um. in lineâ A C (vid. fig. Prop. III.) capiatur A L, ad A C, ut velocitas projectionis data ad maximam, sive ut resistentia ad gravitatem, et tempore quovis L r t N, corpus describet, spatium l r t n, et in fine illius temporis habebit velocitatem L l n N, eodem modo ac si e quiete cadendo tempore A B r L, acquisivisset datam projectionis velocitatem A B l L, et deindè in motu perseveraset.

53. Verùm si velocitas projectionis major sit velocitate maximâ quam corpus cadendo acquirere potest, mutanda erit Newtoni constructio. Cæteris enim manentibus ut in constructione pro corporum descensu, producantur rectæ A C, et B H, ad a et b, ut sit rectangulum A B b a ad rectangulum C H b a, ut resistentia tota initio motus ad vim gravitatis: velocitas projectionis exponi poterit per rectangulum A B b a, cùm resistentia sit ipsi semper proportionalis, et corpus descendendo tempore quovis A B t N, describet spatium A B b a × A N + C a × B t n, et velocitatem habebit N n b a, et tempore infinito describet spatium infinitum, velocitatemque habebit æqualem terminali sive maximæ velocitati quam corpus e quiete cadendo acquirere potest. Resolvatur enim rectangulum A H in rectangula innumera A k, K l, L m, M n, &c. quæ sint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta. (cùm enim resistentia gravitatem superet, velocitas decrescit) et erunt, nihil, A k, A l, A m, A n, &c. ut velocitates amissæ, et ideò rectangula a B, a k, a l, a m, a n, &c., ut velocitates residuæ resistentiis proportionales, principio singulorum temporum æqualium. Quoniam verò gravitas motum accelerat quem resistentia retardat, de vi resistentiæ

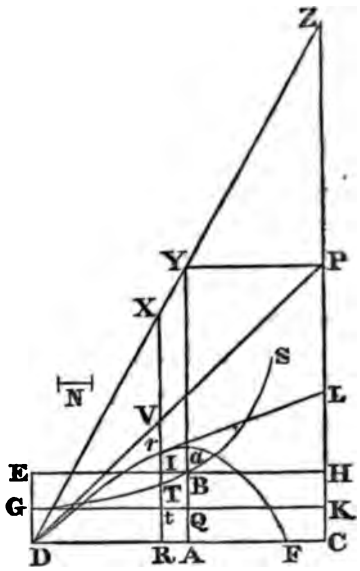



subducatur gravitas C H b a, et manebunt rectangula A B H C, K k H C, L l H C, M m H C, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum æqualium retardatur, atque ideò ut decrementa velocitatum, id est, ut rectangula A k, K l, L m, M n, et propterea per Lem. I. Lib. II. in progressione geometricâ. Quarè (380. Lib. I.) erunt areæ A B q K, K q r L, L r s M, M s t N, &c. æquales, ideóque temporibus semper æqualibus analogæ. Elapso igitur tempore quovis A B t N, corporis velocitas residua erit ut rectangulum N n b a, sive ut recta N a, sed spatia sunt ut velocitas et tempus conjunctim, ergo spatia singulis tempusculis descripta, sunt ut ea velocitas N a ducta in tempus M s t N, id est ut N C × t N × M N + C a × t N × M N = A B H C × M N + C a × M s t N, (ob N C × t N = A B × C A, per Theor. IV. de Hyp.) Quarè (componendo) spatium totum tempore A B t N descriptum, erit ut A B H C × A N + C a × A B t N = A B b a × A N + C a × B t n, ob A B t N = A B × A N + B t n. Q. e. d.

## PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

*Posito quod vis gravitatis in medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem, resistentiam velocitati proportionalem patientis.*

E loco quovis D egrediatur projectile secundum lineam quamvis rectam D P, et per longitudinem D P exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto P ad lineam horizontalem D C ([x]) demittatur perpendiculum P C, et secetur D C in A, ut ([y]) sit D A ad A C ut resistentia medii, ex motu in altitudinem sub initio orta, et vim gravitatis; vel ([z]) (quod perindè est) ut sit rectangulum sub D A et D P ad rectangulum sub A C et C P ut resistentia tota sub initio motus ad vim gravitatis. Asymptotis D C, C P describatur hyperbola quævis G T B S secans perpendicula D G, A B in G et B; et compleatur parallelogrammum D G K C cujus latus G K secet A B in Q. Capiatur linea N in ratione ad Q B quâ D C sit ad C P; et ad rectæ D C punctum quodvis R erecto perpendiculo R T, quod hyperbolæ in T, et rectis E H, G K, D P in I, t et V occurrat; in eo cape V r æqualem $\frac{\text{t G T}}{\text{N}}$, vel ([a]) quod perindè est, cape R r æqualem



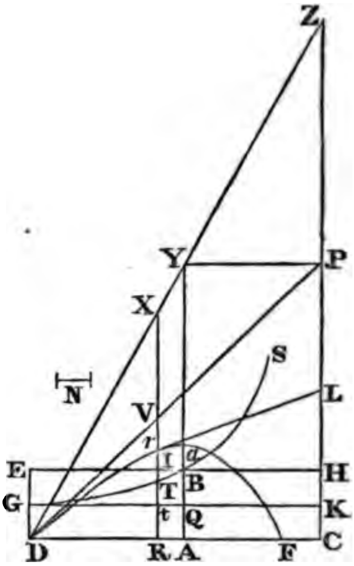

([x]) * *Demittatur perpendiculum P C*, et quoniam D P exponit velocitatem projectionis C P exponet velocitatem verticalem, et D C velocitatem horizontalem, per Leg. Motûs Cor. 1. et 2.

([y]) * *Ut sit D A ad A C ut resistentia*, &c., sunt, quod idem est (per Cor. 1. Prop. III.) ut sit D A ad A C ut velocitas verticalis C P ad velocitatem maximam seu terminalem.

([z]) * *Vel (quod perindè est) ut sit rectangulum*, &c. Nam cùm sit D P ad C P ut velocitas tota projectionis ad velocitatem verticalem, ac proindè ex lege resistentiæ ut resistentia tota sub initio ad resistentiam ex motu in altitudinem, et cùm sit D A ad A C ut resistentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis (per hypothesim), erit per compositionem rationum et ex æquo D A $\times$ D P ad A C $\times$ C P ut resistentia tota ex motu projectionis ad vim gravitatis.

([a]) * *Vel quod perindè est, cape R r æqualem*, &c. Cùm enim sit (per hyp.) N : Q B = D C : C P, et D C : C P = D R : R V, ob triangula similia D R V, D C P; erit N : Q B = D R : R V, et ideo R V = $\frac{\text{D R} \times \text{Q B}}{\text{N}}$. Sed rectangulum G E I t = G t $\times$ G E =

$\frac{GTIE}{N}$; et projectile tempore D R T G perveniet ad punctum r, describens curvam lineam D r a F, quam punctum r semper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendiculo A B, et postea semper appropinquans ad asymptoton P C. Estque velocitas ejus in puncto quovis r ut curvæ tangens r L. Q. e. i.




Est enim N ad Q B ut D C ad C P seu D R ad R V, ideóque R V æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, et R r (id est R V — V r seu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$)([b]) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream R D G T, et (per Legum Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum ascensus, alterum ad latus. Et cùm resistentia sit ut motus, ([c]) distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales et contrarias: ideóque longitudo, a motu ad latus descripta, erit (per Prop. II. hujus) ([d]) ut linea D R, ([e]) altitudo verò (per Prop. III. hujus) ut area D R × A B — R D G T,

D R × Q B = G T I E + t G T, et ideo $\frac{GTIE}{N} = \frac{DR \times QB - tGT}{N} = RV - \frac{tGT}{N}$. Quare si capiatur V r $= \frac{tGT}{N}$, erit $\frac{GTIE}{N} = RV - Vr = Rr$.

([b]) * *Æqualis* $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$ &c. Est enim $\frac{DR \times AB - RDGT}{N} = \frac{DR \times RI - RDGT}{N} = \frac{GTIE}{N} = RV - Vr$.

([c]) * *Distinguetur etiam hæc*, &c. In eâ, quam tractamus, resistentiæ hypothesi motus componere ac dividere licet eodem modo quo componuntur et dividuntur in vacuo; quod in aliis resistentiæ hypothesibus fieri non potest. Cùm enim resistentia velocitati proportionalis est, spatia velocitatibus separatis et conjunctis eodem temporis momento describenda vi resistentiæ minuuntur in eâdem quam habent inter se ratione.

([d]) * *Ut linea D R.* Exponitur enim corporis velocitas horizontalis sub motûs initio per lineam D C. Unde tempus exponi poterit per aream hyperbolicam D R T G, et spatium hoc tempore descriptum per lineam D R, per Cor. Prop. II. hujus.

([e]) * *Altitudo verò*, &c. Cùm enim sit D A ad A C ut resistentia verticalis ad gravitatem (per hyp.); area G T I E, seu ei æqualis D R × A B — R D G T, erit ut altitudo motu verticali descripta (per Prop. III. hujus); et quia (per construct.) est R r $= \frac{DR \times AB - RDGT}{N}$, ideóque ob datum N, R r ut D R × A B — R D G T, erit altitudo ut R r.

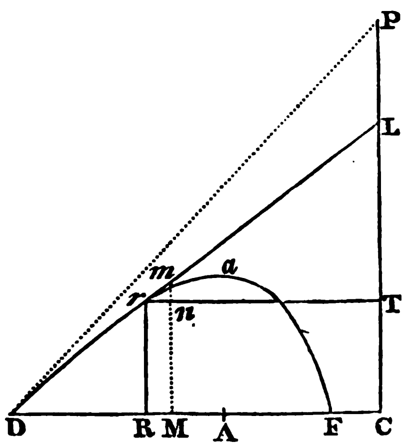
hoc est, ut linea R r. Ipso autem motus initio area R D G T (f) æqualis est rectangulo D R × A Q, ideóque linea illa R r (seu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc est ad D R ut A B— A Q seu Q B ad N, id est, ut C P ad D C; atque ideo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cùm igitur R r semper sit ut altitudo, ac D R semper ut longitudo, atque R r ad D R sub initiò ut altitudo ad longitudinem: necesse est ut R r semper sit ad D R ut altitudo ad longitudinem, et propterea ut corpus moveatur in linea D r a F, quam punctum r (g) perpetuò tangit. Q. e. d.

(f) * *Æqualis est rectangulo*, &c. Nam coincidente puncto t cum G, evanescit T t respectu R t seu A Q, fitque area evanescens R D G T æqualis R D G t seu D R × A Q.

(g) 54. *Perpetuo tangit.* Quoniam autem D A est ad A C ut resistentia ex motu verticali sub initio orta ad vim gravitatis, tempus totius ascensûs corporis erit D A B G (per Prop. III. hujus), quo etiam tempore percurrit corpus longitudinem D A, et ideò ad maximam suam altitudinem a perveniet ubi erit in perpendiculo A B a, et postea semper appropinquat ad asymptoton P C (per Cor. Prop. II.) Per punctum quodvis trajectoriæ r agatur r T horizontali D C parallela et verticali C P occurrens in T, verticalis M m ipsi R r infinitè propinqua secet r T in n et tangentem r L seu curvam in m: et quoniam motus corporis in loco r per arcum r m dividi potest in motum horizontalem r n et verticalem n m, erit velocitas horizontalis ad verticalem ut r n ad n m, et ad obliquam secundum tangentem curvæ ut r n ad r m. Sed ob similitudinem triangulorum r n m, r T L, est r n : m n = r T vel R C : T L, et r n : r m = R C : r L. Quare cum R C sit ut velocitas horizontalis corpori in loco r residua ex velocitate D C quam sub initio motus habebat in loco D (per Cor. Prop. II.); erit T L ut velocitas verticalis corpori residua ex velocitate initiali C P, et r L ut velocitas obliqua in arcu r m ex duabus r T et T L composita. Est itaque velocitas et proinde resistentia corporis in puncto quovis trajectoriæ r ut curvæ tangens r L.

55. Hinc per datum trajectoriæ punctum r duci potest tangens r L. Nam velocitas verticalis L T in loco r est ad velocitatem verticalem C P in loco D, ut rectangulum R B ad rectangulum D B (vide figuram textûs) sive ut R A ad D A (per Prop. II.); ideóque $L T = \frac{CP \times RA}{DA}$.

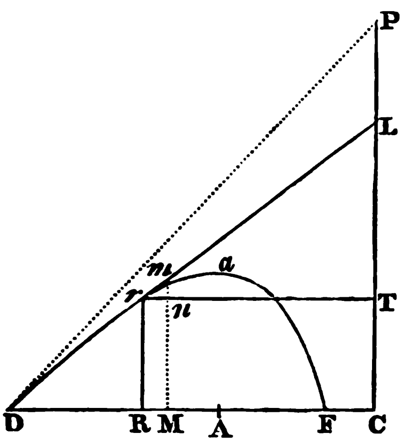
56. Ex superiori constructione facilè deducitur æquatio ad trajectoriam D r a F. Positis enim D P = b, D C = e, C P = f, A C = g, A B = h, R r = y, et D R = x, erit (per Theor. 4um. de Hyperb. Lib. I.) D C (e) : A C (g) = A B (h) : G D = $\frac{gh}{e}$, et R C (e — x) : A C (g) = A B (h) : R T = $\frac{gh}{e-x}$, ideóque Q B = A B — G D = $\frac{eh - gh}{e}$, et areæ hyperbolicæ R D G T elementum nascens R T × d x = $\frac{ghdx}{e-x}$, ac proinde area R D G T = g h. S. $\frac{dx}{e-x}$, Præterea (per constr.) est




C P (f) : D C (e) = Q B $\frac{(eh - gh)}{e}$ : N = $\frac{eh - gh}{f}$, et R r = y = $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Est et D R × A B = h x. Quare erit y = $\frac{fx}{e-g} - \frac{fg}{e-g} \times S. \frac{dx}{e-x}$. Est etiam (per constr.) D A seu e — g ad A C seu g ut resistentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis, et ideò per Cor. I. Prop. III. ut *velocitas*

*Corol.* 1. Est igitur R r æqualis $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$: ideóque si producatur R T ad X ([h]) ut sit R X æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$; id est, si compleatur parallelogrammum A C P Y, jungatur D Y secans C P in Z, et producatur R T donec occurrat D Y in X; erit X r æqualis $\frac{RDGT}{N}$, et propterea tempori proportionalis.

*verticalis*, quam exponit recta C P seu f, ad *velocitatem terminalem*; et ideò si velocitas terminalis exponatur per lineam a, habebitur $a = \frac{fg}{e-g}$. Unde fit $y = \frac{ax}{g} - a.\ S.\ \frac{dx}{e-x}$ et sumptis fluxionibus $dy = \frac{a\,dx}{g} - \frac{a\,dx}{e-x}$. Si ponatur R C sive $e - x = z$, erit $-dx = dz$, et $-\frac{a\,dx}{e-x} = \frac{a\,dz}{z}$, ideóque $-a.\ S.\frac{dx}{e-x} = a.\ S.\ \frac{dz}{z} = a.\ L.\ z = a.\ L.\ \overline{e-x}$ (40.) Quare erit $y = \frac{ax}{g} + a.\ L.\ \overline{e-x} + Q$ const. Et quia evanescente y, evanescit quoque x, invenitur constans $Q = -a.\ L.\ e$, et hinc $y = \frac{ax}{g} + a.\ L.\ \overline{e-x} - a.\ L.\ e = \frac{ax}{g} - a.\ L.\ \frac{e}{e-x}$. Est enim $L.\ e - L.\ \overline{e-x} = L.\ \frac{e}{e-x}$, et signis mutatis $L.\ \overline{e-x} - L.\ e = -L.\ \frac{e}{e-x}$.




57. Ex hac æquatione alia deducitur inter D V et V r. Si enim dicantur D V $= v$ et V r $= z$, erit ob triangula D C P, D R V similia, D P (b) : D V (v) = D C (e) : D R (x) $= \frac{ev}{b}$, et ideò $e - x = \frac{eb - ev}{b}$ et $\frac{e}{e-x} = \frac{b}{b-v}$; similiter erit D C (e) : C P (f) = D R $\left(\frac{ev}{b}\right)$ : V R $= \frac{fv}{b}$, ideóque $y = Rr = VR - Vr = \frac{fv}{b} - z$. Quare habebitur $\frac{fv}{b} - z = \frac{aev}{bg} - a.\ L.\ \frac{b}{b-v}$, et $z = \frac{fgv - aev}{bg} + a.\ L.\ \frac{b}{b-v}$. Sed (ex demonstr.) $a = \frac{fg}{e-g}$, atque ideò $ae - ag = fg$, et $fg - ae = -ag$; quare erit etiam $z = a.\ L.\ \frac{b}{b-v} - \frac{av}{b}$.

([h]) • *Ut sit R X æqualis* $\frac{DR \times AB}{N}$, &c. Hoc enim facto, erit R X ad D R ut data A B ad datam N, ideóque locus punctorum X linea recta quæ transit per punctum D, ubi evanescente D R evanescit quoque R X. Coincidente puncto R cum A fit R X seu A Y : D A = A B : N, et (per Theor. IV. de Hyperb.) D C : A C = A B : G D seu A Q; et divisim D C : D A = A B : B Q, per constructionem vero C P : D C = B Q : N, ideóque ex æquo C P : D A = A B : N = A Y : D A, ac proinde A Y = C P. Unde si compleatur parallelogrammum A C P Y, jungaturque D Y secans C P in Z, erit D Z linea recta quam punctum X perpetuò tangit. Quoniam igitur R X $= \frac{DR \times AB}{N}$, et X r = R X − R r $= \frac{DR \times AB}{N} - \frac{DR \times AB + RDGT}{N}$; erit X r $= \frac{RDGT}{N}$, et propterea, ob datam N, X r est ut area R D G T, ideóque ut tempus quo corpus ex loco D pervenit in locum r.

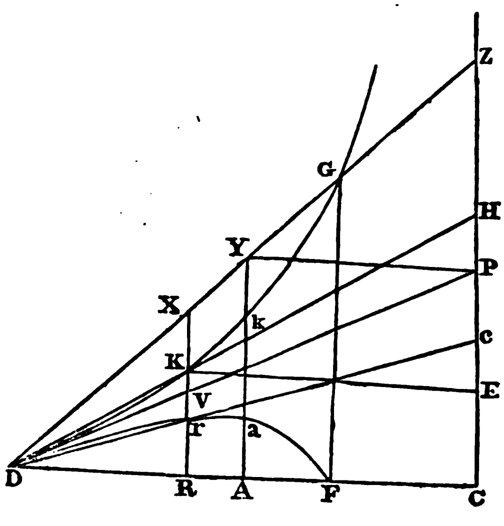
*Corol.* 2. Unde si capiantur innumeræ C R, vel, quod perindè est, innumeræ Z X in progressione geometricâ; erunt totidem X r (l) in progressione arithmeticâ. Et hinc curva D r a F (k) per tabulam logarithmorum facile delineatur.

(l) * *In progressione arithmeticâ.* Nam (380. Lib. I.) temporibus seu areis R D G T in progressione arithmeticâ crescentibus, abscissæ R C in progressione geometricâ decrescunt, et vice versâ. Quare verticalibus X r, quæ sunt ut areæ R D G T, in progressione arithmeticâ crescentibus, correspondentes abscissæ R C decrescent in progressione geometricâ, et contra. Sed ob triangulorum D R X, D C Z similitudinem, est D C ad D Z ut D R ad D X, et divisim ut R C ad Z X: quare ob datas D C et D Z, est Z X ad R C in datâ ratione, et ideò Z X crescit vel decrescit in eâdem ratione cum R C.

(k) 58. *Per tabulam logarithmorum facilè delineatur.* Dicantur enim, ut suprà n. 56. D C $=$ e, C P $=$ f, A C $=$ g, a $= \frac{f\,g}{e-g}$, D R $=$ x, R r $=$ y; et erit (56) $y = \frac{a\,x}{g} - a\,L\,\frac{e}{e-x}$. Ob triangula D A Y, Y P Z similia, est D A seu e $-$ g ad A Y vel C P seu f, ut Y P vel A C seu g ad P Z, ideóque P Z $= \frac{f\,g}{e-g} =$ a. Triangula similia D R X, Y P Z dant etiam Y P seu g ad P Z seu a, ut D R seu x ad R X, et propterea R X $= \frac{a\,x}{g}$. Unde cùm sit R C $=$ e $-$ x, æquatio $y = \frac{a\,x}{g} - a \times L.\,\frac{e}{e-x}$ fiet R r $=$ R X $-$ P Z $\times$ L. $\frac{D\,C}{R\,C}$ Verùm cum P Z. L. $\frac{D\,C}{R\,C}$ sit logarithmus rationis D C ad R C in logarithmica cujus subtangens est a sive P Z, dicendo ut subtangens tabularum ad P Z, ita L. $\frac{D\,C}{R\,C}$ e tabulis desumptus ad ejusdem quantitatis logarithmum in logarithmicâ cujus subtangens est P Z. Invenietur itaque P Z $\times$ L. $\frac{D\,C}{R\,C}$ ope tabulæ vulgaris logarithmorum, et inde obtinebitur R r ordinata ad trajectoriam D r a F, et sic punctum quodlibet r in illa determinabitur.

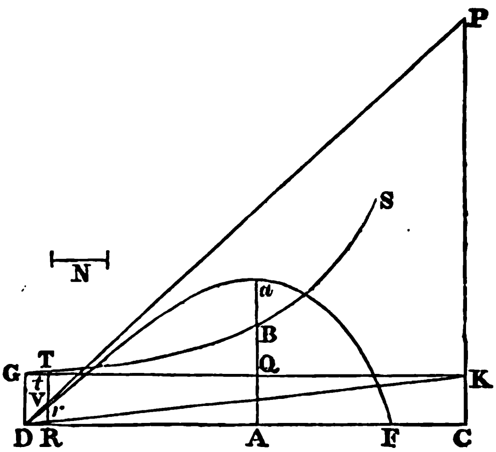
59. Ex his simplicissima deducitur trajectoriæ D r a F per logarithmicam constructio. Iisdem enim positis quæ in Corollario 1° hujus præscripta sunt, asymptoto C Z et subtangente P Z describatur per punctum D logarithmica D K k G secans R X in K. Capiatur X r $=$ R K, seu R r $=$ X K, et punctum r erit in trajectoriâ quæsitâ D r a F. Nam si ex puncto K ducatur ad C Z perpendiculum K E, erit C E seu R K logarithmus rationis D C ad K E vel R C (34), ideóque erit (58) R r $=$ R X $-$ R K $=$ X K, et hinc R K $=$ R X $-$ R r $=$ X r. Q. e. d.

60. Hæc constructio hoc etiam commodi habet, quod statim inveniantur altitudo maxima A a et horizontalis amplitudo D F. Est enim A a $=$ Y k; et si ex puncto G intersectionis logarithmicæ cum lineâ D Z demittatur ad D C perpendiculum G F, erit D F amplitudo Jactûs: nam coincidente X cum G fit X K seu R r $=$ o, et ideò coincidit punctum r cum R in horizontali D C. Pariter punctum r, quo trajectoria D r a F rectam quamlibet D c ex puncto D ad C Z ductam secat, invenitur, si capiatur C H æqualis c Z, jungatur D H logarithmicam secans in K, et ex puncto K demittatur ad D C perpendiculum K R, quod lineam D c secabit in puncto quæsito r; erit enim R K : C H seu Z c $=$ D r : D c $=$ X r : Z c, ideóque X r $=$ R K.

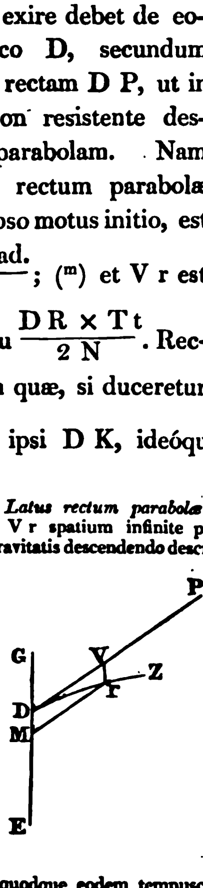



61. Quoniam velocitas projectionis est ad velocitatem terminalem, quæ data est, ut D P ad P Z (58); si manet velocitas projectionis et linea D P, manebit quoque logarithmicæ subtangens P Z; et ideò una eademque logarithmicæ species describendæ trajectoriæ D r a F sufficiet, utcumque mutetur projectionis angulus P D C.

*Corol.* 3. Si vertice D, diametro D G deorsum productâ, et latere recto quod sit ad 2 D P ut resistentia tota ipso motus initio ad vim gravitatis, parabola construatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco D secundum rectam DP, ut in medio uniformi resistente describat curvam D r a F, ea ipsa erit quâcum exire debet de eodem loco D, secundum eandem rectam D P, ut in spatio non resistente describat parabolam. Nam (l) latus rectum parabolæ hujus, ipso motus initio, est $\frac{\text{D V quad.}}{\text{V r}}$; (m) et V r est $\frac{\text{t G T}}{\text{N}}$ seu $\frac{\text{D R} \times \text{T t}}{2\ \text{N}}$. Recta autem quæ, si duceretur, hyperbolam G T S tangeret in G, (n) parallela est ipsi D K, ideóque T t est $\frac{\text{C K} \times \text{D R}}{\text{D C}}$, et N erat $\frac{\text{Q B} \times \text{D C}}{\text{C P}}$.




(l) 62. *Latus rectum parabolæ hujus*, &c. Est enim V r spatium infinite parvum quod corpus vi gravitatis descendendo describit in medio resistente, quodque eodem tempusculo dato describeret in medio non resistente (6). Sed corpus in medio non resistente projectum vi gravitatis describeret arcum parabolæ D r, cujus tangens D P, diameter G D E, abscissa D M = V r, ordinata M r æqualis et parallela D V (40. Lib. I.), et (per Theor. I. de Parabola Lib. I.) rectangulum sub latere recto et abscissâ D M seu V r æquatur quadrato ordinatæ M r seu D V. Quare latus rectum parabolæ hujus ipso motus initio est $\frac{\text{D V}^2}{\text{V r}}$.

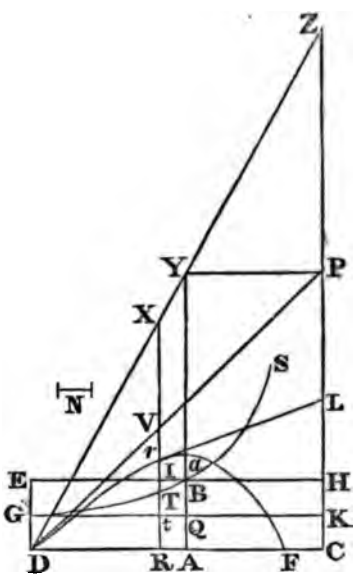



(m) * *Et Vr est* $\frac{t\ G\ T}{N}$ (per constr.) *seu* $\frac{DR \times Tt}{2\ N}$, evanescente enim D R seu G t, triangulum t G T fit $\frac{1}{2}$ G t $\times$ T t = $\frac{1}{2}$ D R $\times$ T t, et hinc $\frac{\text{t G T}}{\text{N}} = \frac{\text{D R} \times \text{T t}}{2\ \text{N}}$.

(n) * *Parallela est ipsi D K*, ob K C = D G, et subtangentem hyperbolæ æqualem abscissæ D C (per Theor. I. de Hyp. Lib. I.). Cum autem evanescit G T t, fit T t ad t G seu D R ut ordinata G D seu C K ad subtangentem, sive ad D C, et ideò T t = $\frac{\text{C K} \times \text{D R}}{\text{D C}}$. Et N erat $\frac{\text{Q B} \times \text{D C}}{\text{C P}}$ (per constr.). Quare si loco N et T t, hi valores substituantur in quantitate $\frac{\text{D R} \times \text{T t}}{2\ \text{N}}$ = V r, invenietur V r = $\frac{\text{D R}^2 \times \text{C K} \times \text{C P}}{2\ \text{D C}^2 \times \text{Q B}}$.

Et propterea V r est $\frac{DRq \times CK \times CP}{2\,DCq \times QB}$, id est (ob proportionales D R et D C, D V et D P) $\frac{DVq \times CK \times CP}{2\,DPq \times QB}$ et latus rectum $\frac{DV\ quad.}{Vr}$ prodit $\frac{2\,DPq \times QB}{CK \times CP}$, (o) id est (ob proportionales Q B et C K, D A et A C) $\frac{2\,DPq \times DA}{AC \times CP}$, ideóque ad 2 D P, ut D P × D A ad C P × A C; (p) hoc est, ut resistentia ad gravitatem. Q. e. d.

*Corol.* 4. Unde si corpus de loco quovis D, datâ cum velocitate, secundum rectam quamvis positione datam D P projiciatur; et resistentia medii ipso motûs initio detur: inveniri potest curva D r a F, quam corpus idem describet. Nam ex datâ velocitate (q) datur latus rectum parabolæ, ut notum est. Et sumendo 2 D P ad latus illud rectum, ut est vis gravitatis ad vim resistentiæ, datur D P. Dein secando D C in A, ut sit C P × A C ad D P × D A in eâdem illâ ratione gravitatis ad resistentiam, dabitur punctum A. (r) Et inde datur curva D r a F.




*Corol.* 5. Et contra, si datur curva D r a F, dabitur et velocitas corporis et resistentia medii in locis singulis r. (s) Nam ex datâ ratione C P × A C ad

(o) * *Id est ob proportionales Q B et C K, D A et A C*, &c. Nam (per Theor. IV. de Hyp.) A B est ad G D (sive A Q vel C K) ut D C ad A C, et divisim Q B est ad C K ut D A ad A C, id est $\frac{QB}{CK} = \frac{DA}{AC}$.

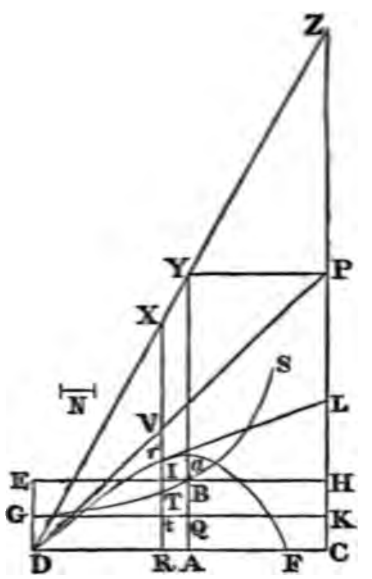
(p) * *Hoc est, ut resistentia ad gravitatem*, per construct. Probl. II.

(q) * *Datur latus rectum parabolæ*, &c. Datâ velocitate secundum directionem tangentis D P, datur tum spatium finitum in medio non resistente tempore dato æquabiliter descriptum, tum ex effectu cognito gravitatis in tempore dato, habetur spatium verticale finitum V r eodem tempore vi gravitatis descriptum, id est, dantur ordinata et abscissa parabolæ, quibus datis datur illius latus rectum (per Theor. I. de Parab.)

(r) * *Et inde datur curva D r a F*, non solum constructione per hyperbolam, sed etiam constructione illâ quæ per logarithmicam absolvitur (59.) Nam inventâ D P, sumenda est logarithmicæ subtangens P Z ad D P in ratione gravitatis ad resistentiam sub initio motûs; et ideò logarithmicæ subtangens P Z erit etiam ad D P ut 2 D P ad latus rectum parabolæ.

(s) * *Nam ex datâ ratione C P × A C ad D P × D A*, id est (per constr.) ratione gravitatis ad re-

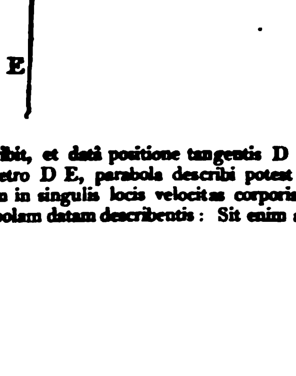
D P × D A, datur tum resistentia medii sub initio motus, tum latus rectum parabolæ: (r) et inde datur etiam velocitas sub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis r L, datur et huic proportionalis velocitas, et velocitati proportionalis resistentia in loco quovis r.




*Corol.* 6. Cum autem longitudo 2 × D P sit ad latus rectum parabolæ ut gravitas ad resistentiam in D; et ex auctâ velocitate augeatur resistentia in eâdem ratione, (s) at latus rectum parabolæ augeatur in ratione illâ duplicatâ: (t) patet longitudinem 2 D P augeri in ratione illâ simplici, ideóque velocitati semper proportionalem esse, neque ex angulo C D P mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoque velocitas.

sistentiam totam sub motus initio, dabitur resistentia, ob datam gravitatem (per Hyp.); et quia C P × A C est ad D P × D A ut 2 D P ad latus rectum parabolæ (per Cor. 3.), dabitur illud latus rectum.

(r) * 63. *Et inde datur etiam velocitas sub initio motûs.* Nam dato latere recto parabolæ D r Z, quam grave in medio non resistente

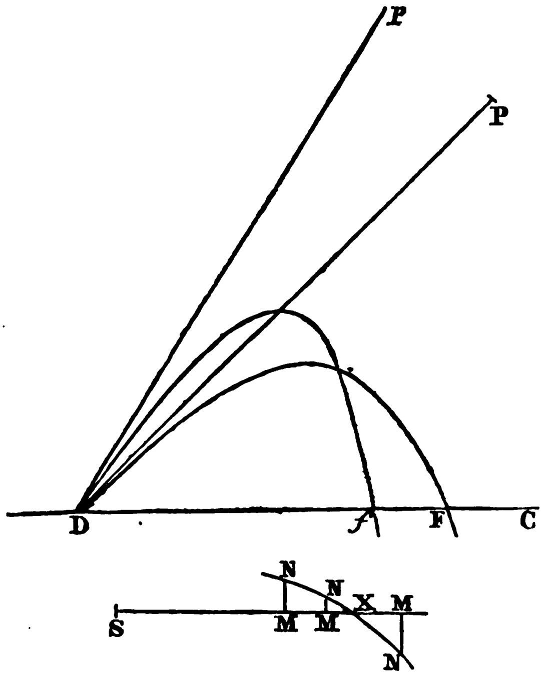



describit, et datâ positione tangentis D P cum diametro D E, parabola describi potest; datur autem in singulis locis velocitas corporis gravis parabolam datam describentis: Sit enim abscissa D M verticali V r æqualis et parallela, et ordinata M r etiam æqualis et parallela tangenti D V; datur tum velocitas quam corpus grave e puncto V cadendo per altitudinem datam V r habet in r, tum tempus quo altitudinem illam describit, et hinc datur tempus idem quo motu uniformi describit spatium datum D V (40. Lib. I.), ideóque datur velocitas uniformis per tangentem D P, quæ est ipsa velocitas projectionis in D.

(s) * *At latus rectum parabolæ augeatur.* Nam cum velocitas secundum tangentem D V uniformis supponatur (40. Lib. I.); Si, dato tempore quo describitur D V, velocitas illa crescat, crescet D V in eadem ratione, manente spatio verticali V r hoc eodem tempore dato descripto; sed latus rectum parabolæ D r Z est $\frac{DV^2}{Vr}$ (per Cor. 3.) et quantitas $\frac{DV^2}{Vr}$ manente V r, crescit ut $DV^2$. Quare latus rectum parabolæ D r Z augetur in ratione duplicatâ velocitatis.

(t) * *Patet longitudinem 2 D P, &c.* Gravitas dicatur G, resistentia initio motûs R, latus rectum parabolæ, ut suprà, $\frac{DV^2}{Vr}$; et erit 2 D P : $\frac{DV^2}{Vr}$ = G : R, ideóque $2\,DP = \frac{G \times DV^2}{R \times Vr}$, hoc est, datis V r et G, 2 D P est ut $\frac{DV^2}{R}$, et quia R est ut velocitas, seu ut D V, erit etiam

*Corol.* 7. Unde liquet methodus determinandi curvam D r a F ex phænomenis quamproximè, et inde colligendi resistentiam et velocitatem quâcum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia et æqualia

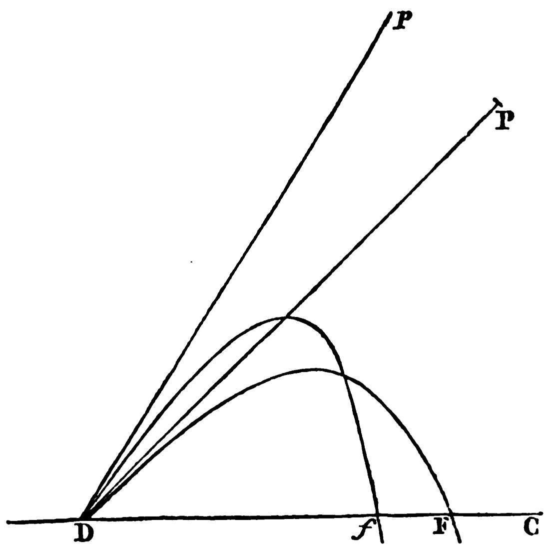


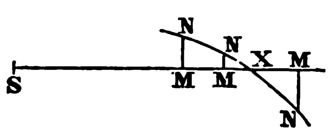

eâdem cum velocitate, de loco D, secundum angulos diversos C D P, C D p et cognoscantur loca F, f, ubi incidunt in horizontale planum D C. Tum, assumptâ quâcunque longitudine pro D P vel D p, fingatur quod resistentia in D sit ad gravitatem in ratione quâlibet, et exponatur ratio illa per longitudinem quamvis S M. (y) Deinde per computationem, ex longitudine illâ assumptâ D P, inveniantur longitudines D F, D f, ac de

2 D P ut D V, sive ut velocitas (per notam superiorem).

(y) 64. *Deinde per computationem.* Datâ enim D P longitudine et positione, dantur C P et D C, et datâ ratione resistentiæ in D ad gravitatem dantur D A et A C per constructionem problematis istius: His autem datis, curva D r a F (vide figuras superiores) describi potest, et hinc invenitur amplitudo horizontalis D F constructione per hyperbolam vel per logarithmicam (59.) Si autem rem voluerimus calculo tractare, uti poterimus æquatione $y = \frac{a\,x}{g} - a.\ L.\ \frac{e}{e - x}$ (63) in qua ut sit $x = D\,F$, ponenda est $y = o$, et æquatio fiet $\frac{a\,x}{g} = L.\ \frac{e}{e - x}$, ex quâ per regressum serierum, vel per alias approximationes invenietur x per g et e, seu D F per A C et D C.

ratione $\frac{F f}{D F}$, per calculum inventâ, (z) auferatur ratio eadem per experimentum inventa, et exponatur differentia per perpendiculum M N. Idem




fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem S M, et colligendo novam differentiam M N. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ S M, et negativæ ad alteram; et per puncta N, N, N agatur curva regularis N N N secans rectam S M M M in X, (a) et erit S X vera ratio resistentiæ ad gravitatem,

(z) 65. *Auferatur ratio eadem per experimentum inventa;* et si nihil est residui, recte assumpta fuit ratio resistentiæ ad gravitatem; si quid residui fuerit, *exponatur differentia per M N.* Nam si recte assumpta fuit ratio resistentiæ ad gravitatem, curva D r a F per constructionem vel per computationem descripta similis est trajectoriæ quam corpus in medio resistente reverâ describit, et hinc homologarum in illis curvis linearum debet esse ratio data. Determinatur enim trajectoria vera ex velocitate et angulo projectionis æquali P D C vel p D C, atque ex ratione resistentiæ ad gravitatem datam; et curva per constructionem delineata determinatur per longitudinem assumptam D P vel D p, quæ velocitatem datam semper potest exhibere, per angulum P D C vel p D C, et per rationem linearum D A, A C, seu rationem resistentiæ ad gravitatem, si recte assumpta fuit: quare differentia tota inter veram trajectoriam et curvam hoc modo per constructionem descriptam est in magnitudine linearum homologarum, quarum ratio est eadem in utrâque curvâ. Curvæ igitur illæ similes sunt.

(a) 66. *Et erit S X vera ratio resistentiæ ad gravitatem.* Nam ubi M N seu differentia rationum $\frac{F f}{D F}$, quæ per computationem et per experimentum inventæ sunt, nulla est, ratio re-

quam invenire oportuit. (b) Ex hac ratione colligenda est longitudo D F per calculum; et longitudo quæ sit ad assumptam longitudinem D P, ut longitudo D F per experimentum cognita ad longitudinem D F modo inventam, erit vera longitudo D P. Quâ inventâ, habetur tum curva linea D r a F quam corpus describit, tum corporis velocitas et resistentia in locis singulis.

## *Scholium.*

Cæterum, resistentiam corporum esse in ratione velocitatis, (†) hypothesis est magis mathematica quam naturalis. In mediis, quæ rigore omni vacant, resistentiæ corporum sunt in duplicatâ ratione velocitatum. (c) Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; ideóque tempore æquali, ob majorem medii quantitatem perturbatam, communicatur motus in duplicatâ ratione major; estque resistentia (per Motûs

sistentiæ ad gravitatem recte assumpta fuit (65). Quare cum S M assumptam illam rationem exponat, et evanescat M N ubi S M fit S X, patet in hoc casu rationem resistentiæ ad gravitatem recte exponi per lineam S X. Itaque si innumeræ abscissæ S M assumptæ fuissent, et innumeræ ordinatæ N M per experimenta determinatæ, curva quam punctum N perpetuò tangit, rationem accuratam resistentiæ ad gravitatem determinaret per ejus intersectionem X cum lineâ S M; ideóque si multa fiunt tentamina, sicque plura obtineantur puncta N, et per ea ducatur curva regularis N N X N, illa quam proxime punctum X quæsitum determinabit; methodum autem ducendi curvam regularem per plura puncta data mox in Scholio sumus traditauri.

(b) **Ex hac ratione colligenda est*, &c. Sit, exempli causâ, ratio assumpta resistentiæ ad gravitatem 1 ad 10, seu S M $= \frac{1}{10}$; inventa autem sit S X $= 2$ S M $= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$; erit resistentia ad gravitatem ut 1 ad 5. Ex hac ratione et assumptâ longitudine D P colligenda est longitudo D F seu amplituda jactûs (64); et quoniam inventâ verâ ratione resistentiæ ad gravitatem, trajectoria per calculum vel per constructionem inventa similis est trajectoriæ quam corpus in medio resistente, reverâ describit (65), erit amplitudo D F per calculum inventa ad amplitudinem D F per experimentum cognitam, ut assumpta longitudo D P ad veram longitudinem D P pro trajectoriâ in medio resistente descriptâ. Hâc autem longitudine inventâ, habetur (per Cor. 4.) tum curva linea D r a F quam corpus reipsâ describit, tum corporis velocitas et resistentia in locis singulis (per Cor. 5.)

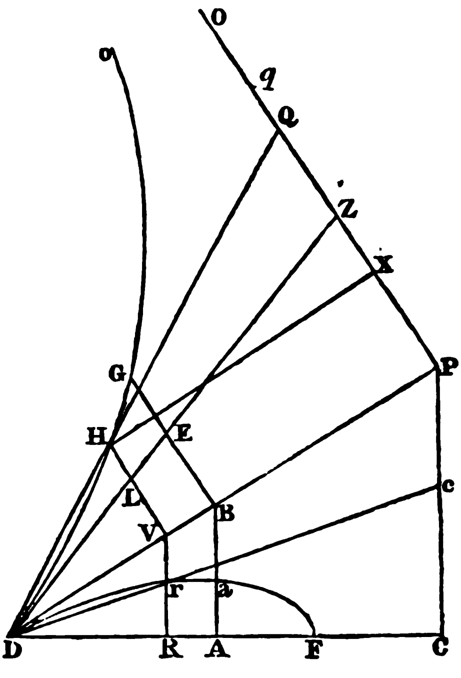
(†) 67. Ex supra demonstratis determinari possent motus corporis in medio quod resistit partim uniformiter, partim in ratione velocitatis. Et quidem si corpus solâ vi insitâ in hoc medio feratur, pars illa resistentiæ quæ est uniformis, tanquam vis constans gravitatis quâ corporis ascendentis motus retardatur, consideranda est, et in superioribus constructionibus pro corporis ascensu, non gravitas, sed ea resistentia uniformis data per lineam A C, vel per rectangulum A H exponi debet. Si vero corpus in prædicto medio vi gravitatis etiam urgeatur, linea A C gravitatem et resistentiæ partem uniformem simul junctas, si corpus ascendit, et excessum gravitatis supra eam resistentiæ partem uniformem, si corpus descendit, exponet. Qua ratione cæteris manentibus, determinabuntur motus corporis tum solâ vi insitâ moti, tum vi gravitatis urgente ascendentis et descendentis in medio quod resistit partim in ratione datâ, partim in ratione velocitatis, tum etiam corporis projecti.

(c) *Etenim actione*, &c. Hæc patent per demonstrata (8).

68. *Scholium*. Ex æquatione ad curvam D r a F, quam (57) invenimus, deducitur hujus curvæ per logarithmicam satis elegans constructio, quâ usi sunt Varignonius et Hermannus. Eam hic exponemus breviter. Deinde cum in superioris propositionis Corollario ultimo et alibi postea describenda sit curva regularis quæ per data puncta transeat, hoc problema, quod Newtonus in Epistolâ ad Oldenburgum anno 1676. datâ unum fere ex pulcherrimis dicit quod solvere desideraverit, solvemus.

Leg. II. et III.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hâc lege resistentiæ.

69. Iisdem positis quæ in superiori constructione Newtoni, sit D P = b, D V = v, V r = z, et D P ad a ut velocitas projectionis ad velocitatem terminalem; et erit (57) $z = a. L. \frac{b}{b-v} - \frac{av}{b}$. Oportet curvam D r a F ex hac æquatione per logarithmicam construere. In rectâ P O ad D P normali capiatur P Z = a,



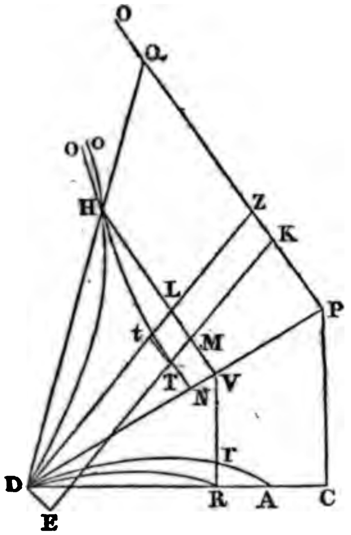

asymptoto P O et subtangente P Z describatur per punctum D logarithmica D H o, cujus D Z erit tangens, et per punctum quodvis V in linea D P agatur V H parallela P O logarithmicæ occurrens in H et tangenti D Z in L, capiaturque verticalis V R pars V r æqualis H L. Punctum r erit in trajectoria quæsitâ D r a F. Nam ducto ex H ad P O perpendiculo H X, erit (per construct.) V P = H X = b − v, P Z = a, et hinc $P X = H V = P Z \times L. \frac{DP}{HX} = a. L. \frac{b}{b-v}$ (34.) Et ob triangula D V L, D P Z similia, D P (b) : P Z (a) = D V (v) : $V L = \frac{av}{b}$. Quare erit $H V - L V = a. \times L. \frac{b}{b-v} - \frac{av}{b} = z = V r$. Q. e. d.

70. *Corol.* 1. Si per punctum A Newtoni constructione determinatum erigatur verticalis A B secans D P in B, et per B erigatur ad D P perpendiculum B G secans D Z in E et logarithmicam in G, capiaturque B a æqualis G E, erit A a maxima altitudo jactûs.

71. *Corol.* 2. Punctum r quo trajectoria rectam D c ex D ductam ad P C, secat, invenitur, si in lineæ Z O capiatur Z Q æqualis P c, jungatur D Q logarithmicam secans in H, demittatur ex H ad D P, perpendiculum H V, et ex V ad D C perpendiculum V R, quod rectam D c secabit in puncto quæsito r, atque hinc determinatur etiam horizontalis amplitudo D F, capiendo Z Q æqualem P c, et reliqua perficiendo ut modò diximus. Nam ob parallelas V r et P c, H V et Q P, est P c : V r = P D : D V = D Z : D L = Q Z : H L; sed (per constr.) Q Z = P c : ergo V r = H L, ideóque punctum r est in trajectoria D r a F (69.)

72. Ex demonstratis inveniri potest angulus elevationis P D C, sub quo corpus datâ velocitate D P projectum transibit per punctum r in verticali V R datum. Dicantur D R = c, R r = e, D Z = f, D L = x, H L = V r = z, V R = z + e = y; et ob triangula D L V, D Z P similia erit D Z (f) : D P (b) = D L (x) : $D V = \frac{bx}{f}$, et ob angulum D R V rectum $D V^2 = D R^2 + V R^2$, hoc est, $\frac{bbxx}{ff} = cc + yy$, æquatio ad hyperbolam, cujus diameter transversa est $\frac{2.cf}{b}$, diameter conjugata 2 c, abscissa a centro sumpta x, et ordinata y seu z + e, ut calculo inito liquet. Inde autem deducitur hæc constructio. Per punctum D ducatur infra lineam D P recta D E parallela P Z et æqualis R r, per E agatur E K parallela D Z secans H V in M; et erit L M = D E = R r = e, ideóque H M = z + e = y, atque E M = D L = x, et proinde centrum hyperbolæ est in E; cumque semidiameter transversa sit $\frac{cf}{b} = \frac{DR \times DZ}{DP}$, si capiatur in linea D P pars D N æqualis D R, et per punctum N erigatur ad D P perpendiculum N T, secans E K in T et D Z in t, erit D P ad D Z

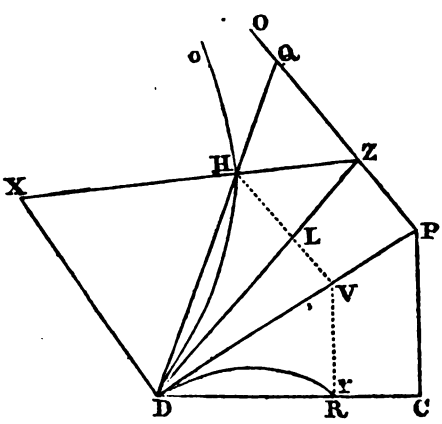
ut D N seu D R ad D t seu E T, ideóque E T $= \frac{D R \times D Z}{D P}$, et propterea E T semidiameter transversa, E M abscissa, et M H ordinata




hyperbolæ T H o, cujus semidiameter conjugata æquatur D R. Hæc itaque hyperbola occursu suo cum logarithmica D H o determinabit punctum H, ex quo si demittatur ad D P perpendiculum H V secans D Z in L, dabuntur D V et H L æqualis V r, ideóque dabitur etiam V R = V r + R r. His autem datis, datur angulus elevationis P D C, cujus sinus est V R, posito sinu toto D V.

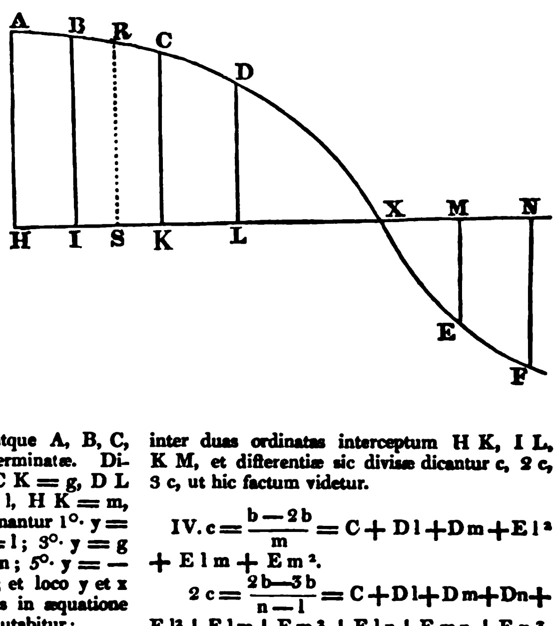
73. Si vero quæratur angulus projectionis P D C, ut corpus per punctum R in horizontali D C datum transeat, fiet R r = e = o, et æquatio ad hyperbolam evadet $\frac{b b x x}{f f} = c c + z z$, ob $y = z + e = z$. In constructione vero coincidet punctum E cum puncto D, et T cum t, cæteris manentibus ut supra. Et quia si per hyperbolæ et logarithmicæ intersectionem H ducatur recta D H secans P O in Q, est Q Z = P C (71.); liquet in eo casu esse Q Z sinum anguli elevationis P D C, existente radio seu sinu toto D P. Observandum porro est, quod si in his constructionibus hyperbola logarithmicam nusquam attingat, problema est impossibile, quod si eam bis secet, anguli duo satisfaciunt. Patet quoque datam semper esse rationem diametrorum hyperbolæ, ubicumque situm sit punctum r, vel R; est enim D R ad $\frac{D R \times D Z}{D P}$ in ratione datâ D P ad D Z.

74. Angulus elevationis P D C maximæ omnium amplitudini horizontali conveniens ita determinatur. Per punctum D ducatur D X ipsi D P perpendicularis quæ sit ad D P ut est D P ad P Z; jungatur Z X logarithmicam secans in H, et ex D per H ducatur recta D H secans P O in Q; erit Q Z sinus anguli quæsiti, existente sinu toto D P. Sit enim D R amplitudo horizontalis maxima = c, D V = v, V R = V r = z, et erit ob angulum D R V rectum $v v - z z = c c$, et sumptis fluxionibus $2 v d v - 2 z d z = 2 c d c = o$ (48), ideóque $v d v = z d z$. Sed (69.) $z = a L \frac{b}{b - v} - \frac{a v}{b} = a L b - a L \overline{b - v} - \frac{a v}{b}$, et sumptis fluxionibus $d z = \frac{a d v}{b - v} - \frac{a d v}{b} = \frac{a v d v}{b b - b v}$. Quare erit $z d z = \frac{a z v d v}{b b - b v} = v d v$, et ideò $a z = b b - b v$, ac proinde D P (b) : P Z (a) = H L (z) : P V (b — v); verum ob triangulum D V L, D P Z similitudinem est D P : D Z = P V : Z L; unde per compositionem rationum et ex æquo $D P^2 : P Z \times D Z = H L : Z L$, et quia $D P^2 = D X \times P Z$ (per constr.), erit D X : D Z = H L : L Z. Quapropter punctum H per æquationem $a z = b b - b v$ determinatum perpetuo tangit lineam rectam X Z; cumque idem punctum in logarithmica esse oporteat ut determinetur maxima amplitudo D R, si per intersectionem H rectæ X Z et logarithmicæ D H o ducatur recta D Q secans P O in Q, habebitur Q Z sinus anguli P D C (73) maximæ amplitudini D R convenientis. Q. e. d.




75. Jam si oporteat curvam regularem describere per data quotlibet puncta transeuntem, uti possumus generali methodo, quam Newtonus in arithmeticâ universali tradidit, quamque deinde

in problematis 55, 58 et 61. adhibuit. Hæc sunt ipsius verba: Cum curva non datur specie, sed determinanda proponitur, possisque pro arbitrio æquationem fingere quæ naturam ejus generaliter contineat, et hanc pro eâ designandâ tanquam si daretur assumere, ut ex ejus assumptione quomodocumque perveniatur ad æquationes ex quibus assumpta tandem determinetur. Si itaque curva generis dati per data puncta delineanda sit, assumatur generalis ad curvam illam æquatio cum terminorum coëfficientibus indeterminatis, et curvâ ad rectam aliquam positione datam relatâ, ex singulis punctis datis in rectam illam demittantur perpendiculares aut rectæ aliæ inter se parallelæ, quæ datæ erunt ut et earum abscissæ a dato in rectâ illâ puncto computatæ; deinde in assumptâ æquatione loco abscissæ variabilis x et ordinatæ etiam variabilis y scribantur abscissæ et ordinatæ per puncta data determinatæ, et tot inde obtinebuntur æquationes quot sunt puncta data per quæ curva transire debet, atque ex illis æquationibus, generalis æquationis assumptæ coëfficientes determinabuntur. Hujus methodi exemplum sit solutio Lemmatis V. Lib. III. Principiorum, quod ita propositum est: invenire curvam generis parabolici quæ per data quotcumque puncta transibit; cujus Lemmatis solutionem dedit ibidem Newtonus, sed sine demonstratione quæ tamen ex ejusdem auctoris differentiali methodo collegi potest.




76. I. Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. et ab iisdem ad rectam quamvis positione datam H N demittantur perpendicula quotcumque A H, B I, C K, D L, E M, F N, &c.; positisque abscissâ variabili H S = x, et ordinatâ R S = y, assumatur generalis ad parabolam A B D E F æquatio $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$, &c., sintque A, B, C, D, E, &c. cum suis signis indeterminatæ. Dicantur A H = a, B I = f, C K = g, D L = h, M E = − k, et H I = l, H K = m, H L = n, H M = t, &c. Ponantur 1°. y = a et x = o; 2°. y = f, et x = l; 3°. y = g et x = m; 4°. y = h, et x = n; 5°. y = − k, et x = t atque ita deinceps; et loco y et x seorsim substituantur hi valores in æquatione generali assumota, quæ in has mutabitur:

$$\text{II. } a = A$$
$$f = A + Bl + Cl^2 + Dl^3 + El^4 +, \text{\&c.}$$
$$g = A + Bm + Cm^2 + Dm^3 + Em^4 +, \text{\&c.}$$
$$h = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4 +, \text{\&c.}$$
$$-k = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 +, \text{\&c.}$$

Subducantur æquationes inferiores ex superioribus, nimirum secunda ex primâ, tertia ex secundâ, et ita deinceps. Differentia primæ ac secundæ ordinatæ per primum intervallum H I divisa dicatur b, id est, $b = \frac{a - f}{l}$; secundæ ac tertiæ differentia per secundum intervallum I K divisa dicatur 2 b, id est, $2b = \frac{f - g}{m - l}$, et ita de cæteris. Prodibunt æquationes sequentes.

$$\text{III. } b = \frac{a - f}{l} = -B - Cl - Dl^2 - El^3$$
$$2b = \frac{f - g}{m - l} = -B - Cl - Cm - Dl^2 - Dlm - Dm^2 - El^3 - El^2m - Elm^2 - Em^3$$
$$3b = \frac{g - h}{n - m} = -B - Cm - Cn - Dm^2 - Dmn - Dn^2 - Em^3 - Em^2n - Emn^2 - En^3$$
$$4b = \frac{h + k}{t - n} = -B - Cn - Ct - Dn^2 - Dnt - Dt^2 - En^3 - En^2t - Ent^2 - Et^3.$$

Simili modo capiantur adhuc æquationum istarum differentiæ, et dividantur per intervallum inter duas ordinatas interceptum H K, I L, K M, et differentiæ sic divisæ dicantur c, 2 c, 3 c, ut hic factum videtur.

$$\text{IV. } c = \frac{b - 2b}{m} = C + Dl + Dm + El^2 + Elm + Em^2.$$
$$2c = \frac{2b - 3b}{n - l} = C + Dl + Dm + Dn + El^2 + Elm + Em^2 + Eln + Emn + En^2.$$
$$3c = \frac{3b - 4b}{t - m} = C + Dm + Dn + Dt + Em^2 + Emn + En^2 + Emt + Ent + Et^2.$$

Harum æquationum differentiæ per intervalla trium ordinatarum H L, I M, divisæ dicantur d, 2 d, et erunt æquationes.

$$\text{V. } d = \frac{c - 2c}{n} = -D - El - Em - En$$

$$2d = \frac{2c - 3c}{t - l} = -D - El - Em - En - Et$$

Harum tandem æquationum differentia per intervallum quatuor ordinatarum H M divisa dicatur e, et erit

$$\text{VI. } e = \frac{d - 2d}{t} = E.$$

Si plura fuissent puncta data, pluresque ideò fuissent æquationes, eodem modo pergendum esset usque ad differentiam ultimam: quæ hic est differentia quarta, et sic tandem pervenitur ad valorem coëfficientis ultimi termini æquationis generalis assumptæ, et deinde retrogrediendo inveniuntur valores aliarum coëfficientium D, C, B, et A hoc modo.

VII. Quoniam $e = E$, et (V) $d = -D - El - Em - En$, erit $D = -d - el - em - en$; et quia (IV.) est $c = C + Dl + Dm + El^2 + Elm + Em^2$ ideóque $C = c - Dl - Dm - El^2 - Elm - Em^2$ si loco E et D substituantur eorum valores modo inventi, habebitur $C = c + dl + dm + elm + enl + emn$. Et simili modo si in æquatione (III.) $b = -B - Cl - Dl^2 - El^3$, substituantur coëfficientium E, D, C valores, invenietur $B = -b - cl - dlm - elmn$.

VIII. Cum igitur sit (II.) $A = a$, æquatio assumpta $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$, in hanc abit $y = a - x.(b + cl + dlm + elmn) + x^2.(c + dl + dm + elm + enl + emn) - x^3.(d + el + em + en) + ex^4 = a - bx - clx + cx^2 - dlmx + dlx^2 + dmx^2 - dx^3 - elmnx + elmx^2 + enlx^2 + emnx^2 - elx^3 - emx^3 - enx^3 + ex^4$, seu $y = a + b.(-x) + c.(-x \times \overline{l-x}) + d.(-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x}) + e.(-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} \times \overline{n-x}) +$, &c. In quâ æquatione patet terminorum progressus, et quomodo datâ abscissâ H S seu x inveniri compendiosè possit correspondens ordinata S R seu y. Nam si dicantur $-x$ seu $-HS = p$; $-IS \times p$, seu $-x \times \overline{l-x} = q$; $+SK \times q$, seu $-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} = r$; $+SL \times r$, seu $-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} \times \overline{n-x} = s$, ita scilicet pergendo ad usque perpendiculum penultimum, quod hic est D L; erit R S seu $y = a + bp + cq + dr + es +$, &c.

IX. Atque hæc ipsa est regula quam Newtonus casu secundo Lemmatis V. Lib. III. sic tradit: collige perpendiculorum A H, B I, C K, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas b, 2 b, 3 b, 4 b, &c.; secundas per intervalla bina divisas c, 2 c, 3 c, 4 c, &c.; tertias per intervalla terna divisas d, 2 d, 3 d, &c.; quartas per intervalla quaterna divisas e, 2 e, &c. Et sic deinceps. Inventis differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum. Et erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es +$, &c. ubi observandum est, præponenda esse signa negativa terminis H S, I S, &c. qui jacent ad partes puncti S versus A, et signa affirmativa terminis S K, S L, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S.

X. Per hanc igitur regulam, assumptâ quâlibet abscissâ H S, invenietur valor ordinatæ correspondentis S R, singulaque parabolæ puncta determinabuntur. Si vero in æquatione ponatur $y = o$, et deinde quæratur valor abscissæ x, cognoscetur punctum X quo parabola rectam H N intersecat.

77\. XI. Si perpendiculorum H A, I B, K C, L D, &c. æqualia sunt intervalla H I, I K, K L, &c.; cæteris ut supra (I) nominibus servatis, positoque intervallo $HI = l = 1$, erunt $HK = m = 2$, $HL = n = 3$, $HM = t = 4$, &c. et perpendiculorum differentiæ per intervalla, per intervalla bina, terna, quaterna, et divisæ erunt (III., IV., V., VI.) quæ secuntur.

Differentiæ primæ per intervalla divisæ, $b = a - f$, $2b = f - g$, $3b = g - h$, $4b = h + k$.

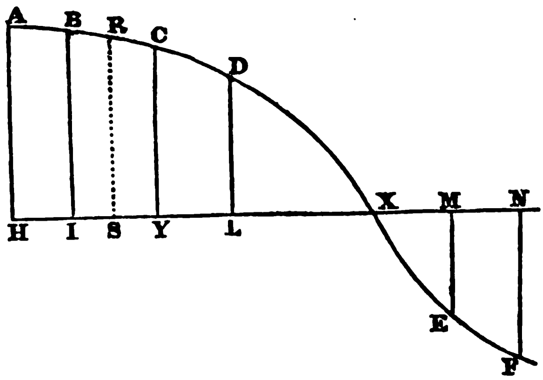
Differentiæ secundæ per intervalla bina divisæ, $c = \frac{a - 2f + g}{2}$, $2c = \frac{f - 2g + h}{2}$, $3c = \frac{g - 2h - k}{2}$.

Differentiæ tertiæ per intervalla terna divisæ, $d = \frac{a - 3f + 3g - h}{6}$, $2d = \frac{f - 3g + 3h + k}{6}$.

Differentiæ quartæ per intervalla quaterna divisæ, $e = \frac{a - 4f + 6g - 4h - k}{24}$.

XII. Ponantur $a - f = \beta$, $a - 2f + g = \kappa$, $a - 3f + 3g - h = \delta$, $a - 4f + 6g - 4h - k = \iota$; et erit $b = \beta$, $c = \frac{\kappa}{2}$, $d = \frac{\delta}{6}$, $e = \frac{\iota}{24}$. Quare si hi valores substituantur in æquatione supra (VIII.) inventa, $y = a + b.(-x) + c.(-x \times \overline{l-x}) + d(-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x}) + e.(-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} \times \overline{n-x}) +$, &c., illa in hanc mutabitur $y = a + \beta(-x) + \frac{\kappa(-x \times \overline{1-x})}{2} + \frac{\delta.(-x \times \overline{1-x} \times \overline{2-x})}{2 \times 3} + \frac{\iota.(-x \times \overline{1-x} \times \overline{2-x} \times \overline{3-x})}{2 \times 3 \times 4} +$, &c.

Quapropter si in hâc ultimâ æquatione dicantur $-$ H.S, seu $-x = p$; $\frac{1}{2}p$ in $-$ I S, seu $\frac{-x \times \overline{1-x}}{2} = q$; $\frac{1}{3}q$ in $+$ S K, seu $\frac{-x \times \overline{1-x} \times \overline{2-x}}{2 \times 3} = r$; $\frac{1}{4}r$ in $+$ S L, seu $\frac{-x \times \overline{1-x} \times \overline{2-x} \times \overline{3-x}}{2 \times 3 \times 4} = s$; et ita pergatur ad usque perpendiculum penultimum, erit $y = a + \beta p + \kappa q + \delta r + \epsilon s +$, &c. ut Newtonus in casu primo Lemmatis V. Lib. III. determinavit. De hoc problemate lector consulat clarissimos auctores, Herman-




num in Appendice ad Phoronomiam, Craigium in Tractatu de Calculo Fluentium, maximè vero Stirling in libro de interpolatione serierum, in quo totam hanc materiam copiosè et sagaciter explicat.

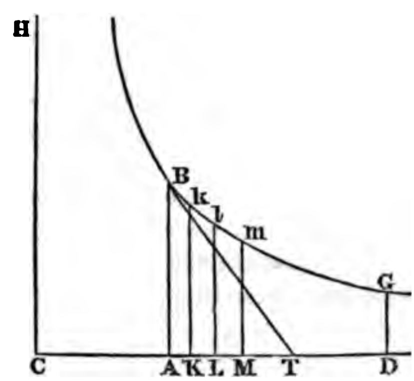
# SECTIO II.

## *De motu corporum quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatum.*

### PROPOSITIO V. THEOREMA III.

*Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicatâ, et idem solâ vi insitâ per medium similare movetur; tempora verò sumantur in progressione geometricâ a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eâdem progressione geometricâ inversè; et quod spatia sunt æqualia, quæ singulis temporibus describuntur.*

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis est resistentia medii, (d) et resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis; si tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum singulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ A K, K L, L M, &c. in rectâ C D sumptæ, et erigantur perpendicula A B, K k, L l, M m, &c. hyperbolæ B k l m G, centro C asymptotis rectangulis C D, C H descriptæ, occurrentia in B, k, l, m, &c. (e) et erit A B ad K k ut C K ad C A, et divisim A B — K k ad K k ut A K ad C A, et vicissim A B — K k ad A K ut K k ad C A, ideóque ut A B × K k ad A B × C A. (f) Unde, cùm A K et A B × C A dentur, erit A B — K k ut

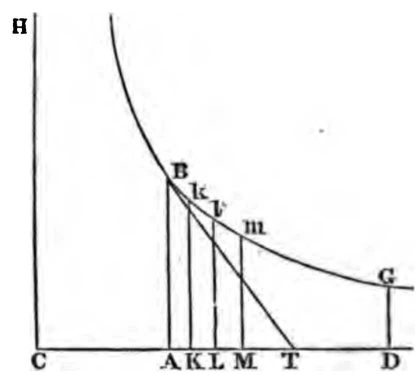



(d) * *Et resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis*; dato nempe temporis momento, (1. 15.).

(e) * *Et erit A B ad K k ut C K ad C A*, (per Theor. IV. de Hyp.).

(f) * *Unde, cùm A K, et A B × C A dentur.* A K quidem (ex Hyp. tempus enim in particulas innumeras æquales dividitur quæ per lineas æquales A K, K L, &c. exponuntur) et A B × C A (per Theor. IV. de Hyp.).

A B × K k; et ultimo, ubi coëunt A B et K k, ut A B q. Et simili argumento erunt K k — L l, L l — M m, &c. ut K k quad. L l quad. &c. Linearum igitur A B, K k, L l, M m quadrata sunt ut earundem differentiæ; et idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipsarum differentiæ, ([g]) similis erit ambarum progressio. ([h]) Quo demonstrato, consequens est etiam ut areæ his lineis descriptæ sint in progressione consimili cum spatiis quæ velocitatibus describuntur. Ergo si velocitas initio primi temporis A K exponatur per lineam A B, et velocitas initio secundi K L per lineam K k, et longitudo primo tempore descripta per aream A K k B; velocitates omnes subsequentes exponentur per lineas subsequentes L l, M m, &c. et longitudines descriptæ per areas K l, L m, &c. Et compositè, si tempus totum exponatur per summam partium suarum A M, longitudo tota descripta exponetur per summam partium suarum A M m B. Concipe jam tempus A M ita dividi in partes A K, K L, L M, &c. ut sint C A, C K, C L, C M, &c. in progressione geometricâ; ([i]) et erunt partes illæ in eâdem progressione, ([k]) et velocitates A B, K k, L l, M m, &c. in progressione eâdem inversâ, ([l]) atque spatia descripta A k, K l, L m, &c. æqualia. Q. e. d.




*Corol.* 1. Patet ergo quod, si tempus exponatur per asymptoti partem quamvis A D, et velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam A B; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam D G, et spatium totum descriptum per aream hyperbolicam adjacentem A B G D;

([g]) * *Similis erit ambarum progressio;* et ideò velocitates singulis temporum æqualium A K, K L, L M, &c. initiis exponi possunt per lineas A B, K k, L l, &c.

([h]) * *Quo demonstrato, consequens est ut areæ* A B k K, K k l L, L l m M, &c. *sint in progressione consimili cum spatiis quæ velocitatibus* A B, K k, L l, &c., tempusculis A K, K L, L M, &c., *describuntur* (14).

([i]) 78. * *Et erunt partes illæ* A K, K L, L M, &c. quæ sunt differentiæ linearum C A, C K, C L, C M, &c. in eâdem progressione. Differentiæ enim cujusvis progressionis geometricæ, sunt in eâdem progressione geometricâ. Nam cum sit C A : C K = C K : C L = C L : C M, &c., erit auferendo antecedentia ex antecedentibus et consequentia ex consequentibus C A : C K = A K : K L = K L : L M, &c.

([k]) * *Et velocitates A B, K k, L l, M m, &c., in progressione eâdem inversâ.* Siquidem (per Theor. IV. de Hyp.) est A B ut C A, inversè, K k ut C K inversè.

([l]) * *Atque spatia descripta,* A B k K, K k l L, L l m M, &c., æqualia (380. Lib. I.)

necnon spatium, quod corpus aliquod eodem tempore A D, velocitate primâ A B, in medio non resistente describere posset, ([m]) per rectangulum A B × A D.

*Corol.* 2. Unde datur spatium in medio resistente descriptum, capiendo illud ad spatium quod velocitate uniformi A B in medio non resistente simul describi posset, ut est area hyperbolica A B G D ad rectangulum A B × A D.

*Corol.* 3. Datur etiam resistentia medii, statuendo eam ipso motûs initio æqualem esse vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore A C, in medio non resistente, generare posset velocitatem A B. Nam si ducatur B T quæ tangat hyperbolam in B, et occurrat asymptoto in T; ([n]) recta A T æqualis erit ipsi A C, ([o]) et tempus exponet, quo resistentia prima uniformiter continuata tollere posset velocitatem totam A B.

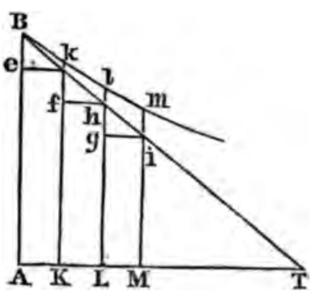
*Corol.* 4. ([p]) Et inde datur etiam proportio hujus resistentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

([m]) 79. * *Per rectangulum A B × A D.* Si enim velocitas A B, manet eadem, tempore A K, describet corpus spatium A B × A K, dum in medio resistente describit spatium A B k K, tempore K L velocitate A B describet spatium A B × K L, dùm in medio resistente describit spatium K k l L, et ità deinceps (14. Lib. I.); quare tempore A M velocitate primâ A B in medio non resistente describet corpus spatium A B × (A K + K L + L M) = A B × A M; et tempore A D, spatium A B × A D. Et quoniam ipso motûs initio, est area A B k K, æqualis rectangulo A B × K k, atque spatia in medio resistente et in medio non resistente descripta temporis momento A K, sunt etiam æqualia, liquet spatium in medio resistente descriptum tempore quovis A D, esse ad spatium eodem tempore in medio non resistente descriptum velocitate A B, ut est area hyperbolica A B G D ad rectangulum A B × A D.

80. Ex Corollario primo sequitur tempore infinito spatium infinitum describi in medio quod resistit in ratione quadrati velocitatis. Non enim evanescet G D, hoc est velocitas tota extincta non erit, nisi infinita evadat recta A D, hoc est nisi tempus motus sit infinitum, tuncque infinita fit area A B G D, seu spatium descriptum est infinitum.

([n]) * *Recta A T æqualis erit ipsi A C.* (Per Theor. I. de Hyp.)

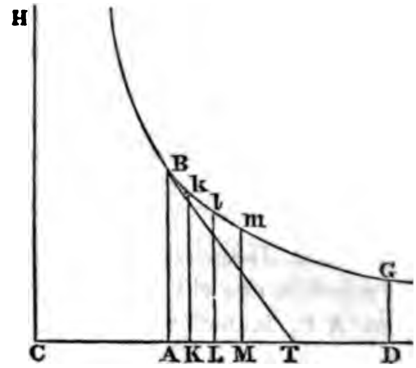
([o]) * *Et tempus exponet.* Ordinatæ K k, L l, M m, &c. rectæ B T, occurrant in k, h, i, &c. ex punctis k, h, i, demissa sint ad A B, K k, L l, &c. perpendicula K e, h f, i g, &c. et sumptis temporibus quam minimis A K, K L, L M, æqualibus erunt B e, k f, h g æquales, sed resistentia prima temporis momento A K, tollit velocitatem A B — K k, seu B e, et eadem uniformiter continuata temporis momento K L, sive A K, tolleret etiam velocitatem k f = B e, et temporis momento L M, seu A K, velocitatem g h = B e, atquè ità deinceps; quarè resistentia prima uniformiter continuata tempore A T tolleret velocitatem totam A B,




quia A B æqualis est omnibus differentiis B e, k f, g h, &c. usque ad T; vis autem centripeta quæ tempore A K, producit velocitatem B e, æqualis est vi quæ eodem temporis momento eandem velocitatem B e extinguit, seu æqualis est resistentiæ primæ, et illa vis centripeta uniformis manens toto tempore A T, totam velocitatem A B, produceret, quam resistentia prima uniformis manens eodem tempore extingueret; ergò resistentia prima æqualis est vi uniformi centripetæ quæ in cadente corpore, tempore A T sivè A C, in medio non resistente generare posset velocitatem A B.

([p]) * *Et indè datur etiam proportio.* Sunt enim vires centripetæ uniformes ut velocitates

*Corol.* 5. Et vice versâ, si datur proportio resistentiæ ad datam quamvis vim centripetam; (†) datur tempus A C, quo vis centripeta resistentiæ æqualis generare possit velocitatem quamvis A B: et inde datur punctum B per quod hyperbola asymptotis C H, C D, describi debet; (q) ut et spatium A B G D, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illâ A B, tempore quovis A D, in medio similari resistente describere potest.




quas dato tempore producunt (13. Lib. I.) et ideò erit resistentia prima ad gravitatem ut velocitas quam producit vis centripeta uniformis cui resistentia illa æqualis supponi potest, ad velocitatem quam vis gravitatis eodem tempore generat.

(†) *Datur tempus A C quo vis resistentiæ æqualis generare possit velocitatem A B.* Si enim detur vis quædam centripeta, dabitur tempus quo velocitatem A B generare potest: tempora autem quibus diversæ vires centripetæ eamdem velocitatem generare possunt, sunt inversè ut illæ vires; ergo si datur ratio vis centripetæ cui resistentia est æqualis ad aliam vim datam, dabitur ratio temporis quo hæc vis velocitatem A B generare potest ad tempus quo vis cui resistentia est æqualis eam velocitatem generat, hoc est datur tempus A C.

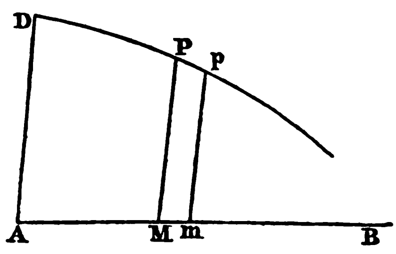
(q) * *Ut et spatium A B G D.* His enim datis, datur tùm area A B G D, tùm rectangulum A B × A D, tùm spatium quod corpus tempore A D, cum datâ velocitate uniformi A B, describeret in medio non resistente, ideóque cum sit A B × A D, ad A B G D, ut spatium tempore A D et velocitate A B in medio non resistente descriptum ad spatium eodem tempore descriptum in medio resistente (per Cor. 2.) hoc spatium dabitur.

81. *Scholium.* Hujus propositionis constructio ad logarithmicam reduci facilè posset, sed id relinquimus lectoris arbitrio, generalis problematis quod sequitur, solutionem analyticam tradituri ut inventionis fons ipse aperiatur.

PROBLEMA.

82. Definire motum corporis solâ vi insitâ lati in medio quod resistit in ratione compositâ ex simplici ratione densitatis medii, et quâvis ratione multiplicatâ celeritatis mobilis.

E loco A egrediatur corpus cum velocitate datâ c et tempore t describat rectam A M = s, sitque ejus velocitas in M = v densitas medii in eodem loco = k, et resistentia r erit (17.) $r\,ds = -v\,dv$. Ponatur resistentia $r = \frac{k v^n}{a^n}$, sitque a quantitas data, et habebitur $\frac{k v^n ds}{a^n} = -v\,dv$, et hinc $k\,ds = -a^n v^{1-n} dv$. Per punctum M, erigatur ad A M, perpendiculum M P quod exponat medii densitatem k in




loco M, sitque D P p curva quam punctum P perpetuò tangit, et erecto altero perpendiculo m p priori M P infinitè propinquo ut sit M m = d s, erit elementum M P p m = k d s = $-a^n v^{1-n} dv$, sumptisque fluentibus, area A D P M $= \frac{Q - a^n v^{2-n}}{2-n}$; quia verò evanescente areâ A D P M, evanescit quoque s, et fit v = c, erit $o = \frac{Q - a^n c^{2-n}}{2-n}$, et ideò constans $Q = a^n c^{2-n}$, atque ità A D P M $= \frac{a^n c^{2-n} - a^n v^{2-n}}{2-n}$. Porrò si densitas k, seu P M, est ut functio quævis spatii de-

scripti s sive A M, poterit curva D P p describi, ac proindè in hâc hypothesi dato spatio descripto, dabitur per quadraturam areæ A D P M, velocitas, et contrà datâ velocitate dabitur area A D P M, et hinc dabitur spatium descriptum A M, indè etiam (14. Lib. I.) datâ velocitate aut spatio dabitur tempus t, et contrà.

83. Si $n = 2$, fit $2 - n = o$, et ideò resumenda est æquatio $MPpm = -a^n v^{1-n} dv = -\frac{a^2 dv}{v}$, quæ, sumptis fluentibus, abit in hanc $ADPM = Q - a^2 L.v$, et quia positâ areâ $ADPM = o$, fit $v = c$, erit $Q = a^2 L.c$, ideóque $ADPM = a^2 L.c - a^2 L.v = a^2 L.\frac{c}{v}$. Sit $ADPM = b$, logarithmus numeri $h = 1$, seu $L.h = 1$, erit $b\,L.h = a^2 L.\frac{c}{v}$, et $\frac{b}{a^2} \times L.h = L.\frac{c}{v}$, seu $L.h^{\frac{b}{aa}} = L.\frac{c}{v}$, ac proindè $h^{\frac{b}{aa}} = \frac{c}{v}$, et $v = \frac{c}{h^{\frac{b}{aa}}}$. Quarè dato spatio, dabitur velocitas et hinc dabitur tempus (14) et contrà.

84. Sit densitas uniformis seu $k = 1$, erit $k\,ds = ds = -a^n v^{1-n} dv$, sumptisque fluentibus $s = \frac{Q - a^n v^{2-n}}{2-n} = \frac{a^n c^{2-n} - a^n v^{2-n}}{2-n}$. Undè reperitur $v = \frac{[a^n c^{2-n} + (n-2)s]^{\frac{1}{2-n}}}{a^{\frac{n}{2-n}}}$.

Invenitur tempus per formulam $dt = \frac{ds}{v} = -\frac{a^n v^{1-n} dv}{v} = a^n v^{-n} dv$. Et sumptis fluentibus, fit $t = \frac{Q - a^n v^{1-n}}{1-n} = \frac{a^n c^{1-n} - a^n v^{1-n}}{1-n}$, quia posito $t = o$, fit $v = c$, et proindè $Q = a^n c^{1-n}$.

85. Si $k = 1$, et $n = 1$, hoc est, si densitas est uniformis et resistentia ut velocitas erit (84) $s = ac - av$; et quia (ibid.) $dt = -a^n v^{-n} dv = -\frac{a\,dv}{v}$, erit $t = Q - a\,L.v = a\,L.c - a\,L.v = a\,L.\frac{c}{v}$, quod posito tempore $t = o$, fiat $v = c$ et proindè $Q = a\,L.c$.

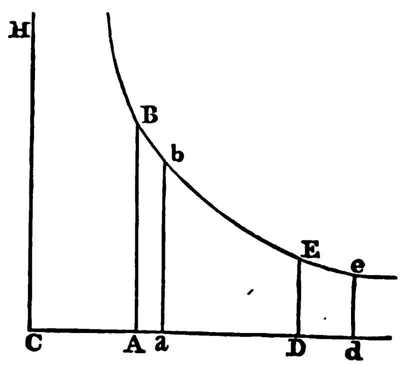
86. Si $k = 1$, et $n = 2$, erit (84) $t = \frac{a^2 c - a^2 v}{cv}$, et quia (ibid.) $ds = -a^n v^{1-n} dv = -\frac{a^2 dv}{v}$, erit $s = Q - a^2 L.v = a^2 \times L.c - a^2 L.v = a^2 L.\frac{c}{v}$.

87. Si in æquatione spatii et velocitatis suprà inventâ, velocitas v, supponatur $= o$, erit $s = \frac{a^n c^{2-n}}{2-n}$, si n est numerus binario minor, at erit $s = \frac{a^n c^{n-2} - a^n v^{n-2}}{(n-2)c^{n-2} v^{n-2}} = \frac{a^n}{(n-2)o} = \infty$, si n est numerus binario major; et (86) erit $s = a^2 L\frac{c}{o} = \infty$, ubi $n = 2$. Quarè si n est numerus positivus binario minor, descripto spatio aliquo finito velocitas omnis extinguitur; at si n binario æqualis est vel major, spatium infinitum conficitur, priusquam velocitas evanescat.

88. Si in æquationibus temporis et velocitatis velocitas v evadat $= o$, erit (84) $t = \frac{a^n c^{1-n}}{1-n}$, si n est numerus unitate minor, at erit $t = \infty$, si n est unitate major, et (85) $t = a\,L.\frac{c}{o} = \infty$, ubi $n = 1$. Quapropter si numerus positivus n est unitate minor, velocitas tempore finito extinguitur, spatio etiam finito descripto (87). Si n est unitati æqualis vel ipsâ major, velocitas nonnisi tempore infinito extingui potest, et spatium finitum est, si n est numerus binario minor, infinitum verò, si n binario æqualis vel major (87.).

## PROPOSITIO VI. THEOREMA IV.

*Corpora sphærica homogenea et æqualia, resistentiis in duplicatâ ratione velocitatum impedita, et solis viribus insitis incitata, temporibus quæ sunt reciprocè ut velocitates sub initio, describunt semper æqualia spatia, et amittunt partes velocitatum proportionales totis.*




Asymptotis rectangulis C D, C H descriptâ hyperbolâ quâvis B b E e secante perpendicula A B, a b, D E, d e, in B, b, E, e, (r) exponantur velocitates initiales per perpendicula A B, D E, et tempora per lineas A a, D d. Est ergo ut A a ad D d ita (per hypothesin) D E ad A B, et ita (t) (ex naturâ hyperbolæ) C A ad C D; et componendo, ita C a ad C d. (u) Ergo areæ A B b a, D E e d, hoc est, spatia descripta æquantur inter se, et velocitates primæ A B, D E sunt ultimis a b, d e, ct propterea dividendo partibus etiam suis amissis A B — a b, D E — d e proportionales. Q. e. d.

## PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

*Corpora sphærica quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatum, temporibus, quæ sunt ut motus primi directè et resistentiæ primæ inversè, amittent partes motuum proportionales totis, et spatia describent temporibus istis et velocitatibus primis conjunctim proportionalia.*

(x) Namque motuum partes amissæ sunt ut resistentiæ et tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ sint totis oroportionales, debebit resistentia et tempus conjunctim esse ut motus. Proinde tempus erit ut motus

(r) • *Exponantur velocitates initiales*, &c. Cùm enim corpora duo similia homogenea et æqualia supponantur, eorum motus considerari possunt tanquam motus unius ejusdemque corporis variis celcritatis gradibus acti (ut in Prop. V.) ideóque (per Corol. 1. Prop. V.) velocitates initiales exponi possunt per lineas A B, D E, tempora per lincas A a, D d, velocitates in fine illorum temporum residuæ per lineas a b, d e, et spatia his temporibus descripta per areas hyperbolicas A B b a, D E e d.

(t) • *Ex naturâ hyperbolæ*. (Per Theor. IV. de Hyperb.)

(u) • *Ergò areæ A B b a, D E e d*, (378. Lib. I.)

(x) • *Namque motuum partes amissæ*, &c. (2.)

directè et resistentia inversè. Quare temporum particulis in eâ ratione sumptis, corpora amittent semper particulas motuum proportionales totis, (y) ideóque retinebunt velocitates velocitatibus suis primis semper proportionales. (z) Et ob datam velocitatum rationem, describent semper spatia, quæ sunt ut velocitates primæ et tempora conjunctim. Q. e. d.

(a) *Corol.* 1. Igitur si æquivelocibus corporibus resistitur in duplicatâ ratione diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia diametris suis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim globi cujusque erit ut ejus velocitas et massa conjunctim, id est, ut velocitas et cubus diametri; resistentia (per hypothesin) erit ut quadratum diametri et quadratum velocitatis conjunctim; et tempus (per hanc Propositionem) est in ratione priore directè et ratione posteriore inversè, id est, ut diameter directè et velocitas inversè; ideóque spatium, tempori et velocitati proportionale, est ut diameter.

(b) *Corol.* 2. Si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione sesquiplicatâ diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia in sesquiplicatâ ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

(y) * *Ideóque retinebunt velocitates* in ratione primâ, ob datas corporum massas (6. Lib. I.)

(z) * *Et ob datam velocitatum rationem* (12.)

89. Tota propositionis hujus demonstratio per analysim boc modo exponitur. Sit globi cujusvis massa m, velocitas data initio motûs c, in fine temporis t sit v, resistentia data initio motûs r, et quia ejusdem corporis resistentiæ in diversis locis sunt ut velocitatum quadrata (per Hyp.) erit c c, ad v v, ut r, ad resistentiam elapso tempore t, quæ proindè erit $\frac{r\,v\,v}{c\,c}$. Sed (2) resistentia $\frac{r\,v\,v}{c\,c}$ est ut motûs decrementum $-$ m d v directè, et temporis momentum d t, inversè, hoc est, $\frac{r\,v\,v}{c\,c} = -\frac{m\,d\,v}{d\,t}$, et hinc $d\,t = -\frac{m\,c\,c\,d\,v}{r\,v\,v}$, sumptisque fluentibus $t = Q + \frac{m\,c\,c}{r\,v}$. Ponatur t = o, et fiet v = c, adeóque $Q = -\frac{m\,c}{r}$, quo valore substituto fit $t = \frac{m\,c\,c - m\,c\,v}{r\,v}$. Capiatur tempus t, ut motus primus m c, directè et resistentia prima r, inversè, hoc est t ut $\frac{m\,c}{r}$, et erit $\frac{m\,c}{r}$ ut $\frac{m\,c\,c - m\,c\,v}{r\,v}$, ideóque m c v, ut m c c $-$ m c v, et dividendo per c, m v ut m c $-$ m v; et compositè fiet m c, ut m c $-$ m v, id est, motus amissus m c $-$ m v ut motus primus m c; et hinc ob datam massam m, erit etiam c, ut c $-$ v, id est, velocitas amissa c $-$ v, ut velocitas prima c; indè etiam erit c, ad c $-$ c + v, seu v, hoc est velocitas prima c, ad residuam v, in ratione datâ. Jam si spatium tempore t descriptum dicatur s, erit (13) d s = v d t, et quia v est ut data c, erit d s ut c d t, sumptisque fluentibus ob datam c, fiet s ut c t. Q. e. d.

90. Quoniam spatium s est ut c t, et t ut $\frac{m\,c}{r}$, erit etiam s ut $\frac{m\,c\,c}{r}$; globi cujus massa m diameter sit D, et datâ globi densitate erit massa m, ut volumen (2. Lib. I.) hoc est, ut diametri cubus $D^3$; quare erit s ut $\frac{D^3\,c\,c}{r}$. Si prætereà datâ velocitate c, resistentia r est ut diametri D, dignitas cujus index n, hoc est r ut $D^n$, et proindè velocitate non datâ, resistentia r, ut $D^n\,c\,c$, erit s ut $\frac{D^3\,c\,c}{D^n\,c\,c}$, seu ut $D^{3-n}$. Ex quibus patent Corollaria quæ sequuntur.

(a) * *Corol.* 1. Nam in hypothesi Corollarii hujus est n = 2, adeóque s ut D.

(b) * *Corol.* 2. In hypothesi Corollarii hujus est $n = \frac{3}{2}$, ideóque s ut $D^{3-\frac{3}{2}}$, seu ut $D^{\frac{3}{2}}$.

*Corol.* 3. Et universaliter, si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione dignitatis cujuscunque diametrorum: spatia quibus globi homogenei, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D et E; et si resistentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, sint ut $D^n$ et $E^n$: spatia quibus globi, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut $D^{3-n}$ et $E^{3-n}$. Et propterea globi homogenei describendo spatia ipsis $D^{3-n}$ et $E^{3-n}$ proportionalia, retinebunt velocitates in eâdem ratione ad invicem ac sub initio.

(c) *Corol.* 4. Quod si globi non sint homogenei, spatium a globo densiore descriptum augeri debet in ratione densitatis. Motus enim, sub pari velocitate, major est in ratione densitatis, et tempus (per hanc Propositionem) augetur in ratione motus directè, ac spatium descriptum in ratione temporis.

(d) *Corol.* 5. Et si globi moveantur in mediis diversis; spatium in medio, quod cæteris paribus magis resistit, diminuendum erit in ratione majoris resistentiæ. Tempus enim (per hanc Propositionem) diminuetur in ratione resistentiæ auctæ, et spatium in ratione temporis.

## (e) LEMMA II.

*Momentum genitæ æquatur momentis laterum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum et coëfficientia continuè ductis.*

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuscunque in arithmeticâ per multiplicationem, divisionem, et extractionem radicum; in geometriâ per inventionem vel contentorum et laterum, vel extremarum et mediarum proportionalium, sine additione et subductione generatur. Ejusmodi quantitates sunt facti, quoti, radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica, et similes. Has quantitates,

(c) * *Corol.* 4. Sit globi m densitas $\delta$, adeóque (2 Lib. I.) massa m ut $\delta D^3$, et hinc (90) s ut $\frac{\delta D^3 cc}{r}$. Quarè si ponatur resistentia r, ut $D^n cc$, erit s ut $\delta D^{3-n}$, hoc est, spatium s, quod datâ densitate $\delta$, erat ut $D^{3-n}$, augeri debet in ratione densitatis $\delta$.

(d) * *Corol.* 5. Resistentia r, quæ antè erat ut $D^n cc$, augeatur in ratione quâvis a, seu sit r ut $a D^n cc$, et quia s est ut $\frac{\delta D^3 cc}{r}$, (Cor. 4.) fiet s ut $\frac{\delta D^3 cc}{a D^n cc}$, seu ut $\frac{\delta D^{3-n}}{a}$, spatium igitur diminuendum est in ratione majoris resistentiæ.

(e) * *Lem.* II. Totum istud Lemma num. 137. et sequentibus Lib. I. fusè expositum videat lector.

ut indeterminatas et instabiles, et quasi motu fluxuve perpetuo crescentes vel decrescentes, hic considero; et earum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis seu affirmativis, ac decrementa pro subductitiis seu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non sunt momenta, sed quantitates ipsæ ex momentis genitæ. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum. Neque enim spectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum: sed prima nascentium proportio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes et fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hisce proportionales. (f) Lateris autem cujusque generantis coëfficiens est quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur sensus (g) Lemmatis est, ut, si quantitatum quarumcunque perpetuo motu crescentium vel decrescentium A, B, C, &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli A B fuerit a B + b A, et geniti contenti A B C momentum fuerit a B C + b A C + c A B: et genitarum dignitatum $A^2$, $A^3$, $A^4$, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, $A^{-1}$, $A^{-2}$, et $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2\,a\,A$, $3\,a\,A^2$, $4\,a\,A^3$, $\frac{1}{2}\,a\,A^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}\,a\,A^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}\,a\,A^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}\,a\,A^{-\frac{1}{3}}$, $-a\,A^{-2}$, $-2\,a\,A^{-3}$, et $-\frac{1}{2}\,a\,A^{-\frac{3}{2}}$ respectivè. Et generaliter, ut dignitatis cujuscunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}\,a\,A^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut genitæ $A^2\,B$ momentum fuerit $2\,a\,A\,B + b\,A^2$; et genitæ $A^3\,B^4\,C^2$ momentum $3\,a\,A^2\,B^4\,C^2 + 4\,b\,A^3\,B^3\,C^2 + 2\,c\,A^3\,B^4\,C$; et genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ sive $A^3\,B^{-2}$ momentum $3\,a\,A^2\,B^{-2} - 2\,b\,A^3\,B^{-3}$: et sic in cæteris. Demonstratur vero Lemma in hunc modum.

*Cas.* 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum A B, ubi de la-

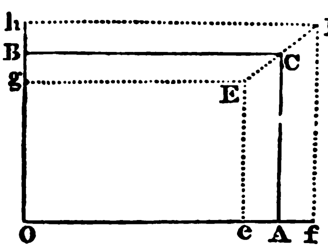
(f) *Lateris autem.* Sic lateris x, in quantitate genitâ $x^n\,y^m$ positi, coëfficiens est $\frac{x^n\,y^m}{x}$, seu $x^{n-1}\,y^m$.

(g) * *Sensus Lemmatis est, ut, si quantitatum A, B, C momenta dicantur a, b, c,* ità ut dùm A fit A + a, B evadat B + b, C evadat C + c, &c., *momentum vel mutatio geniti rectanguli A B, erit* a B + b A, &c. vel si loco litterarum A, B, C, &c. utamur litteris minusculis x, y, z, &c. quibus variabiles quantitates consuevimus significare, et loco a, b, c, &c. scribamus d x, d y, d z, &c. sensus Lemmatis est momentum seu fluxionem rectanguli x y, esse y d x + x d y, fluxionem solidi x y z, esse y z d x + x z d y + x y d z, et genitarum quantitatum $x^2$, $x^3$, $x^4$, $x^{\frac{1}{2}}$, &c. momenta esse $2\,x\,d\,x$, $3\,x^2\,d\,x$, $4\,x^3\,d\,x$, $\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\,d\,x$, &c. respectivè; et genitæ $x^n\,y^m$, momentum esse, $n\,y^m\,x^{n-1}\,d\,x + m\,x^n\,y^{m-1}\,d\,y$, &c.

teribus A et B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}$ a et $\frac{1}{2}$ b, fuit A — $\frac{1}{2}$ a in B — $\frac{1}{2}$ b, seu A B — $\frac{1}{2}$ a B — $\frac{1}{2}$ b A + $\frac{1}{4}$ a b; et quam primum latera A et B alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit A + $\frac{1}{2}$ a in B + $\frac{1}{2}$ b seu A B + $\frac{1}{2}$ a B + $\frac{1}{2}$ b A + $\frac{1}{4}$ a b. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, (h) et manebit excessus a B + b A. Igitur laterum

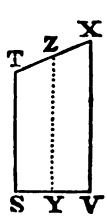
(h) * *Et manebit excessus a B + b A.*

1us. *Casus.* Sit rectangulum O A B C sub duabus variabilibus O A, O B continuè crescentibus; sumantur hinc inde ab A partes æquales A e, A f, et à B partes æquales B g, B h, ita ut, si a et b sint quantitates momentis linearum O A, O B proportionales sit e f = a, et g h = b: Compleantur rectangula




O g E e, O h F f, ducatur F E, quæ transibit per C punctum concursus linearum A C, B C (ob parallelas, et lineas e f et g h similiter, nempe bifariam, sectas in A et B). Dico quod summa trapeziorum E F f e et E F h g æqualis erit momento rectanguli O A C B; obtinetur verò trapeziorum summa, sumendo differentiam rectangulorum O e E G, O f F H, quæ est $Of \times Oh - Oe \times Og$, sive $\overline{OA + Af} \times \overline{OB + Bh} - \overline{OA - Ae} \times \overline{OB - Bg}$, et vocando O A, A; O B, B; $Af = Ae = \frac{1}{2}a$, $Bh = Bg = \frac{1}{2}b$ differentia rect. erit $\overline{A + \frac{1}{2}a} \times \overline{B + \frac{1}{2}b} - \overline{A - \frac{1}{2}a} \times \overline{B - \frac{1}{2}b} = AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab - AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA - \frac{1}{4}ab = aB + bA$.

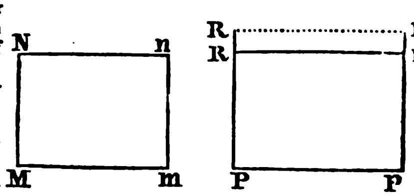
Ut verò probetur summam trapeziorum E F e f et E F g h æqualem esse momento rectanguli O A C B, observandum primò. Quòd si lineæ quævis S T, V X, utcumque inæquales, in lineam S V sint perpendiculares jungaturque T X, et in medio lineæ S V erigatur perpendicularis Y Z, erit trapezium S T X V æquale rectangulo S V × Y Z: itaque




trapezium E F f e erit æquale rectangulo A C × e f, et trapezium E F h g æquale rectangulo B C × g h. Præterea quoniam e f et g h sunt momentis linearum O A, O B proportionales, hoc est, proportionales velocitatibus quibus lineæ O A, O B crescunt, sive, quod idem est, celeritatibus quibus, dum rectangulum O A C B crescit, lineæ A C, B C antrorsum feruntur, rectangula A C × e f et B C × g h, erunt ut lineæ illæ A C, B C et earum velocitates conjunctim.

Mutatio autem geniti rectanguli O A C B proportionalis est causæ quæ eam producit, ea autem causa est motus linearum variabilium A C, B C quo antrorsum feruntur dum lineæ O A, O B crescunt, et quamvis dum illæ lineæ A C, B C moventur, interim lineæ O A, O B crescant, incrementi hujus nulla habenda est ratio dum rectanguli fluxionem sive incrementum nascens consideramus, etenim in ipso hujus incrementi nascentis ortu illæ productiones linearum O A, O B nihil planè sunt, et cùm primum sunt aliquid jam aliæ A C, B C prioribus majores assumuntur, ergo momentum rectanguli O A C B sive ejus mutationis momentanea causa, ex lineis A C et B C et velocitatibus quibuscum feruntur, determinanda est.

Sint verò rectangula M N n m, P R r p, quorum lineæ M N, P R sint æquales, concipiantur aliæ lineæ hisce etiam æquales quæ ab M N et P R profectæ motu uniformi et paral-




lelo secundum lineas M m et P p ferantur, ita ut eodem tempore ad m n et p r perveniant, manifestum est (per 1. 6i. Elem.) areas M n, P r fore ut lineæ M m, P p, et pariter velocitates linearum ab M N et P R profectarum in eadem fore ratione ideóque areas M n, P r, fore in ratione earum velocitatum. Quod si lineæ N M, P R sint inæquales, areæ erunt ut lineæ illæ M N, P R et earum velocitates conjunctim, et quævis incrementa rectangulorum N M m n, P R r p æquali tempore facta in eadem ratione erunt, ideóque et nascentia incrementa erunt in eâ ratione. Unde tandem sequitur quod incrementum rectanguli O A C B ex motu lineæ A C natum, est ut illa linea A C et ejus velo-

incrementis totis a et b generatur rectanguli incrementum a B + b A. Q. e. d.

*Cas.* 2. Ponatur A B semper æquale G, et contenti A B C seu G C momentum (per Cas. 1.) erit g C + c G, id est (si pro G et g scribantur A B et a B + b A) a B C + b A C + c A B. Et par est ratio contenti sub lateribus quotcunque. Q. e. d.

*Cas.* 3. Ponatur latera A, B, C sibi mutuo semper æqualia; et ipsius $A^2$, id est rectanguli A B, momentum a B + b A erit 2 a A, ipsius autem $A^3$, id est contenti A B C, momentum a B C + b A C + c A B erit 3 a $A^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuscunque $A^n$ est n a $A^{n-1}$. Q. e. d.

*Cas.* 4. Unde cùm $\frac{1}{A}$ in A sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A}$ ductum in A, unâ cum $\frac{1}{A}$ ducto in a, (1) erit momentum ipsius 1, id est, nihil. Proinde momentum ipsius $\frac{1}{A}$ seu ipsius $A^{-1}$ est $\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cùm $\frac{1}{A^n}$ in $A^n$ sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ ductum in $A^n$ unâ cum $\frac{1}{A^n}$ in n a $A^{n-1}$ erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ seu $A^{-n}$ erit $-\frac{n a}{A^{n+1}}$. Q. e. d.

*Cas.* 5. Et cùm $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ sit A, momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in 2 $A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per Cas. 3: ideóque momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2 A^{\frac{1}{2}}}$ sive

citas conjunctim, et quod incrementum ejusdem rectanguli O A C B ex motu lineæ B C natum, est ut illa linea B C et ejus velocitas conjunctim, ideóque totum momentum rectanguli O A C B est summa factorum linearum A C et B C per velocitates quibus feruntur respectivè ductarum, ideóque ut summa rectangulorum A C × e f et B C × g h, sive denique ut summa trapeziorum E F f e, E F h g. Q. e. d.

2$^{us}$. *Casus.* Facilè hæc applicantur ad eos casus ubi vel ambæ lineæ O A, O B decrescunt, vel unâ crescente altera decrescit, quippe varianda sunt solummodo signa juxta has hypotheses.

Vide aliam hujus casûs demonstrationem (num. 160. Lib. I.)

(1) * *Erit momentum ipsius* 1, *id est nihil.* Ponatur enim $\frac{1}{A}$ = B et erit $\frac{1}{A} \times A = A B = 1$, sed momentum rectanguli A B est a B + b A (per Cas. 1.) et momentum constantis 1 nullum est; quarè erit a B + b A = o, et hinc b A = − a B = $-\frac{a}{A}$, undè momentum b ipsius B seu $\frac{1}{A}$ est b = $\frac{-a}{A^2} = -a A^{-2}$. Similiter si ponatur $\frac{1}{A^n}$ = B, et ideò $\frac{1}{A^n} \times A^n = A^n B = 1$, erit per Cas. 3. et 1. n a $A^{n-1}$ B + b $A^n$ = o et b $A^n$ = − n a $A^{n-1}$ B = $\frac{-n a A^{n-1}}{A^n} = \frac{-n a}{A}$, atquè adeò b, seu momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$, erit $\frac{-n a}{A^{n+1}}$. Simil modo patent Casus 5. et 6.

$\frac{1}{2}\, a\, A^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit $A^{m}$ æquale $B^{n}$, ideóque $m\, a\, A^{m-1}$ æquale $n\, b\, B^{n-1}$, et $m\, a\, A^{-1}$ æquale $n\, b\, B^{-1}$ seu $n\, b\, A^{-\frac{m}{n}}$, ideóque $\frac{m}{n}\, a\, A^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id est, æquale momento ipsius $A^{\frac{m}{n}}$. Q. e. d.

*Cas.* 6. Igitur genitæ cujuscunque $A^{m} B^{n}$ momentum est momentum ipsius $A^{m}$ ductum in $B^{n}$, unâ cum momento ipsius $B^{n}$ ducto in $A^{m}$, id est $m\, a\, A^{m-1} B^{n} + n\, b\, B^{n-1} A^{m}$; idque sive dignitatum indices m et n sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. Q. e. d.

*Corol.* 1. Hinc in continuè proportionalibus, si terminus unus datur, (k) momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos et terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continuè proportionales; et si detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut — 2 A, — B, D, 2 E, 3 F.

(l) *Corol.* 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunque dati.

(m) *Corol.* 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciprocè ut latera.

## *Scholium.*

In epistolâ quâdam ad D. J. Collinium nostratem 10 Decem. 1672. datâ, cùm descripsissem methodum tangentium quam suspicabar eandem

(k) * *Momenta terminorum reliquorum.* Quoniam enim A, B, C, D, E, F, sunt continuè proportionales erit $D : C = C : B = \frac{CC}{D} = CC\,D^{-1}$ et similiter invenitur $A = \frac{C^3}{D^2} = C^3 D^{-2}$, $E = \frac{D^2}{C}$, $F = \frac{D^3}{CC}$, &c. Quarè ob datum C, cujus nullum est momentum, momenta reliquorum terminorum erunt (per Cas. 3. et 4.) $-2\, d\, C^3 D^{-3}$, $-d\, C^2 D^{-2}$, d, $\frac{2\, d\, D}{C}$, $\frac{3\, d\, D^2}{CC}$, et multiplicando singulos terminos per $\frac{D}{d}$, manebit proportio terminorum $-2 C^3 D^{-2}$, $-C^2 D^{-1}$, D, $\frac{2 D^2}{C}$, $\frac{3 D^3}{CC}$, hoc est — 2 A, — B, D, 2 E, 3 F. Est autem 2 numerus intervallorum inter terminum A, et terminum datum C, sicut et intervallorum inter E et C, 1 intervallum inter B et C, ac inter C et D, et 3, numerus intervallorum inter C et F. Quarè patet veritas Corollarii.

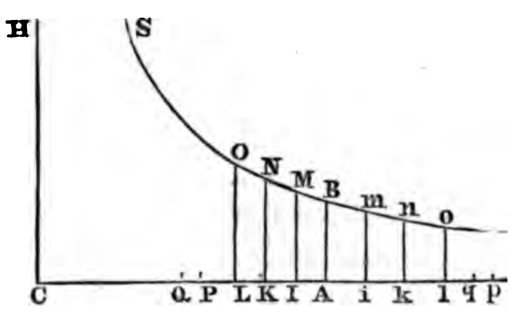
(l) * *Corol.* 2. Sit $A : B = C : D$, seu $B C = A D$, et B C, rectangulum datum erit (per Cas 1.) $a D + d A = 0$, et hinc $a D = - d A$ ideóque $a : - d = A : D$.

(m) * *Corol.* 3. Sit $A^2 + B^2 = C^2$, et quadratum $C^2$ sit datum, erit (per Cas. 3.) $2\, a\, A + 2\, b\, B = 0$, ideóque $A\, a = - b\, B$, et proinde $a : - b = B : A$. In iis duobus Corollariis necessum est ut variabili unâ crescente, decrescat altera, et idcircò dum momentum unius positivum est, alterius momentum est negativum.

esse cum methodo Slusii tum nondum communicatâ; subjunxi: *Hoc est unum particulare vel Corollarium potius methodi generalis, quæ extendit se citra molestum ullum calculum, non modo* (n) *ad ducendum tangentes ad quasvis curvas sive geometricas sive mechanicas vel quomodocunque rectas lineas aliasve curvas respicientes, verùm etiam ad resolvendum alia abstrusiora problematum genera de* (o) *curvitatibus,* (p) *areis, longitudinibus,* (q) *centris gravitatis curvarum, &c. neque (quemadmodum Huddenii methodus de maximis et minimis) ad solas restringitur æquationes illas quæ quantitatibus surdis sunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri isti quâ æquationum exegesin instituo reducendo eas ad series infinitas.* Hactenus epistola. Et hæc ultima verba spectant ad tractatum quem anno 1671. de his rebus scripseram. Methodi verò hujus generalis fundamentum continetur in Lemmate præcedente. (†)

## PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

*Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, rectâ ascendat vel descendat, et spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inque principiis singularum partium (addendo resistentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit) investigentur vires absolutæ; dico quòd vires illæ absolutæ sunt in progressione geometricâ.*




Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC; resistentia per lineam indefinitam A K; vis absoluta in descensu corporis per differentiam K C; velocitas corporis per lineam A P, quæ sit media proportionalis in-

(n) * *Ad ducendum tangentes* (150. 156. Lib. I.) vide Marchionis Hospitalii Analysim infinitè parvorum, ubi methodus illa tangentium fusè et perspicuè exponitur.

(o) * *De curvitatibus.* (216. Lib. I.)

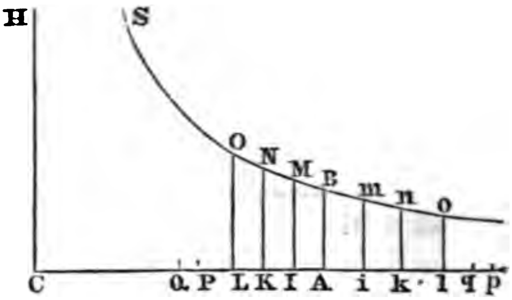
(p) * *Areis, longitudinibus,* &c. Hæc plurimis exemplis, tum 1°. tum 2°. libro contentis manifesta sunt. Vide tractatum Newtoni de quadraturâ curvarum.

(q) * *Centris gravitatis.* (66. Lib. I.)

(†) In præcedentibus editionibus istud scholium hoc modo se habebat.

In litteris quæ mihi cum geometrâ peritissimo G. G. Leibnitio annis abhinc decem intercedebant, cùm significarem me compotem esse methodi determinandi maxima et minima, ducendi tangentes, et similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, et

ter A K et A C, [r] ideóque in subduplicatâ ratione resistentiæ; incrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam K L, et contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam P Q; et centro C asymptotis rectangulis C A, C H describatur hyperbola quævis B N S, erectis perpendiculis A B, K N, L O occurrens in B, N, O. Quoniam A K est ut A P q, erit hujus momentum K L [s] ut illius momentum 2 A P Q: id est, ut A P in K C, nam velocitatis incrementum P Q (per Motûs Leg. II.) proportionale est vi generanti K C. Componatur ratio ipsius K L cum ratione ipsius K N, et fiet rectangulum K L × K N ut A P × K C × K N; hoc est, [t] ob datum rectangulum K C × K N, ut A P. Atqui areæ hyperbolicæ K N O L ad rectangulum K L × K N ratio ultima, ubi coëunt puncta K et L, est æqualitatis. Ergo area illa hyperbolica evanescens est ut A P. Componitur igitur area tota hyperbolica A B O L ex particulis K N O L velocitati A P semper proportionalibus, [u] et propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales A B M I, I M N K, K N O L, &c. et vires absolutæ A C, I C, K C, L C, &c. [x] erunt in progressione geometricâ. Q. e. d. [z] Et simili ar-




literis transpositis hanc sententiam involventibus. (*Datâ æquatione quotcumque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, et vice versâ*) eamdem celarem; rescripsit vir clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse, et methodum suam communicavit a meâ vix abludentem præterquàm in verborum et notarum formulis, et ideâ generationis quantitatum. Utriusque fundamentum contiuetur in hoc Lemmate.

[r] * *Ideóque in subduplicatâ ratione resistentiæ.* Ob datam A C.

[s] * *Ut illius momentum 2 A P Q.* Cum enim sit A K × A C = A P² (per constr.) erit A C × K L = 2 A P × P Q (per Cas. 1. et 3. Lem. II.) id est, ob datam A C; K L est ut A P × P Q, et quia velocitatis incrementum P Q dato temporis momento genitum (per Mot. Leg. II.) proportionale est vi generanti K C, erit K L, ut A P × K C.

[t] * *Ob datum rectangulum* K C × K L (per Theor. IV. de Hyp.)

[u] * *Et propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est;* dato enim temporis momento, spatium descriptum est ut velocitas (12).

[x] * *Erunt in progressione geometricâ.* (379. Lib. I.)

[z] * *Et simili argumento.* Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam A C, resistentia per lineam indefinitam A l, vis absoluta in ascensu corporis per summam C l, velocitas corporis per lineam A p quæ sit media proportionalis inter A l et A C, ideóque in subduplicatâ ratione resistentiæ; decrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam l k, et contemporaneum velocitatis decrementum per lineolam p q; et describatur ut suprà hyperbola S B o; quoniam A l est ut A p² erit hujus momentum k l ut illius momentum 2 A p q, id est, ut A p in l C; nam velocitatis decrementum p q (per Mot. Leg. II.) proportionale est vi generanti l C, componatur ratio ipsius k l cum ratione ipsius l o, et fiet rectangulum k l × l o ut

gumento, in ascensu corporis, sumendo, ad contrariam partem puncti A, æquales areas A B m i, i m n k, k n o l, &c. constabit quod vires absolutæ A C, i C, k C, l C, &c. sunt continuè proportionales. Ideóque si spatia omnia in ascensu et descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ l C, k C, i C, A C, I C, K C, L C, &c. erunt continuè proportionales. Q. e. d.

*Corol.* 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream hyperbolicam A B N K; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis et resistentia medii per lineas A C, A P et A K respectivè; ([a]) et vice versâ.

*Corol.* 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum descendendo potest unquam acquirere, ([b]) exponens est linea A C.

*Corol.* 3. Igitur si in datâ aliquâ velocitate cognoscatur resistentia medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem illam datam in subduplicatâ ratione, quam habet vis gravitatis ([c]) ad medii resistentiam illam cognitam.

A p × l C × l o, hoc est, ob datum rectangulum l C × l o, ut A p. Ergo, coëuntibus punctis k, l, area hyperbolica k n o l = k l × l o, est ut A p. Componitur igitur area tota hyperbolica 2 A B o l ex particulis k n o l velocitati A p semper proportionalibus, et propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales A B m i; i m n k, k n o l, &c. et vires absolutæ A C, i C, k C, l C, &c. erunt in progressione geometricâ. Q. e. d.

([a]) * *Et vice versâ.* Simili modo si in ascensu corporis, spatium usque ad motûs extinctionem describendum exponatur per aream hyperbolicam A B n k exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis et resistentia medii per lineas A C, A p, A k.

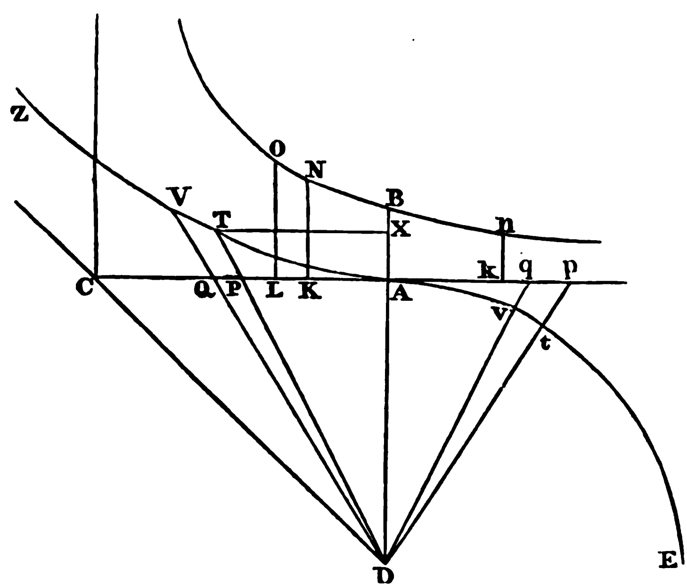
([b]) * *Exponens est linea A C.* Fiat enim A P = A C, et quia (per constr.) A P² = A K × A C, erit etiam A K = A C, ideóque coincidente ordinatâ K N, cum asymptoto C H, area hyperbolica A B N K, infinita evadet, et spatium descendendo descriptum huic proportionale erit quoque infinitum, gravitas verò, resistentia et velocitas corporis exponentur per lineam A C, eritque proinde resistentia gravitati æqualis, et propterea velocitas A C maxima.

([c]) * *Ad medii resistentiam illam cognitam.* Cùm enim velocitates sint in subduplicatâ ratione resistentiarum (per Hyp.) et resistentia sit gravitati æqualis, ubi velocitas maxima est, (per Cor. 2.) velocitas maxima erit ad velocitatem datam in subduplicatâ ratione gravitatis ad medii resistentiam illam cognitam.

## PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

*Positis jam demonstratis, dico quòd, si tangentes angulorum sectoris circularis et sectoris hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascendendi ad locum summum ut sector circuli, et tempus omne descendendi a loco summo ut sector hyperbolæ.*

Rectæ A C, quâ vis gravitatis exponitur, perpendicularis et æqualis ducatur A D. Centro D semidiametro A D describatur tum circuli quadrans A t E; tum hyperbola rectangula A V Z axem habens A X, ver-




ticem principalem A, et asymptoton D C. Ducantur D p, D P, et erit sector circularis A t D ut tempus omne ascendendi ad locum summum; et sector hyperbolicus A T D ut tempus omne descendendi a loco summo: Si modo sectorum tangentes A p, A P, sint ut velocitates.

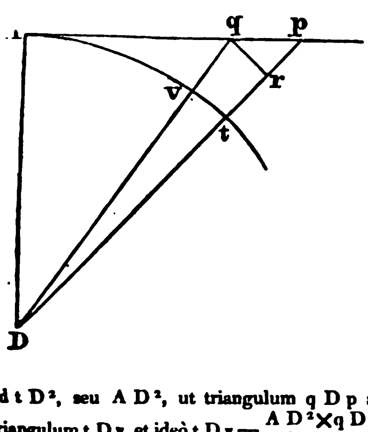
*Cas.* 1. Agatur enim D v q abscindens sectoris A D t et trianguli A D p momenta, seu particulas quam minimas simul descriptas t D v et q D p. Cum particulæ illæ, ob angulum communem D, sunt (d) in dupli-

(d) * *In duplicatâ ratione laterum.* Nam si ex puncto q ducatur ad D p lineola q r parallela ipsi v t, duo triangula evanescentia D q r, D v t similia sunt et in ratione duplicatâ laterum D q

catâ ratione laterum, erit particula t D v ut $\frac{q\,D\,p \times t\,D \text{ quad.}}{p\,D \text{ quad.}}$, id est, ob datam t D, ut $\frac{q\,D\,p}{p\,D \text{ quad.}}$. Sed p D quad. est A D quad. + A p quad. (e) id est, A D quad. + A D × A k, seu A D × C k; (f) et q D p est $\frac{1}{2}$ A D × p q. Ergo sectoris particula t D v est ut $\frac{p\,q}{C\,k}$, id est, ut velocitatis decrementum quam minimum p q directè, et vis illa C k quæ velocitatem diminuit inversè; (g) atque ideò ut particula temporis decremento velocitatis respondens. Et componendo fit summa particularum omnium t D v in sectore A D t, ut summa particularum temporis singulis velocitatis decrescentis A p particulis amissis p q respondentium, usque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc est, sector totus A D t est ut tempus totum ascendendi ad locum summum. Q. e. d.

*Cas.* 2. Agatur D Q V abscindens tum sectoris D A V, tum trianguli D A Q particulas quam minimas T D V et P D Q, et erunt hæ particulæ ad invicem ut D T q ad D P q, id est (si T X et A P parallelæ sint) (h) ut D X q ad D A q vel T X q ad A P q, et divisim ut D X q — T X q ad D A q — A P q. (i) Sed ex naturâ hyperbolæ D X q — T X q est A D q, (k) et per hypothesin A P q est A D × A K. Ergo particulæ sunt ad invicem ut A D q ad A D q — A D × A K; id est, ut A D ad A D — A K seu A C ad C K: ideóque sectoris particula T D V est

D v, (per Prop. XIX. Lib. VI. Elem.) et triangulum D q p æquale est triangulo D q r evanescente p r respectu D q; est igitur p D²




ad t D², seu A D², ut triangulum q D p ad triangulum t D v, et ideò t D v $= \frac{A\,D^2 \times q\,D\,p}{p\,D^2}$, undè ob datum circuli radium A D, particula t D v est ut $\frac{q\,D\,p}{p\,D^2}$.

(e) * *Id est.* Nam A C × A k, seu A D × A k = A p² (per Prop. VIII.) et A D² + A D × A k = A D × (A C + A k) = A D × C k.

(f) * *Et q D p est $\frac{1}{2}$ A D × p q*, ob A D basi p q productæ normalem.

(g) * *Atquè ideò ut particula temporis decremento velocitatis respondens* (18).

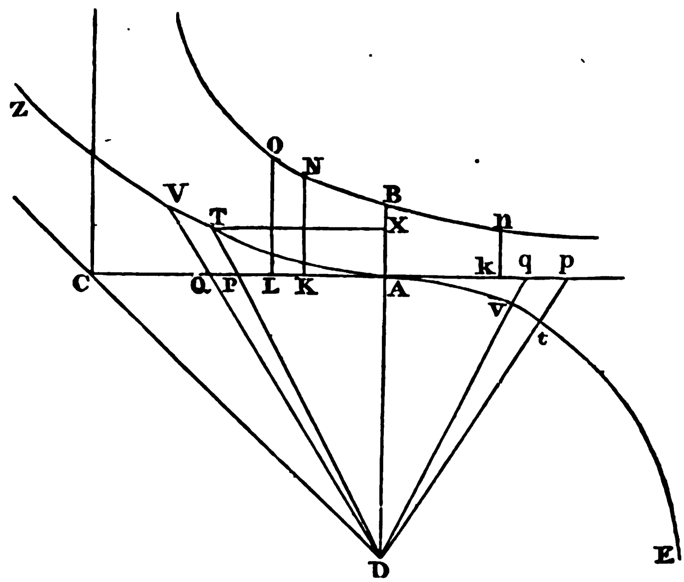
(h) * *Ut D X² ad D A²*, ob triangula D T X, D P A similia (per Prop. II. Lib. VI. Elem.)

(i) * *Sed ex natura hyperbolæ*, &c. Quoniam (per Theor. II. de Hyperb.) rectangulum $\overline{2\,A\,D + A\,X} \times A\,X$, est ad quadratum ordinatæ T X, ut latus transversum est ad latus rectum, hæc verò hyperbola est æquilatera, erit (per Theor. V. de Hyperb.) $T\,X^2 = \overline{2\,A\,D + A\,X} \times A\,X$. Sed est $\overline{2\,A\,D + A\,X} \times A\,X = D\,X^2 - D\,A^2$ (per Prop. VI. Lib. II. Elem.) ergò $T\,X^2 = D\,X^2 - D\,A^2$, ac proinde $D\,X^2 - T\,X^2 = D\,A^2$.

(k) * *Et per hypothesim A P² est A D × A k*, seu A C × A k (per Prop. VIII.)

$\frac{PDQ \times AC}{CK}$; atque ideò (l) ob datas A C et A D, ut $\frac{PQ}{CK}$, id est, ut incrementum velocitatis directè, utque vis generans incrementum inversè; atque ideò ut particula temporis incremento respondens. Et componendo fit summa particularum temporis, quibus omnes velocitatis A P particulæ P Q generantur; ut summa particularum sectoris A T D, id est, tempus totum ut sector totus. Q. e. d.

*Corol.* 1. Hinc si A B æquetur quartæ parti ipsius A C, spatium quod corpus tempore quovi cadendo describit, erit ad spatium, quod corpus




velocitate maximâ A C, eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest; ut area A B N K, quâ spatium cadendo descriptum exponitur, ad aream A T D, quâ tempus exponitur. Nam cùm sit A C ad A P ut A P ad A K, erit (per Corol. 1. Lem. II. hujus) L K ad P Q ut 2 A K ad A P, hoc est, ut 2 A P ad A C, et inde L K ad ½ P Q ut A P ad ¼ A C vel A B; est et K N ad A C vel A D (m) ut A B ad C K; itaque ex æquo L K N O ad D P Q ut A P ad C K. (n) Sed erat D P Q ad D T V ut C K ad A C. Ergo rursus ex æquo L K N O est ad D T V ut A P ad A C; hoc est, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem

(l) * *Ob datas A C et A D.* Est enim P D Q = ½ A D × P Q, et ideò T D V = $\frac{\frac{1}{2} AD \times AC \times PQ}{CK}$.

(m) * *Ut A B ad C K* (per Theor. IV. de Hyperb.)

(n) * *Sed erat D P Q ad D T V,* &c. Suprà Cas. 2.

maximam quam corpus cadendo potest acquirere. Cùm igitur arearum A B N K et A T D momenta L K N O et D T V sunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ (†) ut spatia simul descripta, ideóque areæ totæ ab initio genitæ A B N K et A T D ut spatia tota ab initio descensus descripta. Q. e. d.

*Corol.* 2. (°) Idem consequitur etiam de spatio quod in ascensu describitur. Nimirum quòd spatium illud omne sit ad spatium, uniformi cum velocitate A C eodem tempore descriptum, ut est area A B n k ad sectorem A D t.

*Corol.* 3. Velocitas corporis tempore A T D cadentis est ad velocitatem, quam eodem tempore in spatio non resistente acquireret, ut triangulum A P D ad sectorem hyperbolicum A T D. Nam velocitas in medio non resistente (p) foret ut tempus A T D, et in medio resistente est ut A P, id est, ut triangulum A P D. (q) Et velocitates illæ initio descensus æquantur inter se, perinde ut areæ illæ A T D, A P D.

*Corol.* 4. (r) Eodem argumento velocitas in ascensu est ad velocitatem,

(†) * *Ut spatia simul descripta* (11).

(°) * *Idem consequitur*, &c. Eadem est prorsus demonstratio, si loco A K et Q P substituantur A k et q p, et ad primum demonstrationis casum attendatur.

91. *Corol.* Velocitas A p corporis in medio resistente ascendentis ad maximam altitudinem A B n k, est ad velocitatem A P corporis in eodem medio e quiete descendentis per æquale spatium A B N K, ut secans anguli A D p ad radium, aut quod idem est, ut tangens A p anguli A D p, ad ejusdem sinum. Quoniam enim (per Hyp.) arèa A B N K, æqualis est A B n k, erit (380. Lib. I.) C k : A C = A C : C K, et dividendo A k : A C = A K : C K, et alternando, A k : A K = A C : C K = C k (sive A C + A k) : A C, et ideò A k × A C : A K × A C = A C² + A k × A C : A C²; sed (per dem. Prop. VIII.) A C × A k = A p², et A C × A K = A P². Quare A p² : A P² = A C² + A p² seu D p² : A C², et hinc A p : A P = D p : A C, seu A D. Q. e. d.

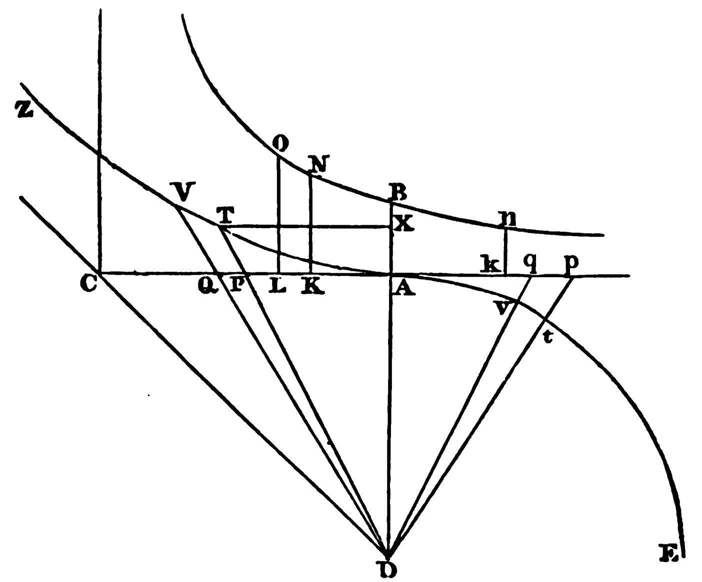
(p) * *Foret ut tempus A T D.* Cresceret enim uniformiter, ideóque ut tempus (25. Lib. I.)

(q) * *Et velocitates illæ initio descensûs æquantur inter se* ob resistentiam respectu gravitatis nullam, ubi velocitas nascitur. Cùm igitur velocitates in medio non resistente sint semper inter se ut areæ A T D, et in medio resistente sint ut triangula A P D, erit velocitas in medio resistente tempore finito A T D acquisita ad velocitatem initio descensûs in eo medio resistente ut triangulum finitum A P D, ad triangulum nascens A P D, et erit velocitas initio descensûs in medio non resistente ad velocitatem in eodem medio tempore finito A T D acquisitam ut area nascens A T D (æqualis areæ nascenti A P D) ad aream finitam A T D; quare (ex æquo) velocitas corporis tempore finito A T D cadentis in medio resistente est ad velocitatem quam eodem tempore in medio non resistente cadendo acquireret ut triangulum A P D ad sectorem hyperbolicum A T D.

(r) * *Eodem argumento.* Nam velocitas in medio non resistente foret ut tempus A t D, et in medio resistente est ut A p, id est, ut triangulum A p D ob datam A D, et velocitates illæ in fine ascensûs ubi evanescunt æquantur inter se, perindè ut areæ evanescentes A t D, A p D; est autem triangulum A p D = ½ A D × A p, et sector circularis A t D, = ½ A D × A t. Quarè A p D est ad A t D, ut A p ad A t.

92. Hinc si velocitas ascensûs A p in medio resistente velocitati maximæ A C æqualis fuerit, erit velocitas A p seu A C, ad velocitatem quâ corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum A C D, ad octantem circuli, sive ut radius ad octavam partem peripheriæ, aut quod idem est, ut quadratum circulo circumscriptum ad circuli aream. Dum enim fit A p = A C, triangulum A p D æquatur triangulo A C D, et sector A t D, octanti circuli, ideóque arcus A t est pars octava peripheriæ, et triangulum A C D est ad sectorem A t D, ut A C ad arcum A t, ac prætereà triangulum A C D, ob A C = A D, est pars octava quadrati circulo circumscripti.

quâ corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum A p D ad sectorem circularem A t D; sive ut recta A p ad arcum A t.




*Corol.* 5. Est igitur tempus, quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem A P, acquirit, ad tempus, quo velocitatem maximam A C in spatio non resistente cadendo acquirere posset, (ˢ) ut sector A D T ad triangulum A D C: et tempus, quo velocitatem A p in medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo posset amittere, (ᵗ) ut arcus A t ad ejus tangentem A p.

(ˢ) * *Ut sector A D T ad triangulum A D C.* Cum enim A P exponat velocitatem tempore A T D in medio resistente acquisitam, sumatur A Y talis ut exponat velocitatem tempore eodem in medio non resistente productam, et erit per Corol. 2. A P ad A Y ut A P D, ad A T D, cumque etiam A C exponat velocitatem maximam, erit A Y ad A C ut tempus quo prior celeritas A Y in medio non resistente acquiri potest, ad tempus quo velocitas maxima A C in medio etiam non resistente acquireretur, et cùm tempus quo celeritas A Y acquiritur, exprimatur per aream A T D, erit A Y ad A C ut A T D ad aream quæ exponet tempus quo velocitas maxima in medio non resistente acquiritur, itaque cùm sit A P : A Y = A P D : A T D et A Y : A C = A T D : ad hanc aream, erit ex æquo A P : A C = A P D, ad hanc aream, sed sumptâ communi altitudine D H est A P ad A C = tri. A P D ad tri. A D C, ergo area quæ exponet tempus quo maxima velocitas in medio non resistente acquiritur, est area A D C. Undè sequitur quòd corpus in medio resistente, velocitatem maximam A C acquirere cadendo non potest nisi tempore infinito. Cùm enim fit A P = A C, coincidit D T cum hyperbolæ A T V asymptoto D C, et sector A D T fit infinitus.

(ᵗ) * *Ut arcus A t, ad ejus tangentem A p.* Siquidem (per Cor. 4.) velocitas A p in medio

*Corol.* 6. Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendentis datur velocitas maxima (per Corol. 2. et 3. Theor. VI. Lib. II.) (u) indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in spatio non resistente cadendo posset acquirere. Et sumendo sectorem A D T vel A D t ad triangulum A D C in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; (x) dabitur tum velocitas A P vel A p, (y) tum area A B N K vel A B n k, (z) quæ est ad sectorem A D T vel A D t ut spatium quæsitum ad spatium, quod tem-

resistente tempore A t D extinguenda, est ad velocitatem eodem tempore in spatio non resistente extinguendam ut triangulum A p D ad sectorem A t D; et etiam ut tempus quo velocitas A p in spatio non resistente extingueretur ad tempus A t D quo altera velocitas in spatio non resistente extinguitur quod idem est cum eo quo velocitas A p in spatio resistente extinguitur. Quare tempus quo velocitas A p, in spatio non resistente evanesceret est ad tempus A t D quo in spatio resistente extingueretur ut triangulum A p D, ad sectorem A t D, sive tangens A p ad ejus arcum A t. Patet ergò propositum.

93. Hinc tempus quo corpus velocitatem A p in medio resistente ascendendo amittere potest, est ad tempus quo velocitatem maximam A C in spatio non resistente ascendendo amitteret vel descendendo acquireret ut sector circularis A t D, ad triangulum A D C, seu ut arcus A t ad radium A D. Nam in medio non resistente velocitas A p est ad velocitatem A C, ut tempus A p D, quo generatur vel extinguitur velocitas A p, ad tempus quo generatur vel extinguitur velocitas A C, quod proindè erit $\frac{\text{A C} \times \text{A p D}}{\text{A p}}$, seu $\frac{1}{2}$ A D × A C, hoc est, triangulum A D C.

Cum igitur tempus quo velocitas A p, in medio resistente extinguitur, exponatur per sectorem A t D, patet propositum.

94. Tempus quo corpus in medio resistente descendendo acquirit velocitatem A P, vel ascendendo amittit velocitatem A p, est ad tempus quo eandem velocitatem in medio non resistente acquirit vel amittit, ut sector A D T, vel A D t, ad triangulum A D P, vel A D p, respectivè. Etenim (per Cor. 5. et not. 93.) tempus quo in medio resistente generatur velocitas A P, vel extinguitur velocitas A p, est ad tempus quo in spatio non resistente generatur vel extinguitur velocitas maxima A C, ut A D T vel A D t, ad A D C; et tempus quo in spatio non resistente generatur vel extinguitur velocitas A C, est ad tempus quo generatur vel extinguitur in eodem spatio non resistente, velocitas A P vel A p, ut A C ad A P vel A p, et sumptâ communi altitudine D A ut A D C ad A P D vel A p D. Quare (ex æquo) tempus quo in medio resistente generatur velocitas A P, vel extinguitur velocitas A p, est ad tempus quo velocitas eadem in spatio non resistente producitur vel amittitur, ut A D T ad A D P, vel A D p. Q. e. d.

95. Si celeritas A p corporis in medio resistente ascendentis maximæ A C æqualis fuerit, erit A D p = A D C, et sector A D t, circuli octans. Quare tempus quo corpus in medio resistente ascendendo amittere potest velocitatem maximam A C est ad tempus quo eandem in spatio non resistente amitteret, ut circuli octans ad triangulum A D C, hoc est, ut area circuli ad quadratum circumscriptum, seu etiam ut 8a. pars peripheriæ ad radium.

(u) 96. *Indèque datur tempus.* Cum enim vires acceleratrices uniformes, sint ut velocitates quas generant oirectè et tempora quibus illas generant inversè (13. Lib. I.) datâ vi acceleratrice uniformi quâ corpus in medio quovis sollicitatur, seu datâ vis illius ratione ad notam quamlibet aliam vim v. gr. ad corporum terrestrium gravitatem, datâque simul velocitate quam vis illa acceleratrix produxit, dabitur tempus quo velocitas illa data genita est. Sit enim vis acceleratrix data ad vim notam gravitatis, ut a ad b, velocitas datâ vi illâ acceleratrice tempore x genita c, et velocitas quam vis gravitatis tempore quovis dato t generat C, erit $a : b = \frac{c}{x} : \frac{C}{t}$

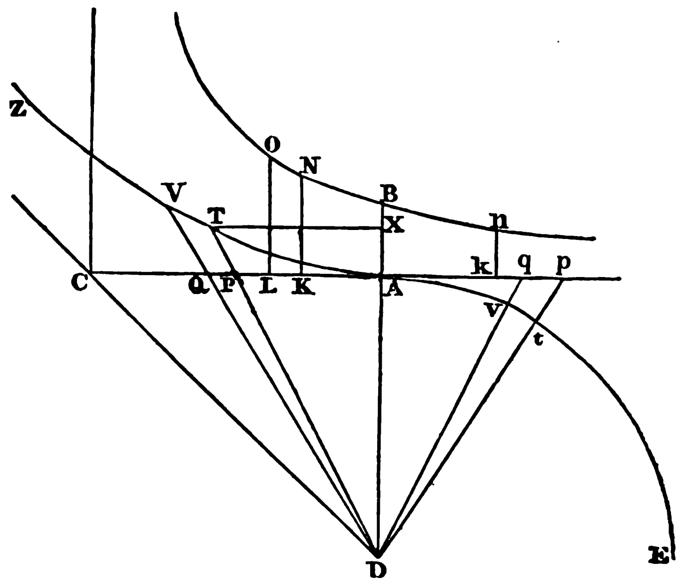
Undè invenitur tempus $x = \frac{bct}{aC}$.

(x) * *Dabitur tum velocitas A P, vel A p.* (Per Cor. 5. et not 92.)

(y) * *Tum area A B N K vel A B n k.* Est enim (ex dem. Prop. VIII.) A C : A P = A P : A K, et A C : A p = A p : A k, et ideò datis A C et A P vel A p dabuntur A K vel A k, et areæ correspondentes A B N K, A B n k, quæ per tabulas logarithmorum inveniri possunt. (384. Lib. I.)

(z) * *Quæ est ad sectorem A D T, vel A D t.* (Per Cor. 1. et 2.)

pore dato, cum velocitate illâ maximâ jam ante inventâ, uniformiter describi potest.



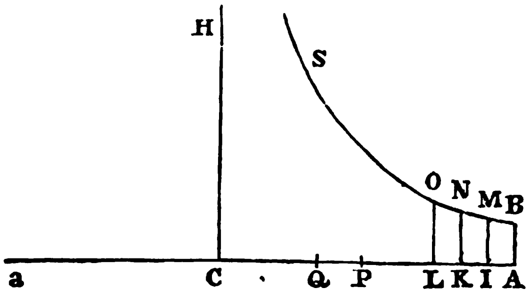

*Corol.* 7. (ᵃ) Et regrediendo, ex dato ascensus vel descensus spatio A B n k vel A B N K, dabitur tempus A D t vel A D T.

(ᵃ) 97. *Et regrediendo.* Nimirum capienda est area A B n k, vel A B N K ad triangulum A D C in datâ ratione spatii dati ascensûs vel descensûs ad duplum spatii, quod corpus in medio non resistente cadendo describit ut velocitatem maximam A C acquirat, atque ità dabitur A k vel A K. Et hinc dabitur A p vel A P, seu velocitas; ex his autem dabitur sector A D t vel A D T, seu tempus (per Cor. 5.). Nam spatium quod corpus in medio non resistente cadendo describit ut velocitatem maximam A C acquirat dicatur A, tempus quo spatium illud describitur T, spatium quod in medio resistente describit ut acquirat velocitatem A P, vel amittat velocitatem A p dicatur s, tempus t, et spatium quod corpus tempore illo t et velocitate maximâ A C uniformiter progrediendo describit sit S, et quia (29. Lib. I.) corpus velocitate maximâ A C uniformiter progrediendo, tempore T, describit spatium 2 A, erit (5. Lib. I.) S : 2 A = t : T. Sed (per Cor. 5. et not. 93.) t : T = A D T vel A D t : A D C, ideóque S : 2 A = A D T vel A D t : A D C, et (per Cor. 1. ac 2.) s : S = A B N K vel A B n k : A D T vel A D t, respectivè. Quarè (ex æquo) s : 2 A = A B N K vel A B n k : A D C. Q. e. d.

98. Si corpus cum velocitate quæ æqualis sit maximæ A C, verticaliter projiciatur deorsum, æquabili motu descendet, ob resistentiam gravitati æqualem et contrariam (per Cor. 2. Prop. VIII.) si minori cum velocitate projiciatur, exponatur velocitas illa per lineæ A C partem A P, et motus corporis projecti idem erit ac si e quiete descendendo velocitatem datam A P, jam acquisivisset et deindè pergeret moveri; quare motus projecti in hoc casu ex superioribus facile determinabitur.

99. Verùm si projectionis velocitas terminali A C major est, constructiones Propositionum VIII. et IX. mutandæ erunt. Et quidem constructio Propositionis 8ᵃᵉ sic mutanda. Descriptâ inter asymptotos orthogonales A C, C H hyperbolâ quâlibet S O N B, producatur asymptotus A C in a, et exponatur vis gravitatis per datam lineam a C, resistentia initio motûs per lineam a A, resistentia elapso quovis tempore per lineam indefinitam a K. Velocitas corporis per lineam a P quæ sit media proportionalis inter a K et a C, ideóque in subduplicatâ ratione re-

sistentiæ. Decrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam K L et contemporaneum velocitatis decrementum per lineolam P Q. Quoniam a K est ut $a P^2$, erit hujus momentum K L, ut illius momentum 2 a P Q, id est, ut a P in K C. Nam velocitatis decrementum P Q, (per Mot. Leg. II.) proportionale est vi generanti K C, quæ est excessus resistentiæ a K, suprà vim gravitatis a C. Componatur ratio ipsius K L cum ratione ipsius K N,

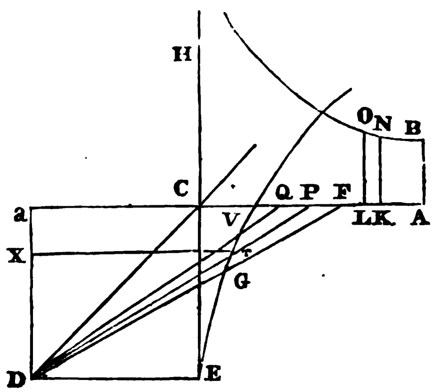



et fiet rectangulum K L × K N ut a P × K C × K N, hoc est, ob datum rectangulum K C × K N, ut a P, ergò rectangulum evanescens K N × K L, hoc est, area hyperbolica K N O L, est ut a P. Componitur igitur area tota hyperbolica A B O L, ex particulis K N O L, velocitati a P semper proportionalibus, et propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales A B M I, I M N K, K N O L, &c. et vires absolutæ A C, I C, K C, L C, &c. erunt in progressione geometricâ. Si spatium descriptum exponatur per aream hyperbolicam A B N K, exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis et resistentia medii per lineas a C, a P, a K.

Propositionis 9æ constructio in hanc abit. Cæteris ut in figurâ et constructione superiori manentibus, capiatur a F media proportionalis inter a C et a A, et ideò velocitatem projectionis initialem exponens, completo quadrato a C E D, centro D describatur hyperbola rectangula E G T V, semiaxem transversum habens D E, verticem principalem E, et asymptotum D C. Jungantur D F, D P hyperbolæ occurrentes in G et T, et erit sector hyperbolicus G D T ut tempus descensûs per spatium A B N K. Agatur enim D V Q abscindens tum sectoris G D V tum trianguli F D Q particulas quam minimas T D V, P D Q, et erunt hæ particulæ ad invicem ut $D T^2$ ad $D P^2$, id est, si T X et a P parallelæ sint, ut $D X^2$ ad $D a^2$, vel $T X^2$ ad $a P^2$, et divisim ut $T X^2 - D X^2$ ad $a P^2 - a D^2$; sed (ex naturâ Hyperb.) $T X^2 - D X^2$ est $a D^2$, et (per Hyp.) $a P^2$ est a D × a K; ergò particulæ T D V, P D Q, sunt ad invicem ut $a D^2$, ad $a D \times a K - a D^2$, id est, ut a D ad a K — a D, seu ut a C ad C K; ideóque sectoris particula T D V, est $\frac{P D Q \times a C}{C K}$, atque ideò ob datas a C et a D, ut $\frac{P Q}{C K}$, id est ut decrementum velocitatis directè utque vis generans decrementum inversè, atque ideò ut particula temporis decremento velocitatis respondens, et componendo, fit summa particularum temporis quibus omnes velocitatis F P particulæ P Q extinguuntur, ut summa particularum sectoris G D T, id est, tempus totum ut sector totus. Q. e. d.

100. *Corol.* 1. Quoniam coincidente puncto P cum C, coincidit etiam K cum C, et D T cum asymptoto D C, liquet corporis projecti velocitatem a P nonnisi descripto spatio infinito, elapsoque infinito tempore, fieri posse velocitati terminali a C æqualem.

101. *Corol.* 2. Si dignitas hyperbolæ B N O seu rectangulum C A × A B, sit $\frac{1}{2} a C^2$, spatium quod corpus tempore quovis describit, erit ad spatium quod corpus velocitate terminali a C eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area A B N K quâ spatium descriptum exponitur ad aream G D T quâ tempus exponitur. Nam cùm sit a C ad a P, ut a P ad a K, erit (per Cor. 1. Lem. II. Lib. II.) L K




ad P Q ut 2 a K ad a P, hoc est, ut 2 a P ad a C, et indè L K ad ½ P Q, ut a P ad ½ a C. (Ex naturâ Hyperb. et per Hyp.) K N × C K est C A × A B, seu $\frac{1}{2} a C^2$, ideóque K N ad a C seu a D, ut ½ a C ad C K. Itaque (ex æquo) L K N, ad D P Q, ut a P, ad C K; sed erat D P Q, ad D T V, ut C K ad a C, ergò rursus (ex æquo), L K N, est ad D T V,

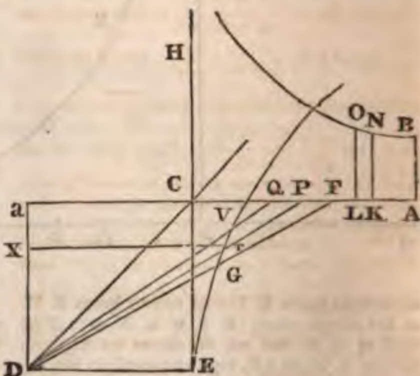
ut a P, ad a C, hoc est, ut velocitas corporis projecti est ad velocitatem maximam quam corpus e quiete cadendo potest acquirere. Cùm igitur arearum A B N K et G D T, momenta L K N et D T V sint ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ ut spatia simul descripta, ideóque areæ totæ ab initio genitæ A B N K et G D T, ut spatia tota ab initio projectionis descripta.

102. *Corol.* 3. Velocitas a P corporis projecti in fine temporis G T D, est ad velocitatem quam corpus velocitate initiali a F projectum eodem tempore in medio non resistente cadendo haberet, ut triangulum a P D ad summam trianguli a F D et sectoris hyperbolici G T D. Nam velocitatis incrementum tempore G T D in spatio non resistente genitum est ut tempus G T D, et velocitas projectionis ut a F, sive ut triangulum a F D, atque adeò velocitas tota in fine temporis G T D ut G T D + a F D, et velocitas in fine temporis ejusdem G T D in medio resistente est ut a P, id est, ut triangulum a P D, et velocitates illæ initio projectionis æquantur inter se, perindè ut areæ illæ G T D + a F D et a P D, ob sectorem G T D evanescentem, et a P æqualem a F initio descensûs.

103. *Corol.* 4. Tempus quo corpus in medio resistente projectum acquirit velocitatem a P, seu quo amittit velocitatem P F, est ad tempus quo velocitatem maximam a C, in spatio non resistente e quiete cadendo acquirere posset, ut sector G D T ad triangulum a D C. Sit a F + V, recta velocitatem exponens quam corpus in medio non resistente cum velocitate initiali a F projectum elapso tempore G D T haberet, et erit (102) a P ad a F + V, seu multiplicando per $\frac{1}{2}$ a D, a P D ad a F D + $\frac{1}{2}$ a D × V, ut a P D ad a F D + G T D, ideóque $\frac{1}{2}$ a D × V = G T D, et V = $\frac{\text{G T D}}{\frac{1}{2}\text{a D}}$; sed V est velocitas quam corpus e quiete cadendo in medio non resistente acquireret tempore G T D, et velocitates in medio non resistente acquisitæ, sunt ut tempora quibus acquiruntur, ideóque velocitas V seu $\frac{\text{G T D}}{\frac{1}{2}\text{a D}}$, est ad velocitatem a C, in medio non resistente acquisitam ut tempus G T D ad tempus quo corpus velocitatem a C acquirit; quarè hoc tempus erit $\frac{1}{2}$ a D × a C, seu per triangulum a D C exponetur.

104. *Corol* 5. Hinc ex dato tempore datur spatium descriptum. Capiatur enim sector G D T ad triangulum a D C, ut tempus datum ad tempus quo corpus in medio non resistente acquirit velocitatem terminalem a C, et dabitur tum velocitas a P, tum area A B N K, quæ est ad sectorem G D T, ut spatium quæsitum ad spatium quod tempore dato cum velocitate illâ terminali a C uniformiter describi potest (101) et regrediendo ex dato spatio A B N K, dabitur tempus G D T, si capiatur area A B N K, ad triangulum a D C in ratione spatii dati ad duplum spatii quod corpus in medio non resistente cadendo describit ut velocitatem terminalem a C acquirat. Id demonstratur ex (not. 103. et 101.) eodem prorsus modo quo factum est (97.)

105. *Scholium.* Superiores constructiones definiendis corporum motibus sufficiunt, licet medii resistentia partim constans partim velocitatis quadrato proportionalis. Nam si corpus solâ vi insitâ moveatur, recta A C, quæ in construc-




tionibus Prop. VIII. et IX. vim gravitatis uniformem exponebat, partem resistentiæ constantem quæ vi alicui centripetæ uniformi æqualis censeri potest, cæteris manentibus, exponet. Sed si corpus in medio prædicto gravitate uniformiter agente sollicitatum rectâ ascendat vel descendat, linea A C, in constructionibus pro ascensu vim gravitatis et partem resistentiæ datam simul exhibebit, in constructionibus verò pro descensu excessum gravitatis suprà partem resistentiæ datam repræsentabit; et linea illa A C, ità determinata vim gravitatis uniformem exponet, quâ corpus urgeretur in medio cujus esset resistentia ut velocitatis quadratum. Si verò pars illa resistentiæ quæ uniformis manet vi gravitatis æqualis fuerit et corpus deorsum projiciatur, idem erit illius motus ac si solâ vi insitâ ferretur in medio quod resisteret in ratione quadrati velocitatis, atque ideò in hoc casu usurpanda erit constructio Propositionis 5æ. Jam verò omissis constructionibus per logarithmicam quas (ex demonstr. 44. 45.) facile deducere, aut in Monumentis Academiæ Regiæ an. 1709. et etiam in Phoronomiâ Hermanni lector videre poterit, duo quæ sequuntur generalia problemata analyticè solvemus.

### PROBLEMA.

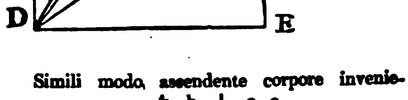
Definire motum corporis, uniformi gravitate urgente, rectâ descendentis vel ascendentis in

medio similari, quod in ratione quâlibet multiplicatâ velocitatis resistit.

106. Sit vis gravitatis $= g$, velocitas corporis sub initio motûs $= c$, spatium descriptum $= s$, tempus quo descriptum est $= t$, velocitas hoc tempore acquisita vel residua $= v$, resistentia medii $r = \frac{v^n}{a^{n-1}}$, et $a$ quantitas data. Corpore descendente erit (19) $g\,ds - \frac{v^n ds}{a^{n-1}} = v\,dv$, ideóque $ds = \frac{a^{n-1} v\,dv}{g a^{n-1} - v^n}$, et quia (13) $dt = \frac{ds}{v}$, erit $dt = \frac{a^{n-1} dv}{g a^{n-1} - v^n}$. Simili modo pro corporis ascensu, invenitur $ds = \frac{-a^{n-1} v\,dv}{g a^{n-1} + v^n}$ et $dt = \frac{-a^{n-1} dv}{g a^{n-1} + v^n}$. Cum igitur in his quatuor æquationibus variabiles separatæ sint, poterunt illæ, saltem concessis figurarum quadraturis, construi.

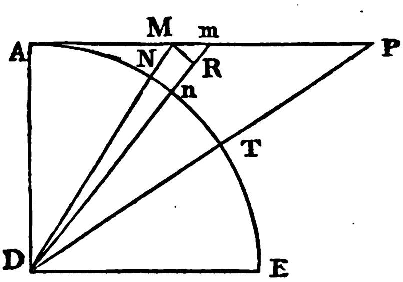
107. Si resistentia velocitati proportionalis fuerit, erit $n = 1$, et ideò corpore descendente $ds = \frac{v\,dv}{g - v}$ et divisione numeratoris $v\,dv$ per $-v + g$ peractâ, est $ds = -dv + \frac{g\,dv}{g - v}$, et sumptis fluentibus $s = Q - v - g \times L.\,\overline{g - v}$. Quia verò ubi evanescit spatium $s$, fit $v = c$ (per Hyp.) erit constans $Q = c + g\,L.\,\overline{g - c}$, ac proindè $s = c - v + L.\frac{g - c}{g - v}$. Tempus habetur per æquationem $dt = \frac{dv}{g - v}$ cujus fluens $t = Q - L.\,\overline{g - v} = L.\frac{g - c}{g - v}$. Simili modo pro corporis ascensu invenitur $s = c - v + g\,L.\frac{g + v}{g + c}$, et $t = L.\frac{g + c}{g + v}$.

108. Si resistentia sit ut velocitatis quadratum, erit $n = 2$ et (106) $r = \frac{v^2}{a}$. Sit $b$ velocitas terminalis, et quia resistentia gravitati æqualis est ubi corpus velocitatem maximam habet, erit $g = \frac{bb}{a}$, et $bb = ag$. Sit $e$ spatium quod corpus vi gravitatis constante $g$ cadendo in medio non resistente describit ut acquirat velocitatem $b$, et erit $2ge = bb = ag$ (23) ideóque $a = 2e$. His positis, corpore descendente erit (106) $ds = \frac{a v\,dv}{ag - vv} = \frac{2e v\,dv}{bb - vv}$. Ponatur $bb - vv = xx$, et proindè sumptis fluxionibus $v\,dv = -x\,dx$, atquè ideò $ds = -\frac{2e x\,dx}{xx} = -\frac{2e\,dx}{x}$, et sumptis fluentibus $s = Q - 2e\,L.\,x = Q - e\,L.\,x^2 = Q - e\,L.\,\overline{bb - vv}$. Ponatur $s = o$, et ideò $v = c$, et indè habebitur $Q = e\,L.\,\overline{bb - cc}$, ac propterea $s = e\,L.\frac{bb - cc}{bb - vv}$. Sit $L.\,h = 1$ et erit $s\,L.\,h = e\,L.\frac{bb - cc}{bb - vv}$; $\frac{s}{e} \times L.\,h = L.\,h^{\frac{s}{e}} = L.\frac{bb - cc}{bb - vv}$, ideóque $h^{\frac{s}{e}} = \frac{bb - cc}{bb - vv}$; undè eruitur $vv = \frac{bb\,h^{\frac{s}{e}} + cc - bb}{h^{\frac{s}{e}}}$. Tempus obtinetur per æquationem (106) $dt = \frac{a\,dv}{ag - vv} = \frac{2e\,dv}{bb - vv} = \frac{\frac{e}{b} dv}{b + v} + \frac{\frac{e}{b} dv}{b - v}$; quod patet, si duæ postremæ fractiones ad communem denominatorem reducantur, et sumptis fluentibus $t = Q + \frac{e}{b} \times L.\,\overline{b + v} - \frac{e}{b}\,L.\,\overline{b - v} = Q + \frac{e}{b} \times L.\frac{b + v}{b - v}$. Ponatur $t = o$, et ideò $v = c$, et invenietur $Q = -\frac{e}{b}\,L.\frac{b + c}{b - c}$. Quarè erit $t = \frac{e}{b}\,L.\frac{\overline{b + v} \times \overline{b - c}}{\overline{b - v} \times \overline{b + c}}$. Si corpus e quiete cadat erit $c = o$, et ideò $s = e\,L.\frac{bb}{bb - vv}$; $vv = \frac{bb\,h^{\frac{s}{e}} - bb}{h^{\frac{s}{e}}}$ et $t = \frac{e}{b}\,L.\frac{b + v}{b - v}$. Si in hâc ultimâ æquatione loco $h^{\frac{s}{e}}$ scribatur $m$ et loco $v$ ipsius valor $b\sqrt{1 - \frac{1}{m}}$, habebitur $t = \frac{e}{b} \times \frac{L\,1 + \sqrt{1 - \frac{1}{m}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{m}}}$.




Simili modo, ascendente corpore invenietur $s = e\,L\,\frac{bb + cc}{bb + vv}$, et $vv =$

$\frac{bb + cc - bbh^{\frac{s}{e}}}{h^{\frac{s}{e}}}$. Tempus autem reperitur per æquationem $dt = -\frac{a\,dv}{ag + vv} = -\frac{e\,dv}{bb + vv}$. Centro D, radio D A $= b$, describatur circuli quadrans A N E, velocitas c, sub initio ascensûs exponatur per datam tangentem A P, velocitas residua v, per tangentis illius partem A M, et $dv$ per M m, jungantur D P,




D M, D m, circulo occurrentes in T, N, n, et ex puncto M, demissum sit ad D n perpendiculum M R, triangula similia D N n, D M R, dant D M : D N vel D A $=$ M R : N n, et triangula similia m R M, M A D, dant D M : D A $=$ M m : M R, ideóque (ex æquo) $DM^2 : DA^2 = Mm : Nn$, hoc est, $bb + vv : bb = dv : Nn = \frac{bb\,dv}{bb + vv}$; undè fit $\frac{e \times Nn}{bb} = \frac{e\,dv}{bb + vv}$; et hinc habebitur $dt = -\frac{e \times Nn}{bb}$, sumptisque fluentibus $t = Q - \frac{e \times AN}{bb}$. Ponatur $t = o$, et fiet A M $=$ A P, et A N $=$ A T, ideóque $Q = \frac{e \times AT}{bb}$. Quarè erit $t = \frac{e \times TN}{bb} = \frac{TN}{2g}$, (ob $bb = 2ge$).

## PROBLEMA.

**Definire motum corporis in lineâ rectâ A C, vi quâlibet centripetâ ad punctum C tendente sollicitati in medio cujus resistentia est ut densitas medii et dignitas quævis velocitatis corporis conjunctim.**

109. Corpus e loco dato A vel a, datâ cum velocitate projectum ascendat per spatium a P vel descendat per spatium A P, dicanturque velocitas projectionis in a vel A $= c$, spatium descriptum a P vel A P $= s$, tempus quo descriptum est $= t$, velocitas corporis in loco P $= v$, vis centripeta ibidem $= g$, densitas medii in eodem loco $= k$, resistentia $r = kv^n$, distantia C P $= x$, et data C a vel C A $= b$, erit (22) pro corporis ascensu, $g\,dx + kv^n\,dx = -v\,dv$, et pro descensu $g\,dx - kv^n\,dx = -v\,dv$, quarum æquationum alterutram resolvere satis est, cum altera in alteram abeat, mutato signo $+$ vel $-$ quantitati k præfixo. Quia verò corpore ascendente est a P $= s = x - b$, et proindè $ds = dx$; at eodem descendente A P $= s = b - x$, et ideò $ds = -dx$, erit pro corporis ascensu (13) $dt = \frac{ds}{v} = \frac{dx}{v}$, et pro descensu $dt = -\frac{dx}{v}$. His positis breviter exponimus præcipuos casus in quibus superiorum æquationum variabiles separari et æquationes proindè per curvarum quadraturas construi possunt.




110. Si in æquatione generali $g\,dx \pm kv^n\,dx = -v\,dv$, quæ est pro ascensu et descensu simul. Sit g quantitas constans, et densitas k, ut distantiæ dignitas $x^{\frac{1}{2}n}$ reciprocè, hoc est, $k = \frac{1}{ax^{\frac{1}{2}n}}$, variabiles separari possunt. Nam æquatio generalis in hanc mutabitur $g\,dx \pm \frac{v^n\,dx}{ax^{\frac{1}{2}n}} = -v\,dv$. Ponatur $v^2 = xz$, ideóque $v^n = x^{\frac{1}{2}n} z^{\frac{1}{2}n}$, et $v\,dv = \frac{x\,dz + z\,dx}{2}$, et æquatio evadet $g\,dx \pm \frac{z^{\frac{1}{2}n}\,dx}{a} = \frac{-x\,dz - z\,dx}{2}$, undè eruitur $\frac{dx}{x} = \frac{a\,dz}{2ag + az \pm 2z^{\frac{1}{2}n}}$. In qua variabiles sunt separatæ.

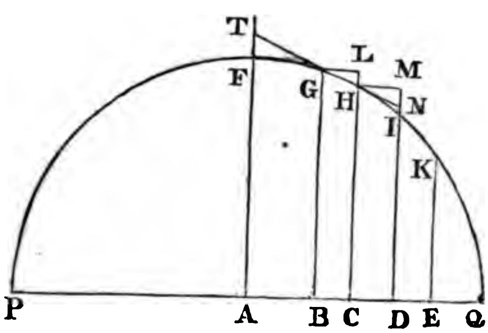
111. Si densitas k constans fuerit, vis centripeta g ut distantia x a centro et resistentia ut velocitas, variabiles separari possunt. Nam si ponatur $g = ax$, k constans et $n = 1$, æquatio generalis fiet $ax\,dx + kv\,dx = -v\,dv$, in quâ neglectis coëfficientibus datis a et k, termini omnes sunt homogenei seu ejusdem dimensionis. Ponatur itaque $v = zx$, et proindè $dv = z\,dx + x\,dz$, et æquatio evadet $ax\,dz \pm kzx\,dx = -z^2x\,dx - zx^2\,dz$, et terminis omnibus per x divisis, iisque ordinatis invenitur $\frac{dx}{x} = -\frac{z\,dz}{a + kz + z^2}$, quæ æquatio, concessâ hyperbolæ vel circuli quadraturâ semper construi potest.

112. Si, cæteris paribus, medii resistentia sit ut quadratum velocitatis, id est, $n = 2$, et densitas medii k visque centripeta g sint ut functiones quælibet distantiæ x, variabiles in superioribus

## PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

*Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum horizontis, sitque resistentia ut medii densitas et quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ moveatur; tum corporis velocitas et medii resistentia in locis singulis.*

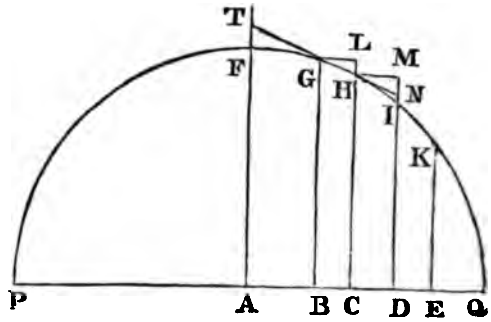
Sit P Q planum illud plano schematis perpendiculare; P F H Q linea curva plano huic occurrens in punctis P et Q; G, H, I, K loca quatuor corporis in hâc curvâ ab F ad Q pergentis; et G B, H C, I D, K E ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demissæ, et lineæ horizontali P Q ad puncta B, C, D, E insistentes; et sint B C, C D, D E distantiæ ordinatarum inter se æquales. A punctis G et H ducantur rectæ G L, H N curvam tangentes in G et H, et ordinatis C H, D I sursum productis occurrentes in L et N, et compleatur parallelogrammum H C D M. ([b]) Et tempora, quibus corpus describit arcus G H, H I, erunt in sub-




æquationibus (109.) separationem admittunt. In hâc hypothesi æquatio pro corporis ascensu fit $g\,dx + k\,v^2\,dx = -v\,dv$, seu $v\,dv + k\,v^2\,dx = -g\,dx$. Ponatur $k\,dx = \frac{dz}{2z}$ ut sit $2 z v\,dv + v^2\,dz = -2 g z\,dx$, et sumptis fluentibus erit $z v^2 = Q - S.\,2 g z\,dx$, et $v^2 = \frac{Q - S.\,2 g z\,dx}{z}$. Quia verò $k\,dx = \frac{\frac{1}{2} dz}{z}$, erit $S.\,k\,dx = \frac{1}{2} L.\,z$ et $S.\,2 k\,dx = L.\,z$. Atque ideò si fuerit $L.\,h = 1$, $h^{S.\,2k\,dx} = z$ undè fit $v^2 = \frac{Q - S.\,2 g h^{S.\,2k\,dx}\,dx}{h^{S.\,2k\,dx}}$ pro corporis ascensu; et pro descensu loco $+k$, scribendo $-k$ erit $v^2 = \frac{Q - S.\,2 g h^{-S.\,2k\,dx}\,dx}{h^{-S.\,2k\,dx}}$ $= Q h^{S.\,2k\,dx} - h^{S.\,2k\,dx}\,S.\,2 g h^{-S.\,2k\,dx}\,dx$ in quibus æquationibus variabiles sunt separatæ, quia (per Hyp.) quantitates k et g, sunt ut functiones variabilis x. Constans Q determinatur ex eo quod ubi $x = b$, sit $v = c$, tempus verò definitur per æquationem $dt = \frac{dx}{v}$ pro corporis ascensu, et per æquationem $dt = -\frac{dx}{v}$ pro corporis descensu, in quibus æquationibus, si loco v substituatur ipsius valor per x inventus, variabiles erunt separatæ. Sed de his vide Mechanicam Clar. Euleri.

([b]) 113. * *Et tempora quibus corpus describit arcus* evanescentes G H, H I, *erunt in subduplicatâ ratione altitudinum L H, N I.* Eodem enim temporis momento quo corpus vi motûs insiti in G, describeret tangentem G L, vi gravitatis uniformi caderet per altitudinem L H qualem in medio non resistente percurreret eo ipso tempore; resistentiæ enim effectus altitudinem

duplicatâ ratione altitudinum L H, N I, quas corpus temporibus illis describere posset, a tangentibus cadendo; ([c]) et velocitates erunt ut longitudines descriptæ G H, H I directè et tempora inversè. Exponantur tempora per T et t, et velocitates per $\frac{GH}{T}$ et $\frac{HI}{t}$; ([d]) et decrementum velocitatis tempore t factum exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur a resistentiâ corpus retardante, et gravitate corpus accelerante. Gravitas, in corpore cadente et spatium N I cadendo describente, generat velocitatem, quâ duplum illud spatium eodem tempore describi potuisset, ([e]) ut Galilæus demonstravit; id est velocitatem $\frac{2\,NI}{t}$: ([f]) at in corpore arcum H I describente, auget arcum illum solâ longitu-



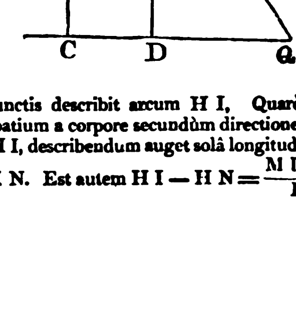

eam minuit quantitate ejus ipsius respectu infinitè parvâ, quæ itaque hic non est spectanda, itaque corpus arcum G H describere censendum est vi compositâ ex vi motus insiti et vi gravitatis. Et simili modo, tempore eodem quo describit arcum H I, vi gravitatis caderet per altitudinem N I. Quare (per Lem. X. Lib. I.) tempora quibus corpus describit arcus G H, H I, seu quibus cadit per altitudines L H, N I, sunt in subduplicatâ ratione harum altitudinem.

([c]) * *Et velocitates erunt* (11).

([d]) * *Et decrementum velocitatis.* Nam si velocitas per arcum H I, eadem esset ac velocitas per arcum G H, exponeretur per $\frac{GH}{T}$, est autem illa $\frac{HI}{t}$. Quarè si velocitas decrescat, illius decrementum tempore t factum, exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Si verò crescat, exponetur per $\frac{HI}{t} - \frac{GH}{T}$; hoc decrementum vel incrementum oritur a resistentia corpus retardante ejusque motui secundum directionem tangentis H N vel arcûs H I directè contraria (1) et a gravitate motum corporis descendentis accelerante, vis enim gravitatis in vires duas videlicet normalem et tangentialem divisa (24) corporis in curvâ descendentis motum per vim tangentialem accelerat quem vis normalis nec accelerat, nec retardat. Quarè si resistentia vi gravitatis tangentiali major est, motus retardatur, si minor acceleratur, si æqualis nec acceleratur nec retardatur.

([e]) * *Ut Galilæus demonstravit.* (Vid. dem. not 29. Lib. I.)

([f]) * *At in corpore,* &c. Nam solâ vi insitâ, corpus tempore t describeret tangentem H N, et vi gravitatis solâ altitudinem N I, viribus verò




conjunctis describit arcum H I, Quarè gravitas spatium a corpore secundùm directionem H N vel H I, describendum auget solâ longitudine H I — H N. Est autem $HI - HN = \frac{MI \times NI}{HI}$.

dine H I — H N seu $\frac{M I \times N I}{H I}$; ideóque generat tantum velocitatem $\frac{2 M I \times N I}{t \times H I}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, (a) et habebitur decrementum velocitatis ex resistentiâ solâ oriundum, nempe $\frac{G H}{T} - \frac{H I}{t} + \frac{2 M I \times N I}{t \times H I}$. Proindeque cùm gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2 N I}{t}$; (b) resistentia erit ad gravitatem ut $\frac{G H}{T} - \frac{H I}{t} + \frac{2 M I \times N I}{t \times H I}$ ad $\frac{2 N I}{t}$, sive ut $\frac{t \times G H}{T}$, $- H I + \frac{2 M I \times N I}{H I}$ ad 2 N I.

Jam pro abscissis C B, C D, C E (c) scribantur — o, o, 2 o. Pro ordinata C H scribatur P, (d) et pro M I scribatur series quælibet $Q o + R o o + S o^3 +$, &c. Et seriei termini omnes post primum, nempe $R o o + S o^3 +$, &c. (e) erunt N I, (f) et ordinatæ D I, E K, et B G erunt $P - Q o - R o o - S o^3 -$, &c. $P - 2 Q o - 4 R o o - 8 S o^3 -$, &c. et $P + Q o - R o o + S o^3 -$, &c. respectivè. Et quadrando

Si enim centro H et radio H N, descriptus intelligatur arcus circularis N R, secans H I in R, duo triangula I R N, I M H similia erunt, ob angulum M I H utrique triangulo communem, et angulos I R N, I M H rectos, ideóque æquales, undè erit H I : M I = N I : R I seu H I — H N; et propterea H I — H N $= \frac{M I \times N I}{H I}$. Cum igitur R I sit spatium tempore t vi gravitatis tangentiali descriptum (113) velocitas illa quam vis illa tempore t generat, exponetur (29. Lib. I.) per $\frac{2 R I}{t} = \frac{2 M I \times N I}{t \times H I}$.

(a) * *Et habebitur decrementum velocitatis ex solâ resistentiâ oriundum, nempe* $\frac{G H}{T} - \frac{H I}{t} + \frac{2 M I \times N I}{t \times H I}$, non solùm in eo casu quo resistentia vim gravitatis tangentialem superat, sed etiam in eo casu quo ab istâ superatur. Sit enim velocitatis decrementum ex solâ resistentiâ oriundum V, cùm incrementum velocitatis vi gravitatis tangentiali genitum sit $\frac{2 M I \times N I}{t \times H I}$, erit in primo casu $V - \frac{2 M I \times N I}{t \times H I} = \frac{G H}{T} - \frac{H I}{t}$ (113), ideóque $V = \frac{G H}{T} - \frac{H I}{t} + \frac{2 M I \times N I}{t \times H I}$; at in secundo casu erit (113) $\frac{2 M I \times N I}{t \times H I} - V = \frac{H I}{t} - \frac{G H}{T}$, et proinde $V = \frac{2 M I \times N I}{t \times H I} + \frac{G H}{T} - \frac{H I}{t}$, quæ eadem est expressio ac prius.

(b) * *Resistentia erit ad gravitatem*, &c. Vires enim acceleratrices vel retardatrices sunt ut velocitatum elementa quæ dato temporis momenta generant aut extinguunt, (13. Lib. I.)

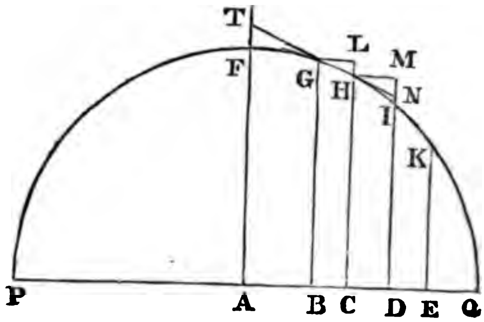
(c) * *Scribantur — o, o, 2 o.* Si enim abscissæ C D, C E affirmativè capiantur, abscissæ C B, &c. in contrariam partem sumptæ negativè debent exprimi.

(d) * *Et pro M I scribatur series quælibet.* Nam ordinatarum C H, D N differentia fluxionalis M I exprimi potest per seriem infinitam $Q o + R o o + S o^3 +$, &c. in quâ Q, R, S, &c. sunt quantitates finitæ hic generaliter sumptæ et postea in singulis casibus determinandæ, et o est incrementum nascens et constans abscissæ (552, 556. Lib. I.)

(e) * *Erunt N I*, &c. (552. Lib. I.)

(f) * *Et ordinatæ*, &c. Est enim D I = D M — M I = C H — M I = $P - Q o - R o o - S o^3 -$, &c. (per Hyp.); et quia C E = 2 o, si in valore ordinatæ D I loco o scribatur 2 o, abibit D I in E K = $P - 2 Q o - 4 R o o - 8 S o^3 -$, &c.; et simili modo quia C B = — o, si in valore ordinatæ D I loco + o scribatur — o, fiet D I = B G = $P + Q o - R o o + S o^3 -$, &c.

differentias ordinatarum B G — C H et C H — D I, et ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipsarum B C, C D, (g) habebuntur arcuum G H, H I quadrata $oo + QQoo - 2QRo^3 +$, &c. et $oo + QQoo + 2QRo^3 +$, &c.

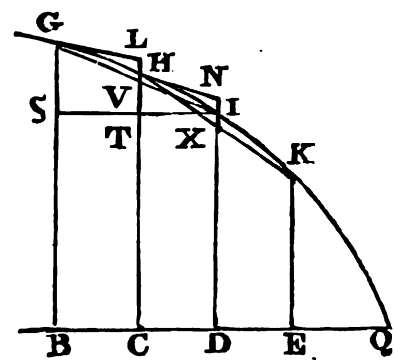



Quorum radices $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, et $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ sunt arcus G H et H I. Præterea si ab ordinatâ C H subducatur semisumma ordinatarum BG ac D I, et ab ordinatâ D I subducatur semisumma ordinatarum C H et E K, (h) manebunt arcuum G I et H K sagittæ $Roo$ et $Roo + 3So^3$. (k) Et hæ sunt lineolis L H et N I proportionales, ideóque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T et t: (l) et inde ratio $\frac{t}{T}$ est $\sqrt{\frac{R + 3So}{R}}$ seu $\frac{R + \frac{3}{2}So}{R}$;

(g) * *Habebuntur arcuum G H, H I quadrata, &c.* Est enim, ob angulum H M I rectum $HI^2 = HM^2 + MI^2$, et $HM = CD = o$, ac $MI = CH - DI = Qo + Roo + So^3 +$, &c. ideóque $HM^2 = oo$, $MI^2 = Q^2o^2 + 2QRo^3 + R^2o^4 + 2QSo^4 +$, &c.; unde $HI^2 = o^2 + QQo^2 + 2QRo^3 +$, &c. Negliguntur autem termini in quibus est $o^4$, $o^5$, &c. quod præ cæteris antecedentibus evanescant et ad rem nihil faciant. Quare extrahendo radicem quadratum fit $HI = o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, neglectis cæteris terminis negligendis: et simili modo invenitur $GH = o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$.

(h) * *Manebunt arcuum G I et H K sagittæ, &c.* Jungatur chorda G I secans C H in V, et ex puncto I demittatur ad B G perpendiculum I S secans C H in T. Erit, ob triangulorum I T V, I S G similitudinem I T ad I S, seu D C ad D B, id est, 1 ad 2, ut T V ad G S, et ideò $GS = 2VT$, et $GB = 2VT + SB = 2VT + DI$, et $GB + DI = 2VT + 2DI$, quare semisumma ordinatarum G B ac D I est $VT + DI$, seu V C, quæ si ab ordinatâ C H subducatur, remanebit arcûs G I sagitta V H. Et simili ratiocino patet arcûs H K sagittam I X æqualem esse differentiæ inter ordinatam D I et semisummam ordinatarum C H et E K.

(k) * *Et hæ sunt lineolis L H et N I proportionales.* Nam coëuntibus punctis B, C, D, E et G, H, I, K figuræ N H I X H, L G H V G




similes fiunt, et propterea latera homologa H V et I X, L H et N I proportionalia; sunt autem (ex demonstr.) lineolæ L H, N I ut quadrata temporum T, t, quibus describuntur arcus G H, H I.

(l) * *Et inde ratio $\frac{t}{T}$ est, &c.* Nam (ex demonst.) $\frac{t^2}{T^2} = \frac{IX}{HV} = \frac{Roo + 3So^3}{Roo} =$

et $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, substituendo ipsorum $\frac{t}{T}$, G H, H I, M I et N I valores jam inventos, (m) evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Et cùm 2 N I sit 2 R o o, resistentia jam erit ad gravitatem ut $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ad 2 R o o, id est, ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad 4 R R.

Velocitas autem ea est, quâcum corpus de loco quovis H, secundum tangentem H N egrediens, in parabolâ diametrum H C et latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ seu $\frac{1+QQ}{R}$ habente, (n) deinceps in vacuo moveri potest.

Et resistentia est ut medii densitas et quadratum velocitatis conjunctim, et propterea medii densitas est ut resistentia directè et quadratum velocitatis inversè, (o) id est, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè et $\frac{1+QQ}{R}$ inversè, hoc est, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. Q. e. i.

$\frac{R+3So}{R}$, et ideò $\frac{t}{T} = \sqrt{\frac{R+3So}{R}} = \sqrt{\frac{RR+3SRo}{RR}} = \frac{\sqrt{RR+3SRo}}{R}$; sed $\sqrt{RR+3SRo} = R + \frac{3SRo}{2R}$, neglectis terminis negligendis: quare erit $\frac{t}{T} = \frac{R+\frac{3}{2}So}{R} = 1 + \frac{3So}{2R}$.

(m) * *Evadit* $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Est enim $\frac{t \times GH}{T} = o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}} + \frac{\frac{3}{2}Soo\sqrt{1+QQ}}{R}$, neglecto termino in quo reperitur $o^3$, qui præ cæteris evanescit. Unde fit $\frac{t \times GH}{T} - HI = \frac{\frac{3}{2}Soo\sqrt{1+QQ}}{R} - \frac{2QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$; sed $2MI = 2Qo$, et $NI = Roo$ neglectis cæteris seriei terminis evanescentibus, ideóque $2MI \times NI = 2QRo^3$, atque proinde $\frac{2MI \times NI}{HI} = \frac{2QRo^2}{\sqrt{1+QQ}}$, neglecto in valore arcûs H I termino evanescente $\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$. Quare erit $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI} = \frac{3Soo\sqrt{1+QQ}}{2R}$.

(n) * *Deinceps in vacuo moveri potest.* Cùm enim velocitas per arcum H I, seu per tangentem nascentem H N, æquabilis censeri possit (5), et corpus eodem temporis momento quo vi insitâ describeret H N, vi gravitatis uniformi, omissa resistentia quæ hic ut nulla haberi debet (113), cadit per altitudinem N I; arcus nascens H I, quem corpus viribus conjunctis describit, usurpari potest pro arcu parabolæ, cujus est diameter H C (40. Lib. I.), tangens H N ordinatis parallela, et N I parallela et æqualis abscissæ cui responderet ordinata æqualis H N. Quare hujus parabolæ latus rectum erit $\frac{HN^2}{NI}$ (per Theor. I. de parab.), seu (per Lemma VII. Lib. I.) $\frac{HI^2}{NI} = \frac{oo+QQoo}{Roo} = \frac{1+QQ}{R}$, neglectis terminis negligendis. Si itaque corpus in vacuo deinceps moveretur, hanc parabolam describeret (40. Lib. I.)

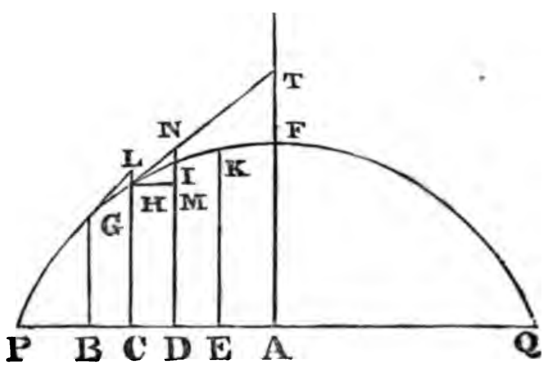
(o) * *Id est, ut,* &c. Quia enim resistentia est ad gravitatem constantem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad 4 R R, erit resistentia ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$. Velocitas autem est ut $\frac{HI}{t}$, et illius quadratum ut $\frac{HI^2}{t^2}$; et $HI^2$ est $oo + QQoo$, neglectis negligendis, $t^2$ verò est ut N I, seu ut R o o (ex demonstr.); adeóque velocitatis quadratum ut $\frac{1+QQ}{R}$. Quare medii densitas erit ut

*Corol.* 1. Si tangens H N producatur utrinque donec occurrat ordinatæ cuilibet A F in T: (p) erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis $\sqrt{1 + QQ}$, ideóque in supe-

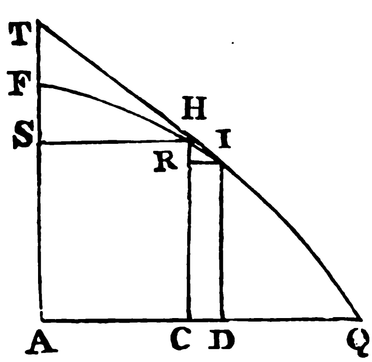
$\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4R(1+QQ)}$, et ob datum numerum $\frac{3}{4}$, ut $\frac{S\sqrt{1+QQ}}{R(1+QQ)} = \frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$.

114. Si resistentia esset ut medii densitas et velocitatis V dignitas quælibet $V^n$ conjunctim; cùm sit $V^n$ ut $\frac{HI^n}{t^n}$, sive ut $\frac{(1+QQ)^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$, medii densitas foret ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè et $\frac{(1+QQ)^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$ inversè, id est, directè ut $\frac{SR^{\frac{n-4}{2}}}{(1+QQ)^{\frac{n-1}{2}}}$.

(p) * *Erit* $\frac{HT}{AC}$ *æqualis*, &c. Ex punctis H et I demittantur ad A F et C H perpendicula H S et I R; et ob triangula I R H, H S T similia, erit H T ad H S seu A C ut H I ad I R vel C D, ideóque $\frac{HT}{AC} = \frac{HI}{CD} = \frac{o\sqrt{1+QQ}}{o} = \sqrt{1+QQ}$.



115. Hinc si resistentia sit ut

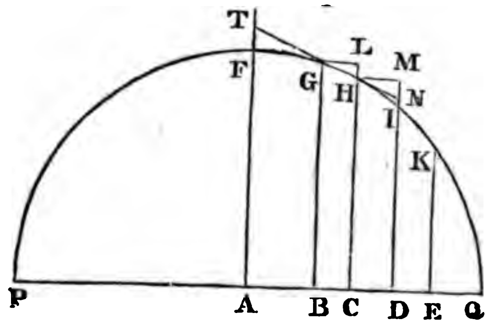


medii densitas et velocitatis dignitas $V^n$ conjunctim, erit resistentia ad gravitatem, ut $3S \times HT$ ad $4RR \times AC$, velocitatis dignitas n, ut $\frac{HT^n}{AC^n \times R^{\frac{n}{2}}}$, et medii densitas ut $\frac{SR^{\frac{n-4}{2}} \times AC^{n-1}}{HT^{n-1}}$, sive ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}\Big|^{n-1}$ (114.)

116. Superiores formulæ non solùm pro corporis descensu per arcum F Q, sed etiam pro ejusdem ascensu per arcum P F usurpari possunt. Corpore ascendente per arcum P F a P ad F, eadem fiat quæ pro descensu per arcum F Q constructio; et tempora quibus describuntur arcus G H, H I exponantur per T et t. Decrementum velocitatis tempore t factum erit $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur a resistentiâ et gravitate corporis ascendentis motum simul retardantibus. Gravitas in corpore cadente et spatium N I cadendo describente, generat velocitatem $\frac{2NI}{t}$; at in corpore arcum H I describente, minuit arcum illum solâ longitudine $HN - HI$ seu $\frac{MI \times NI}{HI}$, ideóque extinguit tantum velocitatem tangentialem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Auferatur hæc velocitas a decremento prædicto, et habebitur decrementum velocitatis ex resistentiâ solâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} - \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cùm gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem

rioribus pro $\sqrt{1 + QQ}$ scribi potest. Quâ ratione resistentia erit ad gravitatem ut $3\,S \times HT$ ad $4\,RR \times AC$, velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, et medii densitas erit ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$.

*Corol.* 2. Et hinc, si curva linea P F H Q definiatur per relationem inter basem seu abscissam A C et ordinatim applicatam C H, ut moris est; et valor ordinatim applicatæ resolvatur in seriem convergentem. Problema per primos seriei terminos expeditè solvetur, ut in exemplis sequentibus.




*Exempl.* 1. Sit linea P F H Q semicirculus super diametro P Q descriptus, et requiratur medii densitas quæ faciat ut projectile in hâc lineâ moveatur.

Bisecetur diameter P Q in A; dic A Q, n; A C, a; C H, e; et C D, o: et (q) erit $DIq$ seu $AQq - ADq = nn - aa - 2ao - oo$,

$-\frac{2NI}{t}$; resistentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} - \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, sive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI - \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam si pro abscissis B C, C D, C E scribantur $-o$, $o$, $2o$, et pro ordinata C H scribatur P; M I et N I erunt $Qo - Roo - So^3 -$, &c., et $Roo + So^3 +$, &c. Nam in arcu F Q (vide fig. Newt.) D I, seu $CH - MN - NI$, erat $P - Qo - Roo - So^3$, &c., ideóque M N erat $Qo$ (552. Lib. I.), et N I erat $Roo + So^3$; at in arcu P F est $DI = CH + MN - NI$, proindeque $DI = P + Qo - Roo - So^3$, &c., et hinc M I est $Qo - Roo - So^3$, &c. et N I est $Roo + So^3$. Et si in serie quæ valorem ordinatæ D I exprimit, loco o scribantur abscissæ C E, B C, sive $2o$, $-o$, habebuntur ordinatæ E K et B G, nempe $P + 2Qo - 4Roo - 8So^3$, &c., et $P - Qo - Roo + So^3$, &c. respectivè. Et quadrando differentias ordinatarum $CH - BG$ et $DI - CH$, et ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipsarum B C, C D, habebuntur arcuum G H, H I quadrata $oo + QQoo + 2QRo^3$, et $oo + QQoo - 2QRo^3$; quorum radices $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ et $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ sunt arcus G H et H I. Præterea si ab ordinatâ C H subducatur semisumma ordinatarum B G ac D I, et ab ordinata D I subducatur semisumma ordinatarum C H et E K, manebunt arcuum G I et H K sagittæ $Roo$ et $Roo + 3So^3$. Et hæ sunt lineolis L H, N I proportionales, ideóque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T et t, et inde ratio $\frac{t}{T}$ est, $\sqrt{\frac{R + 3So}{R}}$, seu $\frac{R + \frac{3}{2}So}{R}$; et $\frac{t \times GH}{T} - HI - \frac{2MI \times NI}{HI}$, substituendo ipsorum $\frac{t}{T}$, H I, G H, M I et N I valores jam inventos, evadit $\frac{3Soo}{2R} \times \sqrt{1 + QQ}$. Et cùm 2 N I sit $2Roo$, resistentia erit ad gravitatem ut $3S\sqrt{1 + QQ}$ ad $4RR$. Quemadmodum pro descensu inventum est; et Corollaria eadem quoque manent.

(q) * *Erit D I q seu*, &c. Est enim radius

seu e e — 2 a o — o o, (r) et radice per methodum nostram extractâ, fiet D I $= e - \frac{a\,o}{e} - \frac{o\,o}{2\,e} - \frac{a\,a\,o\,o}{2\,e^3} - \frac{a\,o}{2\,e^3} - \frac{a^3\,o^3}{2\,e^5}$, &c. Hic scribatur n n pro e e + a a, et evadet D I $= e - \frac{a\,o}{e} - \frac{n\,n\,o\,o}{2\,e^3} - \frac{a\,n\,n\,o^3}{2\,e^5}$, &c.

Hujusmodi series distinguo in terminos successivos in hunc modum. Terminum primum appello, in quo quantitas infinitè parva o non extat; secundum, in quo quantitas illa est unius dimensionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo trium est; et sic in infinitum. (s) Et primus terminus, qui hic est e, denotabit semper longitudinem ordinatæ C H insistentis ad initium indefinitæ quantitatis o. (t) Secundus terminus, qui hic est $\frac{a\,o}{e}$, denotabit differentiam inter C H et D N, id est, lineolam M N, quæ abscinditur complendo parallelogrammum H C D M, (u) atque ideò positionem tangentis H N semper determinat; ut in hoc casu capiendo M N ad H M ut est $\frac{a\,o}{e}$ ad o, seu a ad e. Terminus tertius, qui hic est $\frac{n\,n\,o\,o}{2\,e^3}$, designabit lineolam I N, quæ jacet inter tangentem et curvam, (x) ideòque determinat angulum contactus I H N seu curvaturam

A I = A Q, et ideò, ob angulum A D I rectum, D I² = A Q² — A D² = n n — a a — 2 a o — o o = e e — 2 a o — o o, ob C H² = e e = A Q² — A C² = n n — a a.

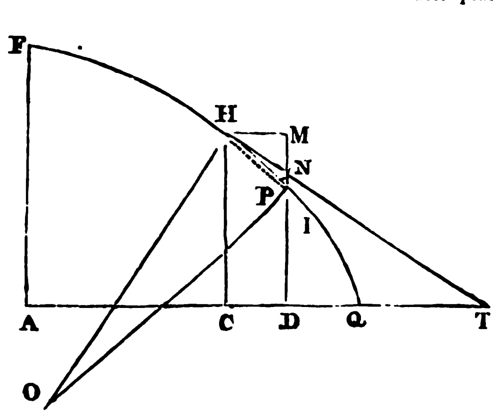
(r) * *Et radice per methodum nostram extractû*, seu per formulam generalem. (550. Lib. I.)

(s) * *Et primus terminus*. (552. Lib. I.)

(t) * *Secundus terminus*. (ibid.)

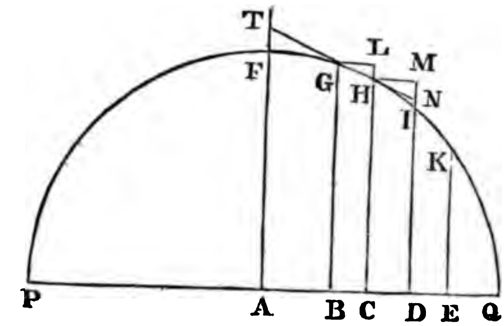
(u) 117. * *Atque ideò positionem tangentis H N semper determinat*. Producatur tangens H N ut diametro A Q occurrat in T; et propter triangulorum H M N, T C H similitudinem, erit C T : H C = H M : M N. Est verò generatim H M = o, et M N = Q o, ac Q coëfficiens secundi termini seriei generalis pro curvâ quâcumque (ex demonstr. Prop. X.); quare si capiatur C T ad H C ut est 1 ad Q habebitur subtangens C T.

(x) 118. * *Ideóque determinat angulum contactûs seu curvaturam*, &c. Sit O centrum circuli curvam F H Q osculantis in H; O H, O I radii, H P I chorda arcûs H I, N P arculus circularis centro H et radio H N descriptus.




Duo triangula I P N, I M H similia erunt, ob angulos ad P et M rectos et angulum ad I utrique triangulo communem; et ideò H I est ad

quam curva linea habet in H. (y) Si lineola illa I N finitæ est magnitudinis, designabitur per terminum tertium unà cum sequentibus in infinitum. At si lineola illa minuatur in infinitum, termini subsequentes evadent infinitè minores tertio, ideóque negligi possunt. (z) Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, et sic deinceps. Unde obiter patet usus non contemnendus harum serierum in solutione problematum, quæ pendent a tangentibus et curvaturâ curvarum.




Conferatur jam series $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ —, &c. cum serie $P - Qo - Roo - So^3$ —, &c. et perinde pro P, Q, R et S scribatur e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$, et $\frac{ann}{2e^5}$, et pro $\sqrt{1 + QQ}$ scribatur $\sqrt{1 + \frac{aa}{ee}}$ (a) seu $\frac{n}{e}$, et prodibit medii densitas ut $\frac{a}{ne}$, hoc est (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$, seu $\frac{AC}{CH}$, (b) id est, ut tangentis longitudo illa H T, quæ ad semidiametrum

HM ut NI ad NP, ac proinde $NP = \frac{HM \times NI}{HI}$. Anguli N H I, quem tangens H N cum subtensa H P I constituit, mensura est dimidius arcus H I, et anguli ad centrum H O I mensura est arcus totus H I (ex natura circuli); unde NP seu $\frac{HM \times NI}{HI}$ est ad H N seu H I (Lem. VII. Lib. I.) ut $\frac{1}{2}$ H I ad H O, et ideò radius osculi $HO = \frac{HI^3}{2HM \times NI}$. Et quia (ex demonst. Prop. X.) $HI = o\sqrt{1 + QQ}$, $HM = o$, ac $NI = Roo$; erit $HO = \frac{(1 + QQ)^{\frac{3}{2}}}{2R}$. Sed angulus contactus et curvatura curvæ lineæ F H Q in H est ut radius osculi H O inverse (121. Lib. I.), id est, ut $\frac{2R}{(1 + QQ)^{\frac{3}{2}}}$. Quare angulus ille, seu curvatura in H, datis secundo et tertio termino seriei in quam valor ordinatim applicatæ resolvitur, determinabitur.

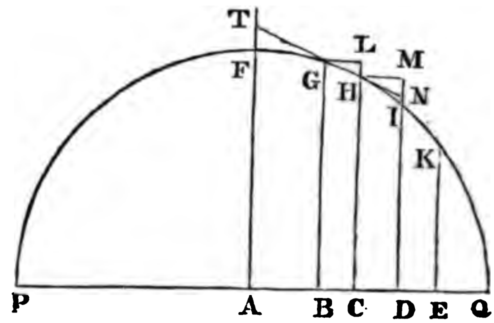
(y) * *Si lineola illa I N*, &c. (552. 553. Lib. I.)

(z) * *Terminus quartus determinat variationem curvaturæ.* Quoniam differentia lineolarum L H et N I quarto seriei termino proportionalis est (554) et per lineolam N I determinatur angulus contactus seu curvatura curvæ in puncto H (118) et per lineolam L H curvatura in puncto G; per harum linearum differentiam seu per quartum seriei terminum determinabitur differentia seu variatio curvaturæ, ductâque aliâ tangente similiter determinabitur variatio variationis, et sic deinceps.

(a) * *Seu* $\frac{n}{e}$. Est enim $1 + \frac{aa}{ee} = \frac{ee + aa}{ee} = \frac{nn}{ee}$.

(b) * *Id est, ut tangentis longitudo illa H T*, &c. Jungatur radius A H, et ob angulum rectum quem tangens T H cum radio A H constituit, parallelasque A T, C H, triangulum A H C simile erit triangulo A T H, et inde est T H ad H A, ut A C ad H C, id est, $\frac{AC}{HC}$ est

A F ipsi P Q normaliter insistentem terminatur: et resistentia erit ad gravitatem ut 3 a ad 2 n, id est, ut 3 A C ad circuli diametrum P Q: (c) velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$. Quare si corpus justâ cum velocitate secundùm lineam ipsi P Q parallelam exeat de loco F, et medii densitas in singulis locis H sit ut longitudo tangentis H T, et resistentia etiam in loco aliquo H sit ad vim gravitatis ut 3 A C ad P Q, corpus illud describet circuli quadrantem F H Q. Q. e. i.




At si corpus idem de loco P, secundum lineam ipsi P Q perpendicularem egrederetur, et in arcu semicirculi P F Q moveri inciperet, sumenda esset A C seu a ad contrarias partes centri A, et propterea signum ejus mutandum esset et (d) scribendum $-$ a pro $+$ a. Quo pacto prodiret medii densitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem densitatem, hoc est, quæ motus corporum accelerat, natura non

ut $\frac{HT}{AH}$, seu ut H T ob datum radium A H.

(c) * *Velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$.* Nam (ex demonstr. Prop. X.) velocitas est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$, id est, ut $\sqrt{2e}$, vel $\sqrt{2CH}$ ideóque ut $\sqrt{CH}$.

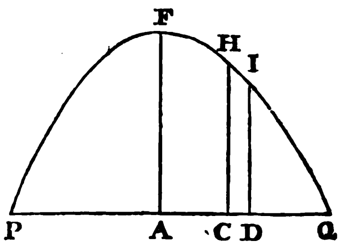
119. Quoniam igitur velocitas est ut $\sqrt{CH}$, medii densitas ut tangens H T, et resistentia ut A C, (quia gravitas et circuli diameter P Q data sunt) corpore perveniente ad punctum Q lineæ horizontalis, velocitas ejus nulla erit, medii densitas infinita, resistentia finita. Si verò ponatur C H negativa, ut corpus infra horizontalem P Q pergat; fiet velocitas ut $\sqrt{-CH}$, quantitas imaginaria; et ideò corpus non potest infra horizontalem P Q descendere. At dum corpus est in F, velocitas ejus est ut $\sqrt{AF}$, medii densitas nulla, et resistentia nulla.

(d) * *Scribendum $-$ a pro $+$ a.* Nam formula quæ densitatem medii exponit, corporis ascensui, et descensui communis est, sicut et aliæ formulæ quæ resistentiam et velocitatem exponunt (116); et idcirco ut quantitas quæ densitatem medii corpore descendente exponit eamdem exponat pro corporis ascensu per eumdem vel similem et æqualem arcum, substituendus est in illâ quantitate valor abscissæ, quæ corpore descendente hic positiva est, ascendente negativa.

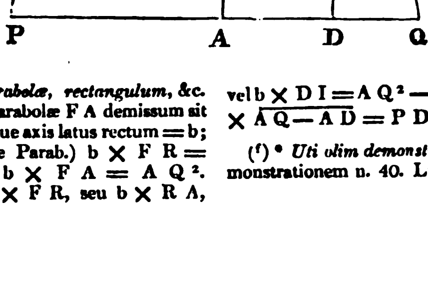
120. Atque hinc generatim colligitur eumdem curvæ arcum, vel similes et æquales utrinque ab axe arcus, non posse ascensu et descensu describi in uno medio densitatis utcumque variabilis, id est, si arcus unus ascensu describi potest, descensu describi non posse, et contra. Nam si in solutione problematis hujusce pro corporis descensu per arcum F Q, origo abscissæ positivæ A C statuatur in A, et pro C B, C D, C E scribantur $-$o, o, 2 o, erit resistentia ut $\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$. Pro ascensu per eumdem arcum a Q ad F, abscissa eadem A C sumenda erit negativè, cùmque sit o abscissæ fluxio, loco C B, C D, C E scribendum erit o, $-$o, $-$ 2 o in valoribus linearum M I, N I, D I, E K et B G; et absoluto calculo, ut in eâdem pro descensu solutione, resistentia pro ascensu invenietur proportionalis quantitati $-\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$, quæ negativa est, si prior $+\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$, quæ pro descensu erat, positiva sit; et contra.

admittit: et propterea naturaliter fieri non potest, ut corpus ascendendo a P describat circuli quadrantem P F. Ad hunc effectum deberet corpus a medio impellente accelerari, non a resistente impediri.

*Exempl.* 2. Sit linea P F Q parabola, axem habens A F horizonti P Q perpendicularem, et requiratur medii densitas, quæ faciat ut projectile in ipsâ moveatur.




(ᵉ) Ex naturâ parabolæ, rectangulum P D Q æquale est rectangulo sub ordinatâ D I et rectâ aliquâ datâ: hoc est, si dicantur recta illa b; P C, a; P Q, c; C H, e; et C D, o; rectangulum a + o in c — a — o seu a c — a a — 2 a o + c o — o o æquale est rectangulo b in D I, ideóque D I æquale $\frac{ac - aa}{b} + \frac{c - 2a}{b} o - \frac{oo}{b}$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\frac{c - 2a}{b}$ o pro Q o, tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro R o o. Cum verò plures non sint termini, debebit quarti coëfficiens S evanescere, et propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1 + QQ}}$, cui medii densitas proportionalis est, nihil erit. Nullâ igitur medii densitate movebitur projectile in parabolâ, (ᶠ) uti olim demonstravit Galilæus. Q. e. i.

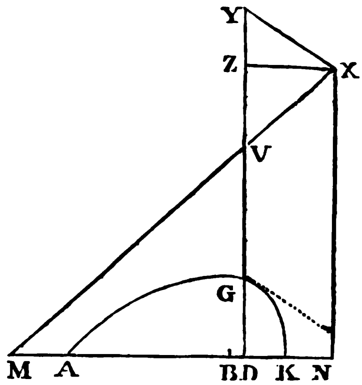



(ᵉ) * *Ex natura parabolæ, rectangulum,* &c. Ex puncto I ad axem parabolæ F A demissum sit perpendiculum I R, sitque axis latus rectum = b; erit (per Theor. I. de Parab.) b × F R = R I² = A D², et b × F A = A Q². Quare b × F A — b × F R, seu b × R A, vel b × D I = A Q² — A D² = $\overline{AQ + AD} \times \overline{AQ - AD}$ = P D × D Q. Q. e. d.

(ᶠ) * *Uti olim demonstravit Galilæus.* Vide demonstrationem n. 40. Lib. I.

*Exempl.* 3. Sit lineâ A G K hyperbola, asymptoton habens N X plano horizontali A K perpendicularem; et quæratur medii densitas, quæ faciat ut projectile moveatur in hâc lineâ.

Sit M X asymptotos altera, ordinatim applicatæ D G productæ occurrens in V; et ex naturâ hyperbolæ (g) rectangulum X V in V G dabitur. (h) Datur autem ratio D N ad V X, et propterea datur etiam rectangulum D N in V G. Sit illud b b: et completo parallelogrammo D N X Z; dicatur B N, a; B D, o; N X, c; et ratio data V Z ad Z X vel D N ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit D N æqualis a — o, V G æqualis $\frac{bb}{a-o}$, V Z æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, et G D seu N X — V Z — V G æqualis




$c - \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{a-o}$. Resolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ (i) in seriem convergentem $\frac{bb}{a} + \frac{bb}{aa}o + \frac{bb}{a^3}oo + \frac{bb}{a^4}o^3$, &c. et fiet G D æqualis $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o - \frac{bb}{a^3}o^2 - \frac{bb}{a^4}o^3$, &c. (k) Hujus seriei terminus secundus $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ usurpandus est pro Q o, tertius cum signo mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro R $o^2$, et quartus cum signo etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro S $o^3$, eorumque coëfficientes $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ et $\frac{bb}{a^4}$ scribendæ sunt in

(g) * *Rectangulum X V in V G dabitur,* per Theor. IV. de Hyp.

(h) * *Datur autem ratio D N ad V X,* quæ eadem est cum ratione data M N ad M X, ob parallelas D V, N X.

(i) * *In seriem convergentem,* divisione in infinitum productâ.

(k) *Hujus seriei,* &c. Est enim hæc series æqualis seriei P — Q o — R o o — S $o^3$ —, &c., et singuli illius termini singulis terminis hujus æquantur; id est, $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a}$ est P, seu ordinata quæ per punctum B ad hyperbolam duceretur; $+ \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ est — Q o, et ideò $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa} = -$ Q; sed quia in expressionibus resistentiæ, densitatis, et velocitatis semper reperitur quadratum Q Q, quod idem manet, seu radix illius Q affirmativè sumatur, seu negativè, nihili interest scribere $\frac{bb}{aa} - \frac{m}{n}$, aut $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$ pro Q. Secundus autem seriei terminus $\frac{-bb}{a^3}o^2$ est — R $o^2$, et ideò, mutatis signis, fit $\frac{bb}{a^3} =$ R; tertius terminus $\frac{-bb}{a^4}o^3$ est — S $o^3$, atque proinde $\frac{bb}{a^4} =$ S.

regula superiore pro Q, R et S. Quo facto prodit medii densitas ut

$$\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}\ (^l)\ \text{seu}\ \frac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}}$$

($^m$) id est si in V Z sumatur V Y æqualis V G, fit $\frac{1}{XY}$. Namque a a et $\frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$ sunt ipsarum X Z et Z Y quadrata. ($^n$) Resistentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet 3 X Y ad 2 Y G; ($^o$) et velocitas ea est, quâcum corpus in parabolâ pergeret verticem G, diametrum D G, et latus rectum $\frac{XY\ \text{quad.}}{VG}$ habente. Ponatur itaque quod medii densitates in locis singulis G sint reciprocè ut distantiæ X Y, quodque resistentia in loco aliquo G sit ad gravitatem ut 3 X Y ad 2 Y G; et corpus de loco A, justâ cum velocitate emissum, describet hyperbolam illam A G K. Q. e. i.

*Exempl.* 4. Ponatur indefinitè, quod linea A G K hyperbola sit, centro X, asymptotis M X, N X eâ lege descripta, ut constructo rectangulo X Z D N cujus latus Z D secet hyperbolam in G et asymptoton ejus in V, fuerit V G reciprocè ut ipsius Z X vel D N dignitas aliqua D N$^n$, ($^p$) cujus index est numerus n: et quæratur medii densitas, quâ projectile progrediatur in hác curvâ.

($^l$) • *Seu*, numeratore et denominatore in $\frac{a^4}{bb}$ ductis.

($^m$) • *Id est, si in V Z sumatur*, &c. Est enim $VG = \frac{bb}{a-o} = \frac{bb}{a}$, et $VZ = \frac{m}{n}\overline{a-o} = \frac{m}{n}a$, ubi evanescit B D, seu o. Quare $VY - VZ = ZY = \frac{bb}{a} - \frac{m}{n}a$; et quia $ZX = DN = a$, et $YX^2 = YZ^2 + ZX^2$ erit $YX^2 = aa + \frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$; ideóque medii densitas ut $\frac{1}{XY}$.

($^n$) • *Resistentia autem*, &c. Resistentia est ad gravitatem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad 4 R R, id est, ut $\frac{3bb}{a^4} \times \sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mb^2}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}$ ad $\frac{4b^4}{a^6}$, sive dividendo per $\frac{bb}{a^5}$, ut $3\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}$ ad $\frac{4bb}{a}$, seu ut 3 X Y ad 4 V G = 2 Y G.

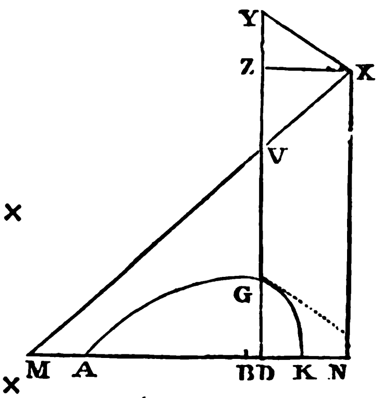
($^o$) • *Et velocitas*, &c. Hujus parabolæ latus rectum est $\frac{1+QQ}{R} = \frac{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}}$

$$= \frac{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}{\frac{bb}{a}} = \frac{YX^2}{VG}.$$

Velocitas autem est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$ adeóque ut $\frac{YX}{\sqrt{VG}}$.

($^p$) • *Cujus index est numerus n*, positivus. Hanc autem hyperbolam, dum producitur, ad

Pro B N, B D, N X scribantur A, O, C respective, sitque V Z ad X Z vel D N ut d ad e, et V G æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, et erit D N æqualis A — O, $VG = \frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$, $VZ = \frac{d}{e}\overline{A-O}$, et G D seu N X — V Z — V G æqualis $C - \frac{d}{e}A + \frac{d}{e}O - \frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$.




(q) Resolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$ in seriem infinitam $\frac{bb}{A^n} + \frac{nbb}{A^{n+1}}O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}} \times bbO^3$, &c. ac fiet G D æqualis $C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^n} + \frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 - \frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}} \times bbO^3$, &c. Hujus seriei terminus secundus $\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O$ usurpandus est pro $Qo$, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ pro $Ro^2$, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}} \times bbO^3$ pro $So^3$. Et inde medii densitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, (r) in loco quovis

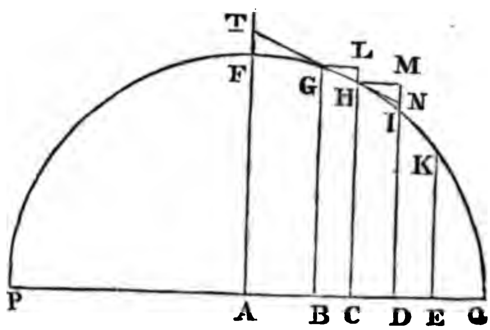
lineas X M, X N etiam productas continuo accedere, easque non nisi in distantiâ infinitâ contingere posse manifestum est. Cùm enim sit V G ut $\frac{1}{DN^n}$, ubi D N = o, hyperbola rectam X N attingit, et distantia V G infinita evadit; et ubi D N infinita fit, V G est nihil, et ideò hyperbola alteram asymptoton X M tangit, in distantia infinita ab asymptoto X N.

(q) * *Resolvatur terminus ille* $\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$, seu $bb \times \overline{A-O}^{-n}$, in seriem infinitam per formulam generalem (548. Lib. I.), et invenietur $bb \times \overline{A-O}^{-n} = bbA^{-n} + \frac{n}{1}bbA^{-n-1}O + \frac{n \times \overline{n+1}}{1.2} \times bbA^{-n-2}O^2 + \frac{n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2}}{1.2.3}bbA^{-n-3}O^3 +$ &c. $= \frac{bb}{A^n} + \frac{nbbO}{A^{n+1}} + \frac{\overline{nn+n} \times bbO^2}{2A^{n+2}} + \frac{n^3+3n^2+2n}{6A^{n+3}} \times bbO^3 +$ &c.; quo enim modo quo in n. 551. demonstravimus formulam ad potentias, quorum exponentes sunt fracti, applicari posse, eodem ferè modo eam ad potentias quorum exponens negativus est, applicari debere constabit.

(r) * *In loco quovis G fit*, &c. Invenitur enim $\frac{S}{R} = \frac{n+2}{3A}$, et $\sqrt{1+QQ} = \sqrt{1 + \frac{dd}{ee} - \frac{2dnbb}{eA^{n+1}} + \frac{nnb^4}{A^{2n+2}}}$; et ideò, ob datum numerum $\frac{n+2}{3}$, $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ est ut $\frac{1}{\sqrt{AA + \frac{dd}{ee}AA - \frac{2dnbbA}{eA^n} + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}}}$

G, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$, ideóque si in V Z capiatur V Y æqualis n × V G, densitas illa est reciprocè ut X Y. Sunt enim $A^2$ et $\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}$ (s) ipsarum X Z et Z Y quadrata. Resistentia autem in eodem loco G (t) fit ad gravitatem 3 S in $\frac{XY}{A}$ ad 4 R R, id est, ut X Y ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ V G. Et velocitas ibidem ea ipsa est, quâcum corpus projectum in parabolâ pergeret, verticem G, diametrum G D (u) et latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ seu $\frac{2\,XY\text{ quad.}}{nn+n\text{ in }VG}$ habente. Q. e. i.

*Scholium.*




Eâdem ratione quâ prodiit densitas medii ut $\frac{S\times AC}{R\times HT}$ in Corollario primo, si resistentia ponatur ut velocitatis V dignitas quælibet $V^n$, (x) prodibit densitas medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}\times\overline{\frac{AC}{HT}}\Big|^{n-1}$. (y) Et

(s) * *Ipsarum X Z et Z Y quadrata.* Nam X Z = D N = A (Hyp.), et Z Y = V Y − V Z = n × V G − $\frac{d}{e}$ A = $\frac{nbb}{A^n}-\frac{d}{e}A$; aut Z Y = V Z − V Y = $\frac{d}{e}A-\frac{nbb}{A^n}$, prout Y V major vel minor est quam V Z. Quare cùm sit $XY^2 = XZ^2 + ZY^2$, densitas erit ut $\frac{1}{XY}$.

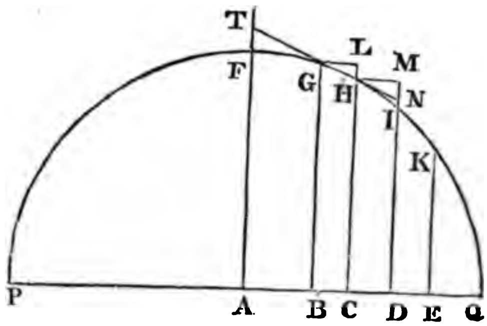
(t) * *Fit ad gravitatem ut,* &c. Quoniam (ex dem.) $\frac{XY}{A}=\sqrt{1+QQ}$, erit $3S\sqrt{1+QQ}$ = $\frac{3S\times XY}{A}$, et inde resistentia ad gravitatem ut $\frac{3S\times XY}{A}$ ad 4 R R, vel ut X Y ad $\frac{4RR\times A}{3S}$; sed $4RR\times A=\frac{\overline{nn+n}|^2\times b^4}{A^{2n+3}}$ et $3S=\frac{\overline{nn+n}\times\overline{n+2}|bb}{2A^{n+3}}$, ideóque $\frac{4RRA}{3S}=\frac{\overline{2nn+2n}\times bb}{\overline{n+2}\times A^n}=\frac{2nn+2n}{n+2}$ × V G, ob V G = $\frac{bb}{A^n}$. Quare resistentia est ad gravitatem ut X Y ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ × V G.

(u) * *Et latus rectum,* &c. Est enim $\frac{XY^2}{A^2}$ = 1+Q Q, et hinc $\frac{1+QQ}{R}=\frac{2XY^2\times A^n}{\overline{nn+n}\times bb}$ = $\frac{2XY^2}{\overline{nn+n}\times VG}$, ob V G = $\frac{bb}{A^n}$. Unde velocitas quæ est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$, erit ut $\frac{YX}{\sqrt{VG}}$, ob datam numerum $\frac{2}{nn+n}$.

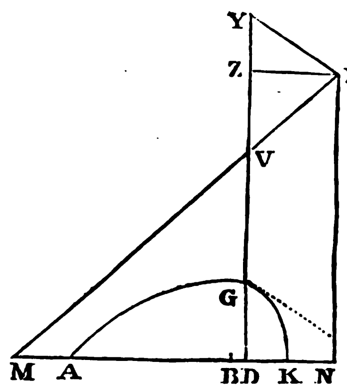
(x) * *Prodibit densitas ut medii ut,* &c. (115.)

(y) * *Et propterea,* &c. Si enim fuerit

propterea si curva inveniri potest eâ lege, ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{\frac{HT}{AC}}|^{n-1}$, vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}|^{n-1}$: corpus movebitur in hâc curvâ in uniformi medio cum resistentia quæ sit ut velocitatis dignitas $V^n$. Sed redeamus ad curvas simpliciores.




Quoniam motus non fit in parabolâ nisi in medio non resistente, in hyperbolis verò hic descriptis fit per resistentiam perpetuam; perspicuum est quod linea, quam projectile in medio uniformiter resistente describit, propius (z) accedit ad hyperbolas hasce quàm ad parabolam. Est utique linea illa hyperbolici generis, (a) sed quæ circa verticem magis distat ab asymptotis; in partibus a vertice remotioribus propius ad ipsas accedit quàm pro ratione hyperbolarum quas hic descripsi. Tanta verò non est inter has et illam differentia, quin illius loco possint hæ in rebus practicis non incommodè adhiberi. Et utiliores forsan futuræ sunt hæ, quàm hy-



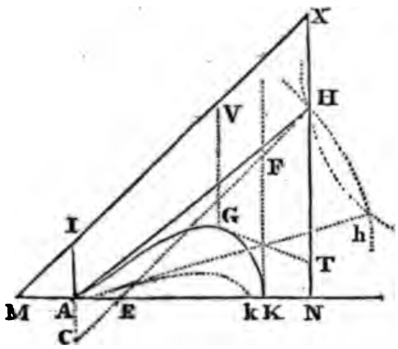

$\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$ in ratione a ad b, erit $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} = \frac{a}{b} \times \frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$, et $\frac{S \times AC^{n-1}}{R^{\frac{4-n}{2}} \times HT^{n-1}} = \frac{a}{b}$, id est densitas medii ut quantitas data $\frac{a}{b}$, et proinde uniformis. Est autem (per Cor. 1. Prop. X.) $\frac{HT}{AC} = \sqrt{1+QQ}$: quare si data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$, data quoque erit ratio quadratorum $\frac{S^2}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{1+QQ}|^{n-1}$, et contra.

(z) * *Accedit ad hyperbolas hasce*, cum iis tamen perfecte convenire nunquam potest, quod in hisce hyperbolis densitas medii reciprocè proportionalis sit rectæ variabili X Y, et præterea non satis manifestum sit curvam, quam projectile in medio uniformi describit in hypothesi resistentiæ velocitatis quadrato proportionalis, habere asymptotum verticalem ut X N: cùm præsertim in hâc resistentiæ hypothesi spatium motu horizontali insito descriptum, semotâ gravitate, infinitum evadat (per Cor. 1. Prop. V.) Verumtamen inveniri possunt hyperbolæ in quibus pro parte illâ exiguâ curvæ A G K, quæ in rebus practicis necessaria est, recta X Y sit quam proximè constans, et proindè medii densitas quam proxime uniformis; quo fit ut curvæ illæ in rebus practicis non incommodè adhibere possint.

(a) * *Sed quæ circa verticem*, &c. Hæc demonstrabuntur infra in notâ (b).

perbola magis accurata et simul magis composita. Ipsæ verò in usum sic deducentur.

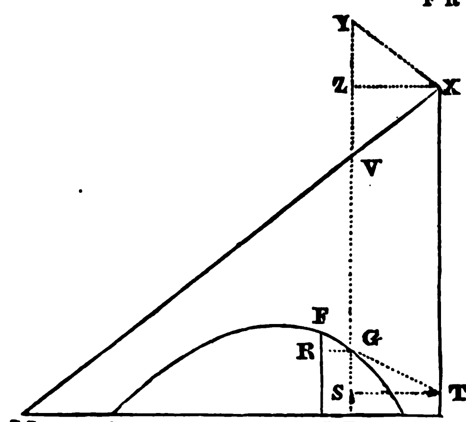
Compleatur parallelogrammum X Y G T, (b) et recta G T tanget hyperbolam in G, ideóque densitas medii in G, est reciprocè ut tangens G T, et velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, resistentia autem ad vim gravitatis ut G T ad $\frac{2nn + 2n}{n + 2}$ in G V.




Proinde si corpus de loco A secundùm rectam A H projectum describat hyperbolam A G K, et A H producta occurrat asymptoto N X in H, actaque A I eidem parallela occurrat alteri asymptoto M X in I: (c) erit medii densitas in A reciprocè ut A H, et corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac resistentia ibidem ad gravitatem ut A H ad $\frac{2nn + 2n}{n + 2}$ in A I. Unde prodeunt sequentes regulæ.

(d) *Reg.* 1. Si servetur tum medii densitas in A, tum velocitas quâcum

(b) * *Et recta G T tanget hyperbolam in G.* Ex puncto G ad ordinatam B F per B ductam, et ex puncto T ad ordinatam D G demissa sint perpendicula G R et T S, sitque G T tangens in G. Erit F R ad R G seu B D, ut G S ad S T, ob triangula similia F R G, G S T. Sed F R est Q o seu $\frac{nbbO}{A^{n+1}} - \frac{d}{e}O$, B D est O, et S T = Z X = A. Quare erit $\frac{nbb}{A^{n+1}} - \frac{d}{e}$ ad 1, seu $\frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$ ad A, ut G S ad Z X seu A. Supra invenimus Z Y = $\frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$. Ergo Z Y = G S; et ideò tangens G T æqualis est et parallela rectæ Y X. Est autem (ex demonstr.) densitas medii in G reciprocè ut Y X: quare densitas medii in G est reciprocè ut tangens G T, velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GT^2}{GV}}$, et resistentia ad gravitatem ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2} \times$ G V.

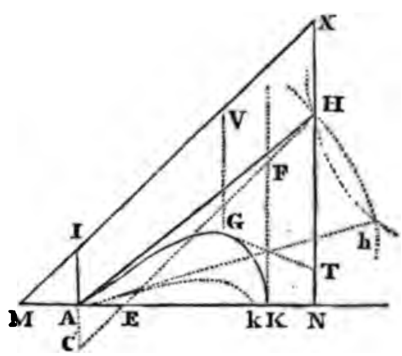



(c) * *Erit medii densitas,* &c. Coincidente puncto G cum A, tangens G T cum tangente A H congruit, et recta V G cum A I, proindeque *medii densitas in A est reciprocè ut A H, et corporis,* &c.

(d) * *Reg.* 1. Manentibus indice hyperbolæ n et densitate medii in A, manet tangentis longitudo A H quæ densitati reciprocè proportionalis

corpus projicitur, et mutetur angulus N A H; manebunt longitudines A H, A I, H X. Ideóque si longitudines illæ in aliquo casu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo N A H expeditè determinari potest.

(e) *Reg.* 2. Si servetur tum angulus N A H, tum medii densitas in A, et mutetur velocitas quâcum corpus projicitur; servabitur longitudo A H, et mutabitur A I in duplicatâ ratione velocitatis reciprocè.




(f) *Reg.* 3. Si tam angulus N A H, quàm corporis velocitas in A, gravitasque acceleratrix servetur, et proportio resistentiæ in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quâcunque; augebitur proportio AH ad A I in eâdem ratione, manente parabolæ prædictæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{A\,H\,q}{A\,I}$: et propterea minuetur A H in eâdem

est. Manente velocitate quâcum corpus e loco A projicitur, manet linea $\sqrt{\frac{A\,H^2}{A\,I}}$ quæ est ut velocitas; et ideò cùm data sit A H, datur et A I. Ob parallelas G T, Y X, est $T\,X = G\,Y = G\,V + V\,Y = G\,V + n \times G\,V$ (Exemp. 4.), et quia coincidente puncto G cum A, fit $G\,V = A\,I$, et $T\,X = H\,X$; erit $H\,X = A\,I + n \times A\,I$. Quare ob datas quantitates A I et n, datur et H X. Unde si longitudines illæ A H, A I, et H X in aliquo casu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo N A H expedite determinari potest. His enim datis, dantur puncta A, H et I. Per H ducatur X H N recta horizontali A N verticalis, et dabitur punctum N; et quia data est H X, dabitur etiam punctum X; datis verò punctis duobus X et I, dabitur recta X I M cum puncto M ubi horizontalem M N secat. Unde ductâ quâvis rectâ V D ad horizontalem A N normali, si in ea capiatur V G ad A I, ut est $A\,N^n$ ad $D\,N^n$, vel ut $X\,I^n$ ad $X\,V^n$, dabitur punctum G in trajectoria A G K. Est enim (Exemplo 4.) ordinata quævis V G ad alteram ordinatam I A, ut $A\,N^n$ ad $D\,N^n$, seu ut $X\,I^n$ ad $X\,V^n$.

(e) * *Reg.* 2. Servatâ medii densitate in A, servabitur tangentis longitudo A H, quæ est ut densitas inversè. Et quia velocitas in A est ut $\sqrt{\frac{A\,H^2}{A\,I}}$, et velocitatis quadratum ut $\frac{A\,H^2}{A\,I}$, id est, ut $\frac{1}{A\,I}$ ob datam A H; erit A I velocitatis quadrato reciprocè proportionalis.

(f) * *Reg.* 3. Datâ corporis velocitate et gravitate acceleratrice in A, datur longitudo $\frac{A\,H^2}{A\,I}$ tum velocitatis quadrato, tum lateri recto parabolæ (Exemp. 4.) proportionalis. Est autem resistentia motrix, si ita loqui fas est, ad gravitatem motricem, ut A H ad $\frac{2\,n\,n + 2\,n}{n + 2} \times A\,I$ (Exemp. 4.). Quare si proportio resistentiæ motricis in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quacumque, augebitur proportio A H ad $\frac{2\,n\,n + 2\,n}{n + 2}$ A I, seu, ob datum numerum $\frac{2\,n\,n + 2\,n}{n + 2}$ augebitur proportio A H ad A I in eâdem ratione; et quia longitudo $\frac{A\,H^2}{A\,I}$ constans est, ac proinde $\frac{A\,H}{A\,I}$ est ut $\frac{1}{A\,H}$, et A I ut $A\,H^2$, necessum est ut A H minuatur in ratione quâ augetur $\frac{A\,H}{A\,I}$, et ut A I minuatur in ratione illâ duplicatâ.

ratione, et A I minuetur in ratione illâ duplicatâ. (g) Augetur verò proportio resistentiæ ad pondus, ubi vel gravitas specifica sub æquali magnitudine fit minor, vel medii densitas major, vel resistentia, ex magnitudine diminutâ diminuitur in minore ratione quàm pondus.

(h) *Reg.* 4. Quoniam densitas medii prope verticem hyperbolæ major

(g) 121. * *Augetur verò proportio resistentiæ ad pondus, &c.* Corpus specificè gravius vel levius dicitur, quod sub æquali volumine majus vel minus pondus habet quàm alterum corpus quocum comparatur; et ideò gravitas specifica corporis, volumine dato, est ut ipsius pondus absolutum, id est, datâ gravitate acceleratrice, ut corporis massa (per defin. 7. et not. 3. Lib. I.) At, dato volumine, massa est ut densitas (2. Lib. I.); quare gravitas specifica corporis est ipsius densitati proportionalis. Augetur itaque proportio resistentiæ ad gravitatem motricem seu ad corporis pondus, tum ubi manentibus corporis volumine, figurâ et velocitate ac medii densitate, manenteque proinde resistentiâ, gravitas specifica fit minor; tum ubi, cæteris paribus, medii densitas augetur, quo casu medii resistentia crescit cum densitate, et corporis pondus in fluido densiori et specificè graviori magis sublevati minuitur; tum ubi resistentia ex magnitudine corporis diminutâ, diminuitur in minori ratione quàm pondus. Ex quibus liquet tertiam regulam determinandis motibus corporum variæ magnitudinis et densitatis accommodatam esse.

122. *Lemma.* Datâ curvâ A G K, invenire minimam tangentium G T. Quoniam (ex dem. in Exemp. 4.) $XY^2 = GT^2 = A^2 + \frac{dd}{ee} \times A^2 - \frac{2dnbb}{eB^{n-1}} + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$; hujus quantitatis, in quâ si detur curva A G K, sola est variabilis A, fluxio ponenda est nihilo æqualis (48.). Brevitatis causâ dicantur $1 + \frac{dd}{ee} = f$, $\frac{2dnbb}{e} = 2g$, $nnb^4 = h$, et $A = x$; erit $GT^2 = fxx - 2gx^{1-n} + hx^{-2n}$; et sumptis fluxionibus, $o = 2fxdx + \overline{n-1} \times 2gx^{-n}dx - 2nhx^{-2n-1}dx$. Dividatur æquatio tota per $2xdx$, et fiet $o = f + \overline{n-1}\,gx^{-n-1} - nhx^{-2n-2}$; et multiplicando per $x^{2n+2}$, $fx^{2n+2} + \overline{n-1}\,gx^{n+1} = nh$, unde eruitur, ut fit in resolutione æquationum secundi gradus, $x^{n+1} = \frac{\sqrt{(n-1)^2gg + 4nhf} - (n-1)g}{2f}$, et hinc habetur

$$x = \left(\frac{\sqrt{(n-1)^2gg + 4nhf} - (n-1)g}{2f}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Quæ si loco x substituatur, hic ipsius valor in æquatione $GT = \sqrt{fxx - 2gx^{1-n} + hx^{-2n}}$, obtinebitur minima tangentium. Q. e. i.

123. *Corol.* Si curva A G K sit hyperbola conica, erit index $n = 1$, & ideò $n - 1 = o$, et $x = \sqrt[4]{\frac{h}{f}}$. Unde invenitur $GT^2 = f\sqrt[2]{\frac{h}{f}} - 2g + \frac{h}{\sqrt{\frac{h}{f}}} = 2\sqrt[2]{hf} - 2g = \frac{2bb}{e} \times \sqrt{ee+dd} - \frac{2dbb}{e} = 2bb \times \frac{[\sqrt{ee+dd} - d]}{e}$. Quia vero (Exemp. 4.) $d : e = VZ : XZ = XN : MN$, ac proinde $dd : ee = XN^2 : MN^2$, et componendo $dd + ee : ee = XN^2 + MN^2$, seu $MX^2 : MN^2$, atque adeò $\frac{\sqrt{ee+dd}}{e} = \frac{MX}{MN}$, et $\frac{d}{e} = \frac{XN}{MN}$; erit $\frac{\sqrt{ee+dd} - d}{e} = \frac{MX - XN}{MN}$. Præterea (Exemp. 4.) est $VG = \frac{bb}{DN}$, $AI = \frac{bb}{AN}$, et hinc $2AI \times AN = 2bb$. Erit igitur minimæ tangentium quadratum $GT^2 = \frac{2AI \times AN}{MN} \times \overline{MX - XN}$.

(h) * *Reg.* 4. Quoniam densitas in loco quovis G est reciprocè ut tangens G T, quæ prope verticem hyperbolæ minor est quàm in loco A; manifestum est densitatem medii prope verticem hyperbolæ majorem esse quàm in loco A. Densitas in loco A dicatur K, in loco G per quem ducitur tangentium minima G T, dicatur B; et erit $K : B = GT : AH$, et hinc $K + B : K = GT + AH : GT$, et $\frac{K+B}{2} : K = \frac{GT + AH}{2} : GT$. Esset autem $\frac{K+B}{2}$ densitas mediocris, si tangens A H foret omnium maxima, sicuti G T (Hyp.) est omnium minima; et ideò, ut medii densitas ferè tanquam uniformis haberi posset, augenda esset densitas in A in ratione semisummæ tangentium $\frac{GT+AH}{2}$ ad minimam tangentium G T. Verùm quia tangens A H non est omnium maxima, sed tangentes aliæ ad partes curvæ versus K ductæ majores sunt; densitas in A augenda est in ratione paulo majore quàm semisummæ $\frac{GT+AH}{2}$ ad G T, ut medium tanquam uniforme ferè censeatur. Atque hoc pacto errores oriundi ex eo quod medium in loco A densius supponatur, corrigentur ferè aliis erroribus qui nascuntur ex eo quod in G medium rarius fingatur quam pro ratione curvæ A G K.

est quàm in loco A; ut habeatur densitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium H T ad tangentem A H inveniri, et densitas in A augeri in ratione paulo majore quàm semisummæ harum tangentium ad minimam tangentium G T.

(l) *Reg.* 5. Si dantur longitudines A H, A I, et describenda sit figura A G K: produc H N ad X, ut sit H X ad A I ut n + 1 ad 1, centroque X et asymptotis M X, N X per punctum A describatur hyperbola, eâ lege, ut sit A I ad quamvis V G ut $XV^n$ ad $XI^n$.

(k) *Reg.* 6. Quò major est numerus n, eò magis accuratæ sunt hæ

Interim liquet veram trajectoriam quam corpus in medio uniformi describit, circa verticem magis distare ab asymptotis, et in partibus a vertice remotioribus propius ad ipsas accedere quàm pro ratione hyperbolarum in medio non uniformi descriptarum. Nam si e loco A, cum velocitate $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, et directione A H projiciatur corpus in medio cujus densitas uniformis æqualis sit densitati mediocri medii in quo describitur hyperbola A G K; ob majorem medii uniformis densitatem in A, qua corporis velocitas impressa magis minuitur, trajectoria intra hyperbolam continebitur, adeóque prope verticem ab asymptotis magis distabit; et quia prope verticem est magis depressa, in partibus versus K a vertice remotioribus ad asymptotum N X propius accedet quàm hyperbola A G K; cum præsertim in medio uniformi spatium motu horizontali descriptum, semotâ gravitate, infinitum evadat (per Cor. 1. Prop. V.).

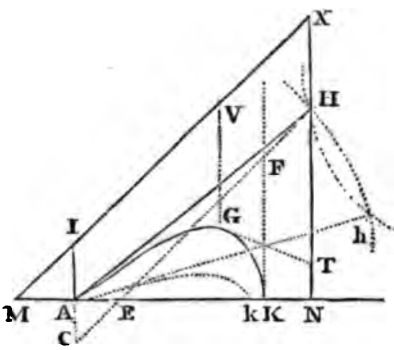
(l) * *Reg.* 5. Si dentur longitudines A H, A I cum angulo H A N, et describenda sit figura A G K: ex puncto H ad horizontalem A N demitte perpendiculum H N; produc H N ad X, ut sit H X æqualis facto sub n + 1 et A I (demonstravimus enim in notâ ad Reg. 1. esse H X æqualem facto $\overline{n+1} \times AI$) centroque X et asymptotis M X, N X per punctum A describatur hyperbola, eâ lege, ut sit A I ad quamvis V G ut $XV^n$ ad $XI^n$: est enim (per Hyp. Exemp. 4.) V G ad A I, ut $AN^n$ ad $DN^n$, seu ut $XI^n$ ad $XV^n$.

(k) * *Reg.* 6. Quo major est numerus n, eo magis hæ hyperbolæ in ascensu corporis ab A accedunt ad trajectorias in medio uniformi descriptas, et eo minus in descensu ad K accuratæ sunt; et contrà. Nam quò major est numerus n, eò minus tangens G T, quæ densitati reciprocè proportionalis est, in ascensu corporis ab A variatur; et eo magis in descensu ad K mutatur, quippe data sit medii densitas in A cum angulo projectionis H A N, et quantitas $\frac{n+2}{AH}$ densitati in A (Exemp. 4.) proportionalis, data erit, ideóque tangens A H eo longior erit quò major fuerit numerus n; et quia dato angulo H A N, datur specie triangulum rectangulum H N A, ratioque proinde laterum A H, A N, H N etiam datur, liquet quod crescente A H aut numero n, crescant quoque latera A N et H N. Ex demonstratis in Exemplo 4°. corpore ascendente tangentis G T quadratum $GT^2 = DN^2 + [ZV - nVG]^2$, et corpore descendente est $GT^2 = DN^2 + [nVG - ZV]^2$. Ex natura hyperbolæ A G K, est $DN^n : AN^n = AI : VG$, ideóque $nVG = \frac{nAI \times AN^n}{DN^n}$.

Ex demonstratione Regulæ 1æ, $HX = \overline{n+1} \times AI$, et proinde $NX = HN + \overline{n+1} \times AI$, et $NX - AI = HN + nAI$. Sed ob triangula X Z V, M N X, M A I similia, Z X seu D N est ad Z V, ut M N ad N X, et ut M A ad A I, et divisim D N est ad Z V, ut A N ad N X — A I seu H N + n A I; unde fit $ZV = \frac{DN \times HN + nAI \times DN}{AN}$.

Quarè in corporis ascensu $GT^2 = DN^2 + \left(\frac{DN \times HN + nAI \times HN}{AN} - \frac{nAI \times AN^n}{DN^n}\right)^2$ et in descensu $GT^2 = DN^2 + \left(\frac{nAI \times AN^n}{DN^n} - \frac{DN \times HN + nAI \times DN}{AN}\right)^2$. Jam verò si numerus n satis magnus fuerit, lineæ A H, A N, H N tam in ascensu quam in descensu corporis longiores sunt, et in ascensu ab A est fere D N æqualis A N, in descensu verò D N quantum libet minor ipsâ A N. Unde in ascensu ab A est fere $\frac{nAI \times DN}{AN} = nAI$ et ideò $GT^2 = DN^2 + \left(\frac{DN \times HN}{AN}\right)^2 = DN^2 + HN^2$ ferè. Est autem $AH^2 = AN^2 + HN^2$: quare ratio G T ad A H in ascensu corporis ab A est fere æqualitatis, dum numerus n satis magnus supponitur, ac proinde non multum variatur densitas: in descensu verò ad K, fit D N quantumlibet exigua respectu datæ A N, et ideò quantitas $\frac{nAI \times AN^n}{DN^n}$ vehementer crescit, et hinc tangens G T multum variatur ubi numerus n magnus est. Contra fit, si numerus ille sit admodum exiguus.

hyperbolæ in ascensu corporis ab A, et minus accuratæ in ejus descensu ad K; et contra. Hyperbola conica mediocrem rationem tenet, estque cæteris simplicior. Igitur si hyperbola sit hujus generis, et punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis A N per punctum A transeuntem, quæratur: occurrat producta A N asymptotis M X, N X in M et N, et sumatur N K ipsi A M æqualis.



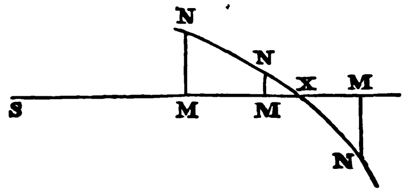

*Reg.* 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc hyperbolam ex phænomenis. Projiciantur corpora duo similia et æqualia, eâdem velocitate, in angulis diversis H A K, h A k, incidantque in planum horizontis in K et k; et notetur proportio A K ad A k. Sit ea d ad e. Tum erecto cujusvis longitudinis perpendiculo A I, assume utcunque longitudinem A H vel A h, (l) et inde collige graphicè longitudines A K, A k, per Reg. 6. Si ratio A K ad A k sit eadem cum ratione d ad e, (m) longitudo A H rectè assumpta fuit. Sin minus cape in

Porro cùm numerus n possit esse quilibet integer vel fractus, et in hyperbola conica sit n æqualis unitati, quæ veluti medium locum tenet inter numeros omnes integros et fractos, satis manifestum est hyperbolam conicam inter superiores omnes et inferiores hyperbolas mediocrem rationem tenere, et quia etiam cæteris simplicior est, posse loco veræ trajectoriæ in medio uniformiter denso adhiberi. Si igitur hyperbola A G K sit hujus generis, et punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis A N, horizontalem vel horizonti obliquam, per punctum A transeuntem, quæratur: occurrat producta A N asymptotis M X, N X, in M et N, et sumatur N K ipsi A M æqualis, et habebitur punctum K (per Theor. I. de conicis.).

(l) * *Et inde collige graphicè*, &c. Datâ enim tangente A H, tum magnitudine tum positione, datur verticalis H N cum puncto N; et quia assumitur etiam A I, et est H X = 2 A I (per dem. Reg. 1[m]) ob n = 1; dabitur hyperbolæ centrum X, et inde ob datum punctum I dabitur asymptotus altera X I M cum puncto M in horizontali M N; et capiendo N K æqualem datæ M A, dabitur punctum K, et hinc longitudo A K obtinebitur. Eodemque modo invenitur altera longitudo A k.

(m) * *Longitudo A H rectè assumpta fuit.* Datâ medii densitate in A cum velocitate corporis sub diversis angulis H A K, h A k projecti, manet perpendiculum A I, et tangens A H æqualis est tangenti A h (per Regulam 1[am]). Datis tangente A H, angulo H A K et perpendiculo A I, hyperbola A G K describi potest (per Reg. 6[am]. et notam præced.) et ideò data est tum specie, tum magnitudine. Unde si dentur tantum angulus H A K et ratio tangentis H A ad A I, hyperbola A G K specie tantum dabitur, id est, omnes hyperbolæ, quæ ex his duobus datis describentur, similes erunt. Quare si in hyperbolâ A G K, quæ in chartâ descripta supponitur, tangens assumpta A H sit ad perpendiculum A I, ut tangens hyperbolæ quam corpus sub angulo æquali H A K projectum in medio resistente describit, est ad suum perpendiculum A I; hyperbola A G K in charta descripta similis erit hyperbolæ quæ in medio resistente describitur. Et eodem argumento altera hyperbola, cujus est amplitudo A k, et tangens A h, manente perpendiculo A I, similis erit hyperbolæ illi quam corpus sub angulo æquali h A k, projectum in secundo experimento describit. Quâ propter, ob figurarum in chartâ et in medio resistente descriptarum similitudinem, amplitudines A K, A k erunt inter se ut homologæ amplitudines hyperbolarum quæ in experimentis descriptæ sunt, id est, A K : A k = d : e.

rectâ infinitâ S M longitudinem S M æqualem assumptæ A H, et erige perpendiculum M N æquale rationum differentiæ $\frac{A K}{A k} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex assumptis pluribus longitudinibus A H invenienda sunt plura puncta N, et per omnia agenda (n) curva linea regularis N N X N, secans rectam S M M M in X. Assumatur demum A H æqualis abscissæ S X, et inde denuo inveniatur longitudo A K; et longitudines, quæ sint ad assumptam longitudinem A I et hanc ultimam A H, ut longitudo A K per experimentum cognita ad ultimo inventam longitudinem A K, erunt veræ illæ longitudines A I et A H, (o) quas invenire oportuit. Hisce verò datis dabitur et resistentia medii in loco A, (p) quippe quæ sit ad vim gravitatis ut A H ad $\frac{2}{3}$ A I. Augenda est autem densitas medii per Reg. 4. et resistentia modo inventa, (q) si in eâdem ratione augeatur, fiet accuratior.




*Reg.* 8. (r) Inventis longitudinibus A H, H X; si jam desideretur positio rectæ A H, secundum quam projectile, datâ illâ cum velocitate emissum incidit in punctum quodvis K: ad puncta A et K erigantur rectæ A C, K F horizonti perpendiculares, quarum A C deorsum tendat, et æquetur ipsi A I seu $\frac{1}{2}$ H X. Asymptotis A K, K F (s) describatur hyperbola, cujus conjugata transeat per punctum C, centroque A et intervallo A H describatur circulus secans hyperbolam illam in puncto H;

(n) * *Curva regularis.* Vide notam 75. Lib. hujus.

(o) * *Quas invenire oportuit.* Cùm enim abscissa S M longitudini assumptæ A H æqualis sit, et rationum differentia $\frac{A K}{A k} - \frac{d}{e}$ exponatur per ordinatam M N; ubi fit S M = S X et proinde M N = o, est etiam $\frac{A K}{A k} - \frac{d}{e} = o$, et ideò $\frac{A K}{A k} = \frac{d}{e}$, atque S X æqualis veræ longitudini assumendæ A H (per not. præced.) Si itaque ex datis perpendiculo A I et verâ longitudine inventâ A H cum angulo H A N quæratur, ut supra, longitudo A K; ob similitudinem figurarum in medio resistente et in charta descriptarum, erit longitudo A K experimento cognita ad longitudinem A K ultimo inventam in charta, ut longitudo A H in medio resistente ad longitudinem A H in chartâ ductam, atque etiam ut perpendiculum A I in medio resistente ad perpendiculum A I in charta assumptum. Quibus inventis, describi poterit hyperbola similis et æqualis hyperbolæ, quam corpus in medio resistente descripsit.

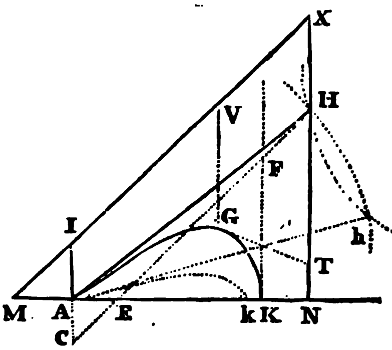
(p) * *Quippe quæ sit ad vim gravitatis,* &c. Ex demonstratis in hoc scholio ante Regulam 1. resistentia est ad gravitatem ut A H ad $\frac{2nn+2n}{n+2} \times$ A I, hoc est, ut A H ad $\frac{4}{3}$ A I, ob n = 1 (per Hyp.)

(q) * *Si in eadem ratione augeatur.* Nam datâ velocitate, resistentia est ut medii densitas.

(r) * *Inventis longitudinibus A H, H X,* &c. Inventis enim (per Reg. 7.) lineis A I et A H, datur linea H X, ut pote quæ æqualis est 2 A I, ob n = 1, (Reg. 5.)

(s) * *Describatur hyperbola.* (346. Lib. I.)

et projectile secundum rectam A H emissum incidet in punctum K. Q. e. i. Nam punctum H, (t) ob datam longitudinem A H, locatur alicubi in circulo descripto. Agatur C H occurrens ipsis A K et K F, illi in E, huic in F; (u) et ob parallelas C H, M X, et æquales A C, A I, erit A E æqualis A M, et propterea etiam æqualis K N. Sed C E est ad A E ut F H ad K N, et propterea C E et F H æquantur. Incidit ergo punctum H in hyperbolam asymptotis A K, K F descriptam, cujus conjugata transit per punctum C, atque ideò reperitur in communi intersectione hyperbolæ hujus et circuli descripti. Q. e. d. Notandum est autem, quòd hæc operatio perinde se habet, sive recta A K N horizonti parallela sit, sive ad horizontem in (x) angulo quovis inclinata: (y) quodque ex duabus intersectionibus H, h duo prodeunt anguli N A H, N A h; et quod in praxi mechanicâ sufficit circulum semel describere, deinde regulam interminatam C H ita applicare ad punctum C, ut ejus pars F H, circulo et rectæ F K interjecta, æqualis sit ejus parti C E inter punctum C et rectam A K sitæ.




(t) * *Ob datam longitudinem A H*, per Reg. 1am.

(u) * *Et ob parallelas C H, M X*, &c. Nam si supponamus H esse punctum quæsitum, per quod ducenda est recta A H, erit (per constr.) H X æqualis et parallela I C, et ideò C H parallela I X seu M X, ac triangula C A E, I A M similia proindeque cum sit C A = A I (per constr.) erit etiam A E = M A = K N, (per Theor. I. de conicis). Sed ob triangula similia C A E, H N E, et ob parallelas K F, N H, est C E : A E = E H : E N = F H : K N. Cum igitur sit A E = K N, erit quoque C E = F H; ac proinde incidit punctum H in hyperbolam (per Theor. I. de Hyp.)

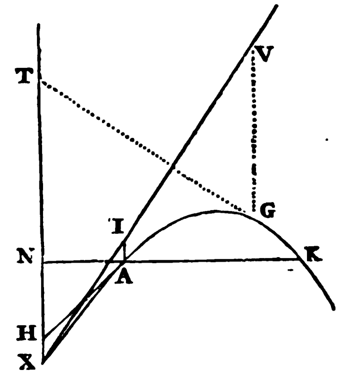
(x) * *In angulo quovis inclinata.* Demonstratio enim lineam M A K N per puncta data A et K ductam horizonti parallelam esse minime supponit, eademque prorsus manet si linea illa ad horizontem inclinata fuerit.

(y) * *Quodque ex duabus intersectionibus.* Quoniam punctum H per intersectionem circuli cum hyperbola determinatur (ex dem.), et circulus hyperbolam in duobus punctis intersecare potest, ex duabus intersectionibus H, h duo prodeant anguli, seu duæ sunt positiones tangentis A H secundum quam projectile datâ velocitate emissum incidit in punctum K.

124. *Problema.* Inventis longitudinibus A I et A H, maximam altitudinem G D, ad quam corpus sub angulo dato H A N projectum pertingere potest, definire.

Sit, ut in exemplo 3°. (vid. fig. pag. 74.) B N = a, B D = o, N X = c, ratio data V Z ad Z X, seu A I ad A M $= \frac{m}{n}$, V G $= \frac{bb}{a}$, ideóque A I $= \frac{bb}{AN}$, et b b = A I × A N. Et erit (Exemp. 3°.) G D $= c - \frac{m}{n} a - \frac{bb}{a} + \frac{m}{n} o - \frac{bb}{aa} o$, &c., et $\frac{m}{n} o - \frac{bb}{a} o = Q o$. Est autem Q o ut ordinatæ G D fluxio, quæ, ut habeatur ordinata omnium maxima, nihilo æquanda est (48): quare erit $\frac{m}{n} = \frac{bb}{aa}$, et a a $= \frac{nbb}{m}$, sive D N² $= \frac{AM \times AI \times AN}{AI}$ = A N × A M. Si ergo capiatur D N media oroportionalis inter A N et A M, ducatur-

Quæ de hyperbolis dicta sunt facilè applicantur ad parabolas. Nam si X A G K parabolam designet quam recta X V tangat in vertice X, sintque ordinatim applicatæ I A, V G ut quælibet abscissarum X I, X V dignitates X $I^n$, X $V^n$; agantur X T, G T, A H; quarum X T parallela sit V G, et G T, A H parabolam tangant in G et A: et corpus de loco quovis A, secundum rectam A H productam, justâ cum velocitate projectum, describet hanc parabolam, si modò densitas medii, in locis singulis G, sit reciprocè ut tangens G T. Velocitas autem in G ea erit quâcum projectile pergeret, in spatio non resistente in parabolâ conicâ verticem G, diametrum V G deorsum productam, et latus rectum $\frac{2\,G\,T\,q}{n\,n - n \times V\,G}$ habente. Et resistentia in G erit ad vim gravitatis ut G T ad $\frac{2\,n\,n - 2\,n}{n - 2}$ V G. Unde si N A K lineam horizontalem de-



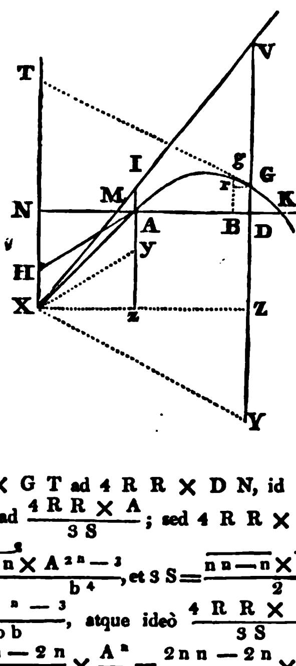

que per D ordinata G D, hæc erit omnium maxima. Quoniam verò $\frac{m}{n} = \frac{b\,b}{a\,a}$ et proinde $\frac{m}{n}a = \frac{b\,b}{a}$, erit maxima ordinata G D seu $c - \frac{m}{n}a - \frac{b\,b}{a} = c - \frac{2\,b\,b}{a} = N\,X - \frac{2\,A\,I \times N\,A}{D\,N}$. Quare G D ordinata maxima æqualis est differentiæ inter verticalem N X et quartam proportionalem ad D N, A N et 2 A I. Q. e. i.

125. *Problema.* Datis longitudinibus A I et A H, angulum projectionis H A N maximæ omnium amplitudini A K convenientem invenire. Dicantur A H = a, A I = b, H X = 2 A I = 2 b, A K = e, A N = x, H N = y, et erit x — e = K N = M A = A E, ac b = A I = A C (per Reg. 8.), proindeque E N = A K = e. Triangula similia E A C, E N H hanc proportionem suppeditant, A E (x — e) : E N (e) = A C (b) : H N (y), et componendo x : e = b + y : y, unde habetur $e = \frac{x\,y}{b + y}$, $x = \frac{b\,e + e\,y}{y}$, et $x\,x = e\,e\frac{[b+y]^2}{y\,y}$. Est etiam, ob angulum A N H rectum, $a\,a - y\,y = x\,x = e\,e\frac{[b + y]^2}{y\,y}$, et hinc $a\,a\,y\,y - y^4 = e\,e\,[b + y]^2$. Capiatur hujus æquationis fluxio, et amplitudinis maximæ e fluxione nihilo æquatâ (48), erit illa $2\,a^2\,y\,d\,y - 4\,y^3\,d\,y = 2\,e\,e\,[b + y]\,d\,y$, et, dividendo per 2 d y, $a\,a\,y - 2\,y^3 = e\,e \times [b + y]$. Erat autem $e = \frac{x\,y}{b+y}$, et ideò $e\,e = \frac{x\,x\,y\,y}{[b+y]^2} = \frac{a\,a\,y\,y - y^4}{[b + y]^2}$, ac oroinde $e\,e\,(b+y) = \frac{a\,a\,y\,y - y^4}{b + y}$. Quare erit $a\,a\,y - 2\,y^3 = \frac{a\,a\,y\,y - y^4}{b + y}$, sive $a\,a\,b\,y + a\,a\,y^2 - 2\,b\,y^3 - 2\,y^4 = a\,a\,y^2 - y^4$, unde, reductione factâ et divisis terminis per y, eruitur $a\,a\,b = 2\,b\,y\,y + y^3$. Hâc igitur æquatione resolutâ, invenitur y seu H N sinus anguli H A N, existente sinu toto A H. Q. e. d.

126. *Corol.* Manifestum est in æquatione $a\,a\,b = 2\,b\,y\,y + y^3$, quantitatem 2 b y y minorem esse quantitate a a b, et proinde quadratum y y, seu H $N^2$, minus dimidio quadrato $\frac{1}{2}$ a a vel $\frac{1}{2}$ A $H^2$; unde sequitur angulum quæsitum H A N semirecto minorem esse, qui, si medium non resisteret, foret semirectus. Sit medii densitas, adcóque et resistentia, admodum parva, et erit ferè $y = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, atque $a\,a\,b = 2\,b\,y\,y + a\,y\,y\sqrt{\frac{1}{2}}$, et hinc $y\,y = \frac{a\,a\,b}{2\,b + a\sqrt{\frac{1}{2}}}$, ac $y = a\sqrt{\frac{b}{2\,b + a\sqrt{\frac{1}{2}}}}$, quàm proximè.

signet, et manente tum densitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus N A H; manebunt longitudines A H, A I, H X, et inde datur parabolæ vertex X, et positio rectæ X I, et sumendo V G ad I A ut $X V^n$ ad $X I^n$, dantur omnia parabolæ puncta G, (*) per quæ projectile transibit.

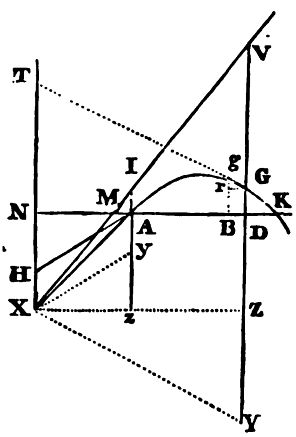
(*) *Per quæ projectile transibit.* Producatur V G ut horizontalem N K secet in D, et rectam X Z horizonti parallelam in Z. Pro B N, B D, N X scribantur A, O, c, respectivè; sitque M intersectio linearum X V, N K; et X N ad N M, sive ob triangulorum X N M, V Z X similitudinem, V Z ad Z X vel D N ut d ad e; ideóque $D N = A + O$, et $V Z = \frac{d}{e} \times (A + O)$. Quia vero V G est ut $X V^n$ (per Hyp.), et V X est ad X Z, seu D N, in datâ ratione X N ad N M; erit etiam V G ut $D N^n$. Ponatur ergo $V G = \frac{D N^n}{b b} = \frac{\overline{A + O}|^n}{b b} = \frac{A^n}{b b} + \frac{n A^{n-1} O}{b b} + \frac{n. \overline{n-1}}{1.2} \frac{A^{n-2}}{b b} O^2 + \frac{n. \overline{n-1}. \overline{n-2}}{1.2.3.} \frac{A^{n-3}}{b b} O^3 +$, &c., et erit $G D = V Z - N X - V G = \frac{d}{e} \times A + O - c - \frac{\overline{A + O}|^n}{b b} = \frac{d}{e} A - c - \frac{A^n}{b b} + \frac{d}{e} O - \frac{n A^{n-1}}{b b} . O - \frac{(n n - n) A^{n-2}}{2 b b} O^2 - \frac{(n^3 - 3 n n + 2 n) A^{n-3}}{6 b b} O^3 -$, &c. Quare erit $Q = \frac{n A^{n-1}}{b b} - \frac{d}{e}$; $R = \frac{n n - n A^{n-2}}{2 b b}$, et $S = \frac{\overline{n^3 - 3 n n + 2 n} A^{n-3}}{6 b b}$. Per punctum B ducatur ordinata B g, ad quam demittatur ex G perpendiculum G r, sitque X Y æqualis et parallela tangenti G T; et ob triangula G r g, X Z Y similia, erit $G r^2$ ad $G g^2$ ut $X Z^2$ seu $D N^2$ ad $X Y^2$ vel $G T^2$; est autem $G r^2 = O^2$, $r g^2 = Q Q O O$, et ideò $G g^2 = O O \times \overline{1 + Q Q}$: quare cum sit etiam B N seu $D N = A$, erit $G T^2 = A A \times \overline{1 + Q Q}$, $G T = A \sqrt{\overline{1 + Q Q}}$, et $\frac{G T}{A} = \sqrt{\overline{1 + Q Q}}$. Per Corol. 1. Prop. X. medii densitas in loco G est ut $\frac{S \times A}{R \times G T}$, et (ex demonstratis) $\frac{S}{R} = \frac{n - 2}{3 A}$, ideóque $\frac{S \times A}{R \times G T}$ est ut $\frac{n - 2}{3 G T}$; quare, ob datum numerum $\frac{n - 2}{3}$, densitas est reciprocè ut tangens G T. Velocitas in G (per Prop. X.) ea est, quâ cum projectile pergeret, in spatio non resistente, in parabolâ conicâ verticem G, diametrum G D, et latus rectum $\frac{1 + Q Q}{R}$ habente; et ideò cum sit $\frac{1 + Q Q}{R} = \frac{G T^2}{A^2 R} = \frac{2 G T^2}{\overline{n n - n} \times \frac{A^n}{b b}} = \frac{2 G T^2}{\overline{n n - n} \times V G}$ (ex dem.), parabolæ latus rectum erit $\frac{2 G T^2}{\overline{n n - n}. V G}$. Resistentia in G (per Cor. 1. Prop. X.) est ad vim gravitatis, ut




$3 S \times G T$ ad $4 R R \times D N$, id est, ut G T ad $\frac{4 R R \times A}{3 S}$; sed $4 R R \times A = \frac{\overline{n n - n}^2 \times A^{2n-3}}{b^4}$, et $3 S = \frac{\overline{n n - n} \times \overline{n - 2}}{2} \times \frac{A^{n-3}}{b b}$, atque ideò $\frac{4 R R \times A}{3 S} = \frac{n n - 2 n}{n - 2} \times \frac{A^n}{b b} = \frac{2 n n - 2 n}{n - 2} \times V G$. Erit igitur resistentia ad gravitatem, ut G T ad $\frac{2 n n - 2 n}{n - 2} \times V G$. Velocitas in loco G (per Prop. X.) est ut $\sqrt{\frac{1 + Q Q}{R}} = \sqrt{\frac{2 G T^2}{\overline{n n - n} \times V G}}$.

ideóque ob datum numerum $\frac{2}{n\,n - n}$, ut $\frac{G\,T}{\sqrt{V\,G}}$.

Quando igitur corpus est in A, medii densitas est ut $\frac{1}{A\,H}$, et velocitas ut $\frac{A\,H}{\sqrt{A\,I}}$; unde manente tum densitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, et mutato utcumque angulo N A H, manebunt A H, et $\frac{A\,H}{\sqrt{A\,I}}$, ac proinde A I. Quia porro $Z\,Y^2 = X\,Y^2 - X\,Z^2 = G\,T^2 - D\,N^2 = A\,A \times \overline{1 + Q\,Q} - A\,A = A\,A\,Q\,Q$, et ideò $Z\,Y = Q \times A = \frac{n\,A^n}{b\,b} - \frac{d}{e}\,A = n\,V\,G - V\,Z$, atque $Z\,Y + V\,Z = V\,Y = n\,V\,G$; erit in loco A, $I\,y = n \times A\,I$, et hinc $A\,y = X\,H = n\,A\,I - A\,I$.

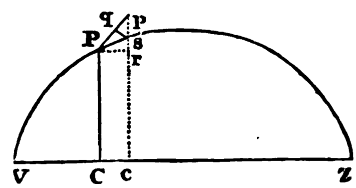



Quare manente A I, manebit etiam H X, ob datum numerum n — 1. Inveniantur, uti Regulâ 7ᵃ. pro hyperbolâ factum est, longitudines A H, A I et proinde H X; et inde dabitur punctum H, per quod si ducatur T H X ad horizontem perpendicularis, datâ X H, dabitur positio rectæ X I, et sumendo V G ad I A ut $X\,V^n$ ad $X\,I^n$, dabuntur omnia parabolæ puncta G, per quæ projectile transibit.

Problema elegantissimum de inveniendâ trajectoriâ quam corpus in medio juxta duplicatam velocitatum rationem resistente describit, in suis Principiis prætermisit Newtonus. Rem generaliter postea confecerunt clarissimi Mathematici Joannes Bernoullius, Hermannus, et Eulerus, qui trajectoriam a projectili descriptam in medio quod in quâlibet multiplicatâ velocitatum ratione resistit, analyticè invenerunt. Horum vestigiis insistentes, tam elegans problema in nostris commentariis desiderari nolumus.

## PROBLEMA.

127. Tendente vi gravitatis uniformi ubique perpendiculariter ad planum horizontis V Z, determinare curvam V P p, quam describit projectile in medio uniformi quod in multiplicatâ quâlibet velocitatum ratione resistit.



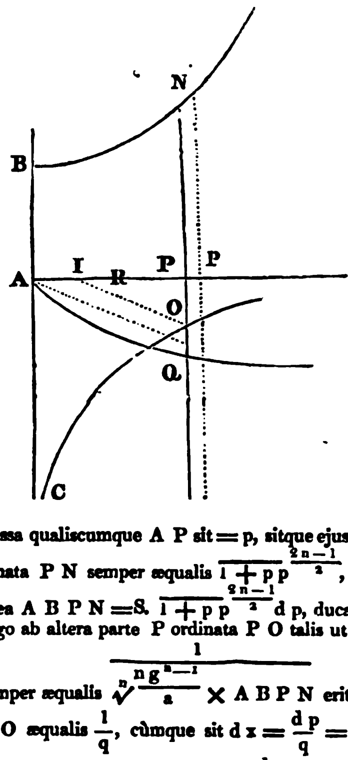

Ductis ordinatis verticalibus P C, p c infinitè propinquis, et ex puncto P ad p c perpendiculo P r; dicantur vis gravitatis = g, velocitas projectilis in loco P = v, resistentia ibidem = r = $\frac{v^{2n}}{2a}$, ita ut sit a quantitas constans quæ determinabitur ex determinatione resistentiæ, sit tangens P p, arcus P s = d s, V C = x, P C = y, et ideò p r = d y, ac C c seu P r = d x; fluxio hæc d x constans supponatur. Resolvatur actio gravitatis quæ exprimitur per p s in actionem s q curvæ perpendicularem; et actionem p q, curvæ parallelam quæ in ascensu corporis illud retardat in descensu accelerat, erit actio tota gravitatis ad ejus actionem quâ motum in curva retardat in ascensu et accelerat in descensu ut est p s ad p q, et ob similia triangula p q s, P p r, est p s ad p q sicut P p sive P s ad p r, ideóque P s (d s) ad p r (d y) sicut gravitas tota g, ad $\frac{g\,d\,y}{d\,s}$ quæ est actio gravitatis ad retardandum corpus in ascensu, et quia in descensu est p r = — d y, est $\frac{-g\,d\,y}{d\,s}$ actio gravitatis ad accelerandum corpus in descensu; unde tota retardatio corporis tam ex gravitate quam ex resistentia orta, est $r + \frac{g\,d\,y}{d\,s}$ tam in ascensu quam in descensu.

Decrementum autem velocitatis — d v; est semper ut vis retardans et tempus quo durante ea vis agit conjunctim, idque tempus est semper æquale arcui descripto P s ad velocitatem v applicato, hoc est, temporis incrementum $d\,t = \frac{d\,s}{v}$ unde velocitatis decrementum $-d\,v = \left(r + \frac{g\,d\,y}{d\,s}\right) \times \frac{d\,s}{v} = \frac{r\,d\,s + g\,d\,y}{v}$, et quia ex hypothesi $r = \frac{v^{2n}}{2a}$, est $-v\,d\,v = \frac{v^{2n}\,d\,s}{2a} - g\,d\,y$; ut autem obtineatur valor v, et d v expressione quæ ad curvam referatur, notandum quòd lineola p s sive — d d y est spatiolum urgente gravitate tempore d t percursum, ideóque est ut vis gravitatis g per temporis quadratum

multiplicata, ideóque est $-ddy = g\,dt^2 = \frac{g\,ds^2}{v^2}$ (cum sit $dt = \frac{ds}{v}$) unde est $v^2 = \frac{g\,ds^2}{-ddy}$ sive $-v^2\,ddy = g\,ds^2$, et fluxionem utrinque sumendo est $-v^2\,d^3y - 2v\,ddy\,dv = 2g\,ds\,dds$, et cum lineolâ $pq$ designet $dds$ sitque $Pp$ sive $Ps$ $(ds)$ ad $Pr$ $(dy)$ sicut $ps$ $(-ddy)$ ad $pq$ $(dds)$ est $ds\,dds = -dy\,ddy$ unde hæc ultima æquatio fit $-v^2d^3y - 2v\,ddy\,dv = -2g\,dy\,ddy$ et $-2v\,ddy\,dv = v^2d^3y - 2g\,dy\,ddy$ et, $-v\,dv = \frac{v^2d^3y}{2ddy} - g\,dy$, unde cùm inventum etiam fuerit $-v\,dv = \frac{v^{2n}ds}{2a} - g\,dy$, est $\frac{v^2d^3y}{ddy} = \frac{v^{2n}ds}{a}$. et valorem inventum $v^2 = \frac{g\,ds^2}{-ddy}$ substituendo, fit tandem $\frac{g\,ds^2d^3y}{-ddy^2} = \frac{g^n ds^{2n+1}}{-a\,ddy^n}$ sive reductione factâ $a\,d^3y = \frac{g^{n-1}ds^{2n-1}}{ddy^{n-2}}$.

Ut autem ex hac æquatione eruatur æquatio inter $dx$, et $dy$, et inter $x$ et $y$, designet $p$ variabiles quascumque quæ in æquatione quæsita ita multiplicant fluxionem $dx$ ut ea sit æqualis $dy$, sitque $dy = p\,dx$ et $dy^2 = p^2dx^2$, cum sit $ds^2 = dx^2 + dy^2$ erit $ds^2 = dx^2 + p^2dx^2 = \overline{1+p^2} \times dx^2$, et $ds = dx\sqrt{1+pp}$ unde $ds^{2n-1} = dx^{2n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}$.

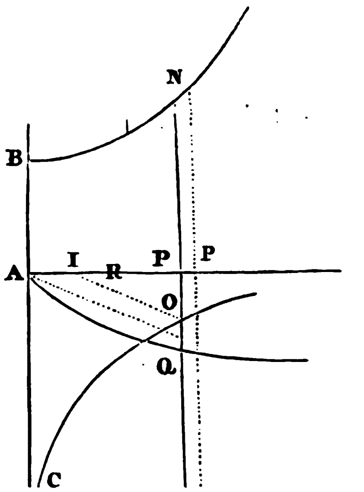
Præterea cùm $dx$ constans supponatur erit $dy = p\,dx$, $ddy = dx\,dp$, et sumpta fluxione erit et $d^3y = dx\,ddp$. Et si tandem $q$ designet variabiles quæ ita multiplicant fluxionem $dx$, ut ea fiat æqualis $dp$, sitque $q\,dx = dp$ erit $dx\,dq = ddp$ et $dx^2dq = dx\,ddp = d^3y$, et æquatio proposita in hanc vertetur $a\,dx^2dq = \frac{g^{n-1}dx^{2n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{\overline{dx\,dp}|^{n-2}} = \frac{g^{n-1}dx^{n+1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dp^{n-2}}$, et diviso utroque termino per $dx^2$, erit $a\,dq = \frac{g^{n-1}dx^{n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dp^{n-2}}$. Denique loco $dx$ posito ejus valore $\frac{dp}{q}$ erit $a\,dq = \frac{g^{n-1}dp^{n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{q^{n-1}dp^{n-2}}$ sive $a\,dq = \frac{g^{n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{q^{n-1}} \times dp$, hoc est $a\,q^{n-1}dq = g^{n-1}\,\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}\, \mathrm{l}\, p$, quæ est æquatio fluxionalis inter $dp$ et $dq$, ex quâ per curvarum quadraturam obtinebitur æquatio inter $p$ et $q$ et inde inter $x$ et $y$, ut id ipsum nunc exponemus, summando enim terminos æquationis $a\,q^{n-1}dq = g^{n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$ habetur $\frac{aq^n}{n} = g^{n-1} \times S.\,\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$, hoc est $q = \sqrt[n]{\frac{ng^{n-1}}{a}} \times S.\,\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$, unde sit curva cujus abscissa qualiscumque $AP$ sit $= p$, sitque ejus ordinata $PN$ semper æqualis $\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}$, erit area $ABPN = S.\,\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$,




ducatur ergo ab altera parte $P$ ordinata $PO$ talis ut sit semper æqualis $\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{ng^{n-1}}{a}} \times ABPN}$ erit ea $PO$ æqualis $\frac{1}{q}$, cùmque sit $dx = \frac{dp}{q} = \frac{1}{q} \times dp$, erit (summando) $x = S.\,\frac{1}{q} \times dp$ sive æqualis area $ACPO$.

Denique cùm sit $dy = p\,dx = \frac{p\,dp}{q} = \frac{p}{q} \times dp$ et summando $y = S.\,\frac{p}{q} \times dp$ ideò si e puncto $P$ versus originem $A$ sumatur $PI$ æqualis unitati, ductaque $IO$, ducatur ipsi parallela $AQ$ ab origine curvæ quæ secet $PO$ productam in $Q$, erit $1 : PO$ (sive $\frac{1}{q}$) $= AP$ (sive $p$) : $PQ = \frac{p}{q}$, itaque area curvæ $APQ$

erit $S.\frac{p}{q}dp$ ac per consequens æqualis y, ergo latis curvarum A C P O, et A P Q quadraturis datur ratio x ad y; et ex earum ordinatis ratio d x ad d y: sed ut habeatur origo a quâ sumi debent illarum arearum portiones, sumendum est id punctum in quo P O est ad P Q ut cosinus anguli jactus cum horizonte sub quo corpus




moveri incepit ad ejus anguli sinum, quippe ea fuit ipso motus initio ratio elementorum d x et d y; sique ille cosinus dicatur c, et sinus s, erit in ea origine $c : s = \frac{1}{q} : \frac{p}{q}$, unde si sumatur A R sive $p = \frac{s}{c}$ erit ejus extremitas R origo arearum quarum valor rationem quæsitarum x et y exhibebit. †

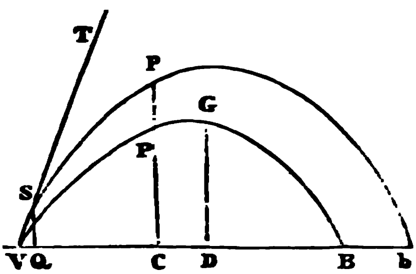
128. *Corol.* 1. Quoniam invenimus $v^2 = \frac{-g\,ds^2}{ddy}$, $ds^2 = dx^2(1+pp)$, et $ddy = dx\,dp$; erit $v^2 = \frac{-g\,dx\,(1+pp)}{dp}$; sed $dp = q\,dx$; quare erit $v^2 = \frac{-g\,(1+pp)}{q}$. Præterea (13) $dt = \frac{ds}{v} = \frac{dx\sqrt{1+pp}}{v} = \frac{dp\sqrt{1+pp}}{qv}$, et $v = \sqrt{\frac{-g\,(1+pp)}{q}}$; quare erit $dt = \frac{dp}{\sqrt{-gq}}$, et $t = S.\frac{dp}{\sqrt{-gq}}$. Invenietur itaque tum velocitas corporis in loco P trajectoriæ V P p, tum tempus t quo arcus V P describitur.

129. *Corol.* 2. Si in æquatione generali supra reperta, $a\,d^3y = \frac{g^{n-1}\,ds^{2n-2}}{ddy^{n-2}}$, ponatur n = 1, seu resistentia velocitatis quadrato proportionalis; æquatio in hanc migrabit $a\,d^3y = ds\,ddy$; et ponendo $dy = p\,dx$, ac $dx = \frac{dp}{q}$, invenietur $aq = S.dp\sqrt{1+pp}$, $x = S.\frac{dp}{q} = S.\frac{a\,dp}{S.dp\sqrt{1+pp}}$, $y = S.\frac{p\,dp}{q} = S.\frac{a\,p\,dp}{S.dp\sqrt{1+pp}}$, $vv = \frac{-ag\,(1+pp)}{S.dp\sqrt{1+pp}}$, et $t = S.\frac{a^{\frac{1}{2}}\,dp}{\sqrt{(-g\,S.dp\sqrt{1+pp})}}$. Est autem $S.dp\sqrt{1+pp}$ area hyperbolæ æquilateræ, cujus abscissa est p et ordinata ducta perpendiculariter ad axem conjugatum $\sqrt{1+pp}$, semiaxis verò unitas. Unde invenietur q in p per hujus hyperbolæ aream; at abscissa x obtinebitur per aream curvæ cujus est abscissa p et ordinata $\frac{1}{q}$; et correspondens ordinata y desinietur per aream curvæ, cujus abscissa est p et ordinata $\frac{p}{q}$. Ex quibus manifestum sit veræ trajectoriæ V P Z descriptionem adeò perplexam esse, ut ex illa vix quidquam ad usus philosophicos aut mechanicos accommodatum possit deduci.

130. *Corol.* 3. Quoniam posito n = 1, resistentia medii est $\frac{v^2}{2a}$ (127), et ubi resistentia sit gravitati æqualis, id est, ubi v æqualis est velocitati terminali, habetur $\frac{v^2}{2a} = g$, et $v^2 = 2ag$, ideò (30. Lib. I.) a est altitudo ex quâ corpus in medio non resistente vi constante g sollicitatum caderet ut velocitatem terminalem acquirat.

131. *Corol.* 4. Si in hypothesi Corollarii secundi resistentia parva fuerit qualem ferè experitur globus ferreus non parvus magnâ satis velocitate per aëra projectus, trajectoria V P B, quam globus ille in medio resistente describit, non multùm aberrat a parabolâ conicâ V p b, quam eâdem urgente vi gravitatis uniformi g seu 1 describeret. Quia tamen resistentia velocitatem projectionis minuit, ordinata C P, ad trajectoriam V P B, in medio resistente paulò minor erit quam ordinata C p ad parabolam conicam V p b. Porrò si abscissa V C dicatur x ordinata C p dicatur z, amplitudo V b, h et proindè C b, h — x, erit (ex naturâ parabolæ) rectangulum sub abscissis V C × C b, seu h x — x x, æquale rectangulo ordinatæ C p, vel z in datam quantitatem l, et ideò æquatio erit $z = \frac{hx}{l} - \frac{xx}{l}$. Cùm igitur ordinata C P (quæ dicatur y) paulò minor sit quam C p, seu z, ponatur $y = \frac{hx}{l} - \frac{xx}{l} - ex^3$, et æquatio ista in quâ est e quantitas exigua, naturam trajectoriæ V P B exponere poterit quam proximè; loco $\frac{h}{l}$, et $\frac{1}{l}$,

scribantur b et c ut æquatio sit $y = bx - cx^2 - ex^3$. Ut jam determinentur coëfficientes b, c, e, capiantur æquationis fluxiones, prima, secunda et tertia, factâ dx constante, erunt illæ $dy = bdx - 2cxdx - 3ex^2dx$; $ddy = -2cdx^2 - 6exdx^2$, $d^3y = -6edx^3$. Coincidentibus punctis V et C, fit $x = o$, et ideò $dy = bdx$, $ddy = -2cdx^2$ et $d^3y = -6edx^3$. Ex æquatione $dy = bdx$, deducitur proportio $dx : dy = 1 : b$; et coincidente C cum V, dx est ad dy ut sinus totus VQ ad tangentem QS anguli projectionis TVQ; quare si sinus totus dicatur 1, erit b tangens anguli projectionis, et ideò dato hoc angulo datur b. Si velocitas cum quâ corpus e




loco V projicitur sit v, et f, altitudo ex quâ corpus urgente vi constante g, in spatio non resistente cadendo acquirit velocitatem illam v, erit $2gf = vv$ (18. 19. 20. hujusce Lib.) sed (32), $vv = -\frac{g\,ds^2}{ddy}$, ideóque $2gf = -\frac{g\,ds^2}{ddy}$, et $2f = -\frac{ds^2}{ddy}$; est autem $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + bbdx^2$, et $ddy = -2cdx^2$ in loco V, (ex dem.). Quarè erit $2f = \frac{1+bb}{2c}$, et hinc $c = \frac{1+bb}{4f}$. Cùm igitur quantitates b, et f, datæ sint, data erit c. Invenietur quantitas tertia e, per æquationem $a\,d^3y = ds\,ddy$ (129) et per æquationes suprà repertas $ds = dx\sqrt{1+bb}$, $ddy = -2cdx^2$, et $d^3y = -6edx^3$; ex quibus eruitur $-6aedx^3 = -2cdx^3\sqrt{1+bb}$, et hinc $e = \frac{c\sqrt{1+bb}}{3a} = \frac{1+bb \times \sqrt{1+bb}}{12af}$. Tota igitur æquatio assumpta $y = bx - cx^2 - ex^3$ fit $y = bx - x^2 \times \left(\frac{1+bb}{4f}\right) - x^3 \times \left(\frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12af}\right)$ in quâ datâ velocitate terminali datur a, (130). Poterit etiam linea a, per experimentum reperiri; nam si e loco V sub angulo dato TVB datâ cum velocitate projiciatur corpus in medio supposito et observetur amplitudo jactûs VB, quæ dicatur A, in æquatione ad trajectoriam VPB loco x scribatur A et loco y scribatur o, quia ordinata CP seu y evanescit in B invenietur $o = bA - AA \times \frac{1+bb}{4f} - A^3 \times \frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12af}$; unde deducitur $a = AA \times \frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12bf - 3A \times \overline{1+bb}}$.

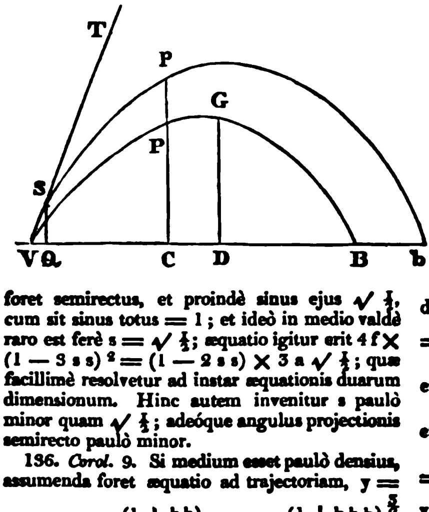
132. *Coroll.* 5. Jactûs amplitudine VB inventa, fiat $y = o$, unde erit $xx \times \frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12af} + x \times \frac{1+bb}{4f} = b$, et $VB = x = -\frac{3a}{2\sqrt{1+bb}} + \sqrt{\left(\frac{9a^2}{4+4bb} + \frac{12afb}{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}\right)}$.

133. *Coroll.* 6. Maxima jactûs altitudo DG reperitur, sumptâ æquationis ad trajectoriam VPB fluxione et factâ $dy = o$ (129), unde erit $o = bdx - 2xdx \times \frac{1+bb}{4f} - 3x^2dx \times \frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12af}$ unde deducitur $VD = x = -\frac{a}{\sqrt{1+bb}} + \sqrt{\frac{aa}{1+bb} + \frac{4afb}{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}}$. Quo valore loco x, in æquatione ad trajectoriam substituto, obtinebitur y, seu maxima altitudo DG.

134. *Coroll.* 7. Ut determinetur tangens anguli TVB sub quo corpus datâ celeritate projectum, per datum punctum P transibit, loco x et y in æquatione ad trajectoriam scribantur datæ VC et VP, atque hinc eruetur valor tangentis b; dicatur $VC = p$, $CP = q$, et erit $q = bp - pp \times \frac{\sqrt{1+bb}}{af} - p^3 \times \frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12af}$. Si medii densitas infinitè parva esset, altitudo a foret infinita (130), et idcirco $q = bp - pp \times \frac{1+bb}{4f}$. Invenitur per hanc æquationem valor tangentis b qui dicatur k, et in æquatione superiori loco $(1+bb)^{\frac{3}{2}}$, scribatur $(1+bb) \times \sqrt{1+kk}$ et illa in hanc abibit $q = bp - pp \times \frac{(1+bb)}{af} - p^3 \times \overline{1+bb} \times \frac{\sqrt{1+kk}}{12af}$, quæ cum sit duarum dimensionum facilè suppeditabit valorem ipsius b, quamproximè.

135. *Coroll.* 8. Datâ celeritate jactûs, invenitur angulus maximæ omnium amplitudini conveniens, si in æquatione Corollarii 5. in quâ x

exponit quamlibet amplitudinem V B, sumatur tangens b variabilis et sumptis fluxionibus ponatur $dx = 0$ (48). Calculo enim inito invenietur $4f \times (1 - 2bb)^2 = 3ab \times (1 - bb) \times \sqrt{1 + bb}$. Quoniam verò tangens anguli projectionis est b, sinus totus 1, et proindè secans $\sqrt{1 + bb}$; si ejusdem anguli sinus dicatur s, erit $\sqrt{1 + bb} : b = 1 : s$, adeóque $1 + bb : bb = 1 : ss$, et dividendo $1 : bb = 1 - ss : ss$, atquè ità $bb = \frac{ss}{1 - ss}$, et $b = \frac{s}{\sqrt{1 - ss}}$. Loco b substituatur $\frac{s}{\sqrt{1 - ss}}$ in æquatione modo inventâ et illa in hanc mutabitur, $4f \times \frac{(1 - 3ss)^2}{(1 - ss)^2} = 3as \times \frac{(1 - 2ss)}{(1 - ss)^2}$, hoc est, $4f \times (1 - 3ss)^2 = 3as \times (1 - 2ss)$. Ex quâ æquatione, si eruatur valor sinûs s dabitur angulus quæsitus. Per approximationem ità potest obtineri. Scribatur in æquatione $3as = 3a\sqrt{\frac{1}{2}}$; nam si trajectoria in medio non resistente describeretur, angulus T V B




foret semirectus, et proindè sinus ejus $\sqrt{\frac{1}{2}}$, cum sit sinus totus $= 1$; et ideò in medio valdè raro est ferè $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$; æquatio igitur erit $4f \times (1 - 3ss)^2 = (1 - 2ss) \times 3a\sqrt{\frac{1}{2}}$; quæ facillimè resolvetur ad instar æquationis duarum dimensionum. Hinc autem invenitur s paulò minor quam $\sqrt{\frac{1}{2}}$; adeóque angulus projectionis semirecto paulò minor.

136. *Corol.* 9. Si medium esset paulò densius, assumenda foret æquatio ad trajectoriam, $y = bx - xx \times \frac{(1 + bb)}{4f} - x^3 \times \frac{(1 + bbb)^{\frac{3}{2}}}{12af} - hx^4$; aut etiam alia plurium terminorum. In illâ autem ità determinatur valor coëfficientis h. Pro coëfficientibus datis $\frac{1 + bb}{4f}$, $\frac{(1 + bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$, scribantur c, e, ut sit æquatio $y = bx - cx^2 - ex^3 - hx^4$, et sumptis ut suprà (131) fluxionibus primis, secundis et tertiis, factâ $dx$, constante, invenietur (129) $\frac{ad^3y}{ds\,ddy} = 1 = \frac{6ac + 24ahx}{(2c + 6ex + 12hx^2)} \times \frac{1}{\sqrt{1 + bb - 4bcx + 4ccx^2 - 6bex^2}, \&c.}$ $= \frac{6ae + 24ahx}{2c + 6ex \times \sqrt{1 + bb} - \frac{2bcx}{\sqrt{1 + bb}}}$ neglectis terminis ubi $x^2$ occurrit et extracta radice per formulam Newtonianam. Ut autem hæc quantitas constans sit et æqualis unitati, termini homologi in numeratore $6ae + 24ahx$, et denominatore $2c\sqrt{1 + bb} + 6ex\sqrt{1 + bb} - \frac{4bccx}{\sqrt{1 + bb}}$ ponendi sunt æquales, id est, $6ae = 2c\sqrt{1 + bb}$, et $24ahx = 6ex\sqrt{1 + bb} - \frac{4bccx}{\sqrt{1 + bb}}$. Ex his suppositionibus eruitur $e = \frac{c\sqrt{1 + bb}}{3a} = \frac{(1 + bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$, et $h = e\frac{\sqrt{1 + bb}}{4f} - \frac{bcc}{6a\sqrt{1 + bb}}$ $= \frac{(1 + bb)^2}{48a^2f} - \frac{b \times (1 + bb)^{\frac{3}{2}}}{96aff}$. Quarè æquatio assumpta erit $y = bx - x^2 \times \frac{(1 + bb)}{af} - x^3 \times \frac{(1 + bb)^{\frac{3}{2}}}{12af} - x^4 \times \frac{(1 + bb)^2}{48a^2f} + x^4 b \times \frac{(1 + bb)^{\frac{3}{2}}}{96aff}$. Et eodem modo determinarentur coëfficientes in æquationibus plurium terminorum seu ad parabolas superiorum generum.

137. *Corol.* 10. Si resistentia medii uniformis, partim constans supponeretur et partim velocitatis quadrato proportionalis, posset etiam trajectoria V P B quamproximè definiri. Sit enim resistentiæ pars uniformis $= \frac{1}{2}kg$, et resistentia tota $r = \frac{kg}{2} + \frac{v^2}{2a}$, et erit (28) $g\,dy + \frac{kg\,ds}{2} + \frac{v^2ds}{2a} = -v\,dv$ et (30) $v^2 = -\frac{g\,ds^2}{ddy}$ adeóque (127) $v\,dv = -g\,dy + \frac{g\,ds^2d^3y}{2ddy^2}$, his valoribus loco $v^2$ et $v\,dv$, in priori æquatione substitutis sit $g\,dy + \frac{kg\,ds}{2} - \frac{g\,ds^3}{2addy} = g\,dy - \frac{g\,ds^2d^3y}{2ddv^2}$, ideóque $k = \frac{ds^2}{addy} - \frac{ds\,d^3y}{ddy^2}$. Jam si resistentia tota r, exigua fuerit, ponatur æquatio ad trajectoriam V P B, $y = bx - cx^2 - ex^3$, et factâ $dx$, constante, capiantur fluxiones primæ, secundæ et tertiæ quæ coincidente puncto C, cum V, erunt $dy = b\,dx$, $ddy = -2c\,dx^2$, et $d^3y = -6e\,dx^3$ (131); undè invenitur ut (in Corol. 4. 131.) b, tangens anguli projectionis, existente sinu toto 1, et $c = \frac{1 + bb}{4f}$,

ubi f est altitudo ex quâ corpus urgente vi constante g cadendo in spatio non resistente acquirit jactûs velceitatem. Quantitas e determinabitur per æquationem $k = \frac{ds^2}{a\,ddy} - \frac{ds\,d^3y}{ddy^2}$. Nam si in illâ loco ds, ddy, $d^3y$, substituantur ipsorum valores $dx \times (1 + bb)^{\frac{1}{2}}$, $-2cdx$, et $-6edx^2$, erit $k = -\frac{(1+bb)}{2ac} + \frac{3e \times (1+bb)^{\frac{3}{2}}}{2cc}$; undè eruitur $e = -\frac{2kcc}{3 \times (1+bb)^{\frac{3}{2}}} + \frac{c \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}}{3a}$ $= \frac{k \times (1+bb)^{\frac{3}{2}}}{24ff} + \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$. Quapropter æquatio assumpta in hanc abit $y = bx - \frac{xx \times (1+bb)}{4f} - x^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$, $-x^3k \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{24ff}$, et quantitates a et k, ex phænomenis poterunt determinari ut suprà (131.)

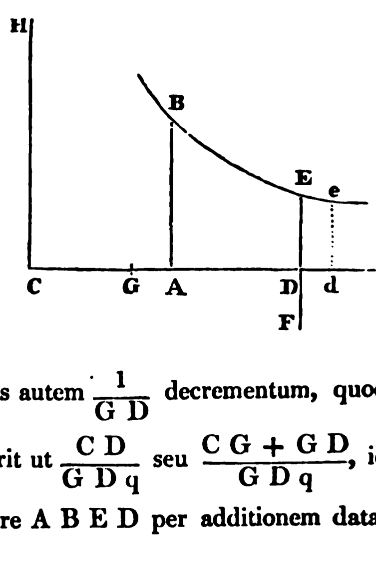
## SECTIO III.

*De motu corporum quibus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatá.*

### PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

*Si corpori resistitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicatá, et idem solá vi insitá in medio similari movetur: sumantur autem tempora in progressione arithmeticâ; quantitates velocitatibus reciprocè proportionales, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progressione geometricâ.*

Centro C, asymptotis rectangulis C A D d et C H, describatur hyperbola B E e, et asymptoto C H parallelæ sint A B, D E, d e. In asymptoto C D dentur puncta A, G: et si tempus exponatur per aream hyperbolicam A B E D uniformiter crescentem; dico quod velocitas exponi potest per longitudinem D F, cujus reciproca G D unâ cum datâ C G componat longitudinem C D in progressione geometricâ crescentem.




Sit enim areola D E e d datum temporis incrementum quàm minimum, (a) et erit D d reciprocè ut D E, ideóque directè ut C D. Ipsius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (b) (per hujus Lem. II.) est $\frac{Dd}{GDq}$, erit ut $\frac{CD}{GDq}$ seu $\frac{CG + GD}{GDq}$, id est, ut $\frac{1}{GD} + \frac{CG}{GDq}$. Igitur tempore A B E D per additionem data-

(a) * *Et erit D d reciprocè ut D E.* Est enim areola evanescens D E e d æqualis rectangulo D E × D d, quod, ob datum temporis incrementum, erit ut quantitas data, et ideò D d, est ut quantitas data divisa per D E, id est, reciprocè ut D E; sed (per Theor. IV. de Hyperb.) datum est rectangulum C D × D E, proindè C D, est reciprocè ut D E; quarè erit D d directè ut C D.

(b) * *Per hujus Lemma II.* Cas. 4.

rum particularum E D d e uniformiter crescente, decrescit $\frac{1}{\text{G D}}$ in eâdem ratione cum velocitate. ([c]) Nam decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc est (per Hypothesin) ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; et ipsius $\frac{1}{\text{G D}}$ decrementum est ut summa quantitatum $\frac{1}{\text{G D}}$ et $\frac{\text{C G}}{\text{G D q}}$, quarum prior est ipsa $\frac{1}{\text{G D}}$, et posterior $\frac{\text{C G}}{\text{G D q}}$ est ut $\frac{1}{\text{G D q}}$: proinde ([d]) $\frac{1}{\text{G D}}$, ob analogum decrementum, est ut velocitas. Et si quantitas G D, ipsi $\frac{1}{\text{G D}}$ reciprocè proportionalis, quantitate datâ C G augeatur; summa C D, tempore A B E D uniformiter crescente, ([e]) crescet in progressione geometricâ. Q. e. d.

*Corol.* 1. Igitur si, datis punctis A, G, exponatur tempus per aream hyperbolicam A B E D, ([f]) exponi potest velocitas per ipsius G D reciprocam $\frac{1}{\text{G D}}$.

([g]) *Corol.* 2. Sumendo autem G A ad G D ut velocitatis reciproca sub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis A B E D, invenietur punctum G. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

([c]) *Nam decrementum velocitatis*, dato temporis momento, *est ut resistentia* (15).

([d]) * $\frac{1}{G\,D}$, *ob analogum decrementum, est ut velocitas*. Si enim duarum quantitatum fluentium incrementa vel decrementa dato tempusculo producta analoga sint, eorum incrementorum vel decrementorum summæ seu fluentes ipsæ ab eodem initio sumptæ, sunt analogæ (per Cor. Lem. IV. Lib. I.).

([e]) * *Crescet in progressione geometricâ* (380. Lib. I.)

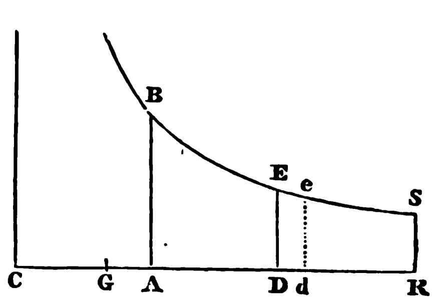
([f]) * *Exponi potest velocitas per ipsius G D reciprocam* $\frac{1}{G\,D}$. Undè patet velocitatem nonnisi tempore infinito extingui posse, * erit enim $\frac{1}{\text{G D}} = 0$, sive velocitas nulla ubi G D erit infinita, tunc autem area B A D E quæ tempus exprimit infinita etiam est, ex naturâ hyperbolæ.

([g]) * *Corol.* 2. Punctum A ad arbitrium assumitur in asymptoto C R et assumpto etiam quovis puncto D ut area A B E D tempus datum exponat, ità determinandum est punctum G, ut sit G A ad G D, ut velocitatis reciproca sub initio ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis A B E D, quod per Corol. 1. liquet. Invento autem puncto G, ex dato quovis alio tempore quod v. gr. sit ad tempus primò datum ut area A B S R, ad aream A B E D, dabitur velocitas quæ erit reciprocè ut G R, seu quæ erit ad velocitatem sub initio in A, ut G A ad G R datam.

## PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

*Iisdem positis, dico quòd si spatia descripta sumantur in progressione arithmeticâ, velocitates datâ quâdam quantitate auctæ erunt in progressione geometricâ.*

In asymptoto C D detur punctum R, et erecto perpendiculo R S; quod occurrat hyperbolæ in S, exponatur descriptum spatium per aream hyperbolicam R S E D; et velocitas erit ut longitudo G D, quæ cum datâ C G componit longitudinem C D in progressione geometricâ decrescentem, interea dum spatium R S E D augetur in arithmeticâ.




([h]) Etenim ob datum spatii incrementum E D d e, lineola D d, quæ decrementum est ipsius G D, erit reciprocè ut E D, ideóque directè ut C D, hoc est, ut summa ejusdem G D et longitudinis datæ C G. Sed velocitatis decrementum, tempore sibi reciprocè proportionali, quo data spatii particula D d e E describitur, ([i]) est ut resistentia et tempus conjunctim, id est directè ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, et inversè ut velocitas; ideóque directè ut summa duarum quantitatum, quarum una datur, altera est ut velocitas. Decrementum igitur tam velocitatis quam lineæ G D, est ut quantitas data et quantitas decrescens conjunctim, et propter analoga decrementa, ([k]) analogæ semper erunt quantitates decrescentes; nimirum velocitas et linea G D. Q. e. d.

*Corol.* 1. Si velocitas exponatur per longitudinem G D, spatium descriptum erit ut area hyperbolica D E S R.

*Corol.* 2. Et si utcunque assumatur punctum R, invenietur punctum G capiendo G R ad G D, ut est velocitas sub initio ad velocitatem post spa-

([h]) * *Etenim ob datum spatii incrementum,* per hypothesim quâ spatia supponuntur in arithmeticâ progressione crescere.

([i]) * *Est ut resistentia et tempus conjunctim.* Velocitatis decrementum est ut resistentia et tempus conjunctim (15), tempus verò est ut incrementum spatii directè et velocitas inversè, adeóque dato spatii incremento ut velocitas inversè. Quarè dato spatii incremento, velocitatis decrementum est ut resistentia directè et velocitas inversè, id est, directè ut summa duarum quantitatum, &c.

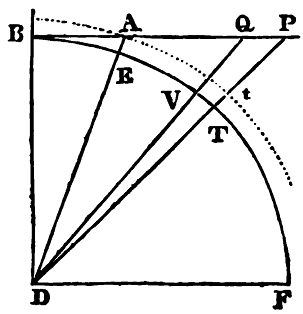
([k]) * *Analogæ semper erunt,* &c. (Per Cor. Lem. IV. Lib. I.).

tium quodvis R S E D descriptum. (¹) Invento autem puncto G, datur spatium ex datâ velocitate, et contra.

*Corol.* 3. Unde cùm (per Prop. XI.) detur velocitas ex dato tempore, et per hanc Propositionem detur spatium ex datâ velocitate; dabitur spatium ex dato tempore: et contra.

## PROPOSITIO XIII. THEOREMA X.

*Posito quod corpus ab uniformi gravitate deorsum attractum rectâ ascendit vel descendit; et quod eidem resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ: dico quod, si circuli et hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, et velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum a dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum sectores, rectis a centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: et contra.*

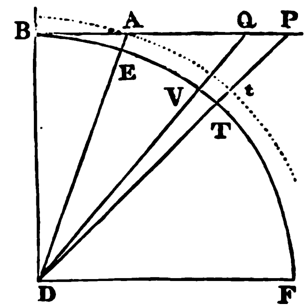



*Cas.* 1. Ponamus primo quòd corpus ascendit, centroque D et semi-diametro quovis D B describatur circuli quadrans B E T F, et per semi-diametri D B terminum B agatur infinita B A P, semi-diametro D F parallela. In eâ detur punctum A, et capiatur segmentum A P velocitati proportionale. Et cùm resistentiæ pars altera sit ut velocitas, et pars altera ut velocitatis quadratum; sit resistentia

(¹) * *Invento autem puncto G, &c.* Si enim velocitas data, sit ad velocitatem sub initio ut G A ad G R, dabitur punctum A, et hinc dabitur area A B S R, seu spatium descriptum. Et contrà dato spatio, sive datâ areâ A B S R, dabitur punctum A, et indè velocitas G A. Ex his autem patet spatium finitum infinito tempore describi; ubi enim punctum D coincidit cum puncto G, velocitas omnis extinguitur, et spatium descriptum exponitur per aream finitam quam ordinata R S abscindit cum alterâ ordinatâ per G ductâ; velocitas verò nonnisi infinito tempore potest evanescere (per Cor. 1. Prop. XI.).

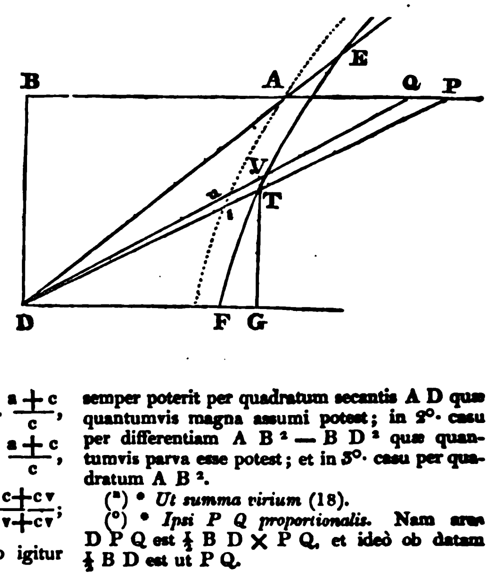
128. *Schol.* Eadem per analysim facilè inveniuntur. Dicantur resistentia r, celeritas initialis c, spatium descriptum s, tempus t, velocitas residua v, ponaturque $r = \frac{a v + v v}{b}$, erit (16, 17) $r d s = - v d v$, seu $a v d s + v v d s = - b v d v$, et hinc $d s = - \frac{b d v}{a + v}$, atque adeò $s = Q - b \times L. \overline{a + v}$; quia verò ubi $s = o$ fit $v = c$, invenitur constans $Q = b \times L. \overline{a + c}$, et ideò $s = b \times L. \frac{a + c}{a + v}$. Sit $L. h = 1$, et erit $\frac{s \times L. h}{b} = L. \frac{a + c}{a + v}$, ac $h^{\frac{s}{b}} = \frac{a + c}{a + v}$; undè eruitur $v = \frac{a + c}{h^{\frac{s}{b}}} - a$; quarè dato spatio datur velocitas et contrà. Cùm autem sit (13) $d t = \frac{d s}{v} = - \frac{b d v}{a v + v v} = \frac{b}{a} \times \frac{d v}{a + v} - \frac{b}{a} \times \frac{d v}{v}$, erit $t = Q + \frac{b}{a} \times L. \overline{a + v} - \frac{b}{a} \times L. v = Q + \frac{b}{a} \times L. \frac{a + v}{v}$, et po-

tota ut A P quad. + 2 B A P. Jungantur D A, D P circulum secantes in E ac T, (m) et exponatur gravitas per D A quad. ita ut sit gravitas ad resistentiam in P ut D A q ad A P q + 2 B A P: et tempus ascensus totius erit ut circuli sector E D T.




Agatur enim D V Q, abscindens et velocitatis A P momentum P Q, et sectoris D E T momentum D T V dato temporis momento respondens; et velocitatis decrementum illud P Q erit (n) ut summa virium gravitatis D A q et resistentiæ A P q + 2 B A P, id est (per Prop. XII. Lib. II. Elem.) ut D P quad. Proinde area D P Q, (o) ipsi P Q proportionalis, est ut D P quad. et area D T V, quæ est ad aream D P Q (p) ut D T q ad D P q, est ut datum D T q. Decrescit igitur area E D T uniformiter ad modum temporis futuri, per subductionem datarum particularum D T V, et propterea tempori ascensus totius proportionalis est. Q. e. d.

*Cas.* 2. Si velocitas in ascensu corporis exponatur per longitudinem A P ut prius, et resistentia ponatur esse ut A P q + 2 B A P, et si vis gravitatis minor sit quam quæ per D A q exponi possit; capiatur B D ejus longitudinis, ut sit A B q — B D q gravitati proportionale, sitque




sito t = o et v = c, fit $Q = -\frac{b}{a} \times L.\frac{a+c}{c}$, adeóque $t = \frac{b}{a} \times L.\frac{a+v}{v} - \frac{b}{a} \times L.\frac{a+c}{c}$, et hinc $t = \frac{b}{a} L.\frac{ac+cv}{av+cv}$, et $h^{\frac{at}{b}} = \frac{ac+cv}{av+cv}$; unde eruitur $v = \frac{ac}{ah^{\frac{at}{b}} + ch^{\frac{at}{b}} - c}$. Dato igitur tempore dabitur velocitas et spatium ac contrà.

(m) * *Et exponatur gravitas per D A q.* Corpore ascendente ratio gravitatis uniformis ad resistentiam vel major est ratione quadrati dati A B² ad quantitatem A P² + 2 B A P, vel minor vel æqualis. In 1°. casu gravitas exponi semper poterit per quadratum secantis A D quæ quantumvis magna assumi potest; in 2°. casu per differentiam A B² — B D² quæ quantumvis parva esse potest; et in 3°. casu per quadratum A B².

(n) * *Ut summa virium* (18).

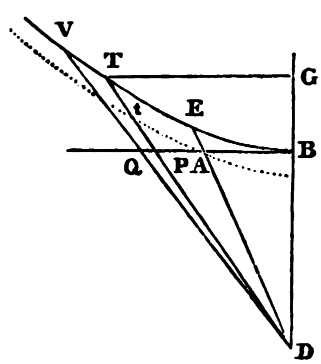
(o) * *Ipsi P Q proportionalis.* Nam area D P Q est ½ B D × P Q, et ideò ob datam ½ B D est ut P Q.

(p) * *Ut D T q ad D P q.* Triangulum evanescens D P Q, non differt a sectore circuli centro D et radio D Q descripti, inter lineas D Q et D P; hic verò sector est ad similem sectorem D T V, ut D P² ad D T², quarè area D T V, est ad aream D P Q, ut D T² ad D P², et permutando, area D T V est ad D T²,

D F ipsi D B perpendicularis et æqualis, et per verticem F describatur hyperbola F T V E, cujus semi-diametri conjugatæ sint D B et D F, quæque secet D A in E, et D P, D Q in T et V; et erit tempus ascensus totius ut hyperbolæ sector T D E.

Nam velocitatis decrementum P Q, in datâ temporis particulâ factum, est ut summa resistentiæ A P q + 2 B A P et gravitatis A B q — B D q, (q) id est, ut B P q — B D q. Est autem area D T V ad aream D P Q ut D T q ad D P q; ideóque, si ad D F demittatur perpendiculum G T, ut G T q seu G D q — D F q ad B D q, utque G D q ad B P q, et divisim ut D F q ad B P q — B D q. Quare cùm area D P Q sit ut P Q, id est, ut B P q — B D q; erit area D T V ut datum D F q. Decrescit igitur area E D T uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per subductionem particularum totidem datarum D T V, et propterea tempori proportionalis est. Q. e. d.

*Cas.* 3. Sit A P velocitas in descensu corporis, et A P q + 2 B A P resistentia, et B D q — A B q vis gravitatis, existente angulo D B A recto. Et si centro D, vertice principali B, describatur hyperbola rectangula B E T V secans productas D A, D P et D Q in E, T et V; erit hyperbolæ hujus sector D E T ut tempus totum descensûs.

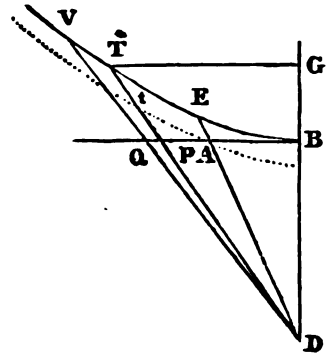



Nam velocitatis incrementum P Q, eique proportionalis area D P Q, est ut excessus gravitatis supra resistentiam, id est, ut B D q — A B q — 2 B A P — A P q seu B D q — B P q. Et area D T V est ad aream D P Q ut D T q ad D P q, ideóque (r) ut G T q seu G D q — B D q ad B P q, utque G D q ad B D q, et divisim ut B D q ad B D q — B P q. Quare cùm area D P Q sit ut B D q — B P q, erit area D T V ut datum B D q. Crescit igitur area E D T uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum D T V, et propterea tempori descensus proportionalis est. Q. e. d.

ut area D P Q ad D P ². Cùm igitur (ex dem.) area D P Q sit ut D P ², erit etiam area D T V ut D T ², seu ut datum quadratum D B ²; ergo, tempore dato, data est area D T V, et ideò temporibus æqualibus *æqualiter decrescit area E D T, ad modum temporis futuri*, &c.

(q) * *Id est ut B P q — B D q.* Est enim A P q + 2 B A P + A B q = B P q.

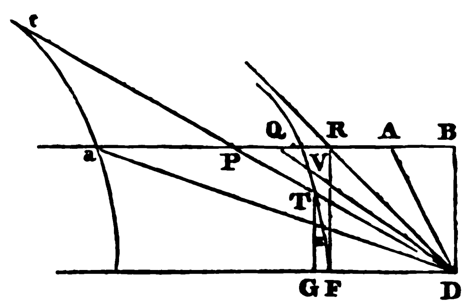
(r) *Ut G T q.* Nam ob similitudinem triangulorum D G T, P B D est D T q ad D P q ut G T q = G D q — B D q (ex conic. vid. not. in Cas. 2. Prop. IX.) ad B D q, *utque G D q ad B D q, et divisim*, &c.




*Corol.* Si centro D semi-diametro D A per verticem A ducatur arcus A t similis arcui E T, et similiter subtendens angulum A D T: velocitas A P erit ad velocitatem, quam corpus tempore E D T, in spatio non resistente, ascendendo amittere vel descendendo acquirere posset, ut area trianguli D A P ad aream sectoris D A t; ideóque ex dato tempore datur. (*) Nam velocitas, in medio non resistente, tempori, atque ideò sectori huic proportionalis est; in medio resistente est ut triangulum; et in medio utroque, ubi quàm minima est, accedit ad rationem æqualitatis, pro more sectoris et trianguli.

(*) * *Nam velocitas in medio non resistente* (25. Lib I.) *tempori* atque adeò sectori E D T, et proindè *sectori D A t, proportionalis est;* in medio resistente est ut A P, seu ob datam B D ut ½ B D × A P; sivè ut triangulum A D P; et in medio utroque ubi quàm minima est, nempe initio descensûs e quiete vel in fine ascensûs accedit ad rationem æqualitatis ob resistentiam evanescentem, evanescente velocitate, pro more sectoris D A t et trianguli D A P coëuntibus punctis t et P cum puncto A.

139. Quoniam ubi in corporis descensu B P fit = B D, angulus B D P semi-rectus evadit, et recta D P asymptotus hyperbolæ æquilateræ B E T; manifestum est quod corpus e quiete cadendo nonnisi finitam velocitatem infinito tempore possit acquirere. Erit enim velocitas tempore infinito acquisita B D — A B. Si verò corpus verticaliter deorsum datâ cum velocitate projiciatur, vel illa velocitas maximæ seu terminali B D — A B æqualis est, et in hoc casu corpus motu uniformi descendit ob resistentiam gravitati æqualem; vel terminali minor est, et corporis cadentis motus perpetuò acceleratur, donec infinito tempore velocitatem maximam acquirat; vel tandem terminali major est, tumque corporis motus perpetuò retardatur, donec infinito tempore elapso ad velocitatem terminalem reducatur; hoc autem casu sic absolvitur constructio.




Sit A a velocitas datæ projectionis terminali major, A P velocitas perpetuò decrescens, A P² + 2 B A P resistentia, et B D² — A B² vis gravitatis; existente angulo D B A recto; et si capiatur B R = B D, compleaturque quadratum D B R F, ac centro D et vertice principali F describatur hyperbola rectangula F E T V, secans rectas D a, D P et D Q, in E, T, V; tempus descensûs ab initio usquequò residua corpori velocitas sit A P, erit ut sector hyperbolicus D E T; nam velocitatis decrementum P Q, in datâ temporis particulâ factum eique proportionalis area D P Q est ut excessus resistentiæ suprà gravitatem (18), id est, ut A P² + 2 B A P + A B² — B D², seu B P² — B D²; et area D T V est ad aream D P Q, ut D T² ad D P², ideóque ut G T², (seu G D² — B D²) ad B D², et ut G D² ad B P², et divisim, ut B D² ad B P² — B D². Quarè cum area D P Q, sit ut B P² — B D², erit area D T V ut datum B D². Crescit igitur area E D T, uniformiter singulis temporis particulis æqualibus per additionem totidem datarum particularum D T V, et propterea tempori descensûs proportionalis est. Coincidente verò puncto P, cum R, et ideò rectâ D P, cum asymptoto D R, velocitas A P terminali A R seu B D — A B æqualis evadit, et sector D E T infinitus, proindeque tempus etiam infinitum fit. Q. e. d.

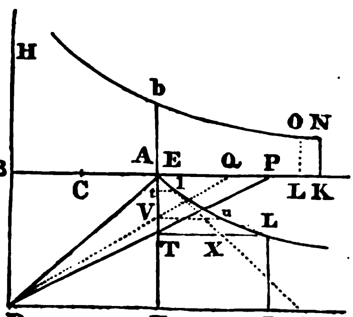
140. Hinc etiam si centro D, semi-diametro D a, per verticem a, ducatur arcus hyperbolicus a t similis arcui E T, et similiter subtendens

## *Scholium.*

(†) Demonstrari etiam posset casus in ascensu corporis, ubi vis gravitatis minor est quàm quæ exponi possit per D A q seu A B q + B D q, et major quàm quæ exponi possit per A B q — B D q, et exponi debet per A B q. Sed propero ad alia.

angulum a D T; velocitas a P, in medio resistente tempore E D T, extincta, erit ad velocitatem quam corpus eodem tempore in spatio non resistente e quiete descendendo acquirere posset, ut area trianguli D a P, ad aream sectoris D a t, ideóque ex dato tempore datur, et hinc datur quoque velocitas residua A P. Nam velocitas in medio non resistente acquisita tempori, atquè ideò sectori D E T, et proindè sectori simili D a t proportionalis est; velocitas in medio resistente extincta, est ut triangulum D a P, et in medio utroque ubi quàm minima est, accedit ad rationem æqualitatis pro more sectoris D a t, et trianguli D a P.

(†) 141. *Demonstrari posset casus in ascensu corporis, ubi vis gravitatis ..... exponi debet per A B q.* • Velocitas in ascensu exponatur per A P ut prius, sit resistentia ut A P q + 2 B A P, exponatur vis gravitatis per A B q capiatur B D et D F = B A erectoque perpendiculo F T A




erit tempus ascensus totius ut sector sive triangulum D T A, agatur enim D V Q abscindens et velocitatis momentum P Q et sectoris D T A momentum D T V, velocitatis decrementum P Q est ut summa resistentiæ et gravitatis sive ut A P q + 2 B A P + A B q id est (per 4. 2i. Elem.) ut B P q; est autem area D T V ad aream D P Q ut D T q ad D P q, sive ob triangula similia D T F, D P B, ut D F q ad B P q, est ergo area D T V ut datum D F q. *Decrescit igitur area D T A ad modum temporis futuri per subductionem particularum D T V, et propterea tempori ascensus totius proportionalis est.* •

Si itaque resistentia ponatur esse ut A P² + 2 B A P, vis autem gravitatis ut A B²; tempus ascensûs totius erit ut A T et etiam ut $\frac{AP}{BP}$. Nam triangulum D T A, ob altitudinem constantem D F, est ut basis A T et propter triangula similia D T F, A T P est D F : T F = A P : A T; et jungendo terminos secundæ rationis cum terminis primæ est D F + A P (sive B P) : T F + A T (sive B D) = A P : A T, est ergo A T = $\frac{AP \times BD}{BP}$ sive ob datum B D, A T est ut $\frac{AP}{BP}$.

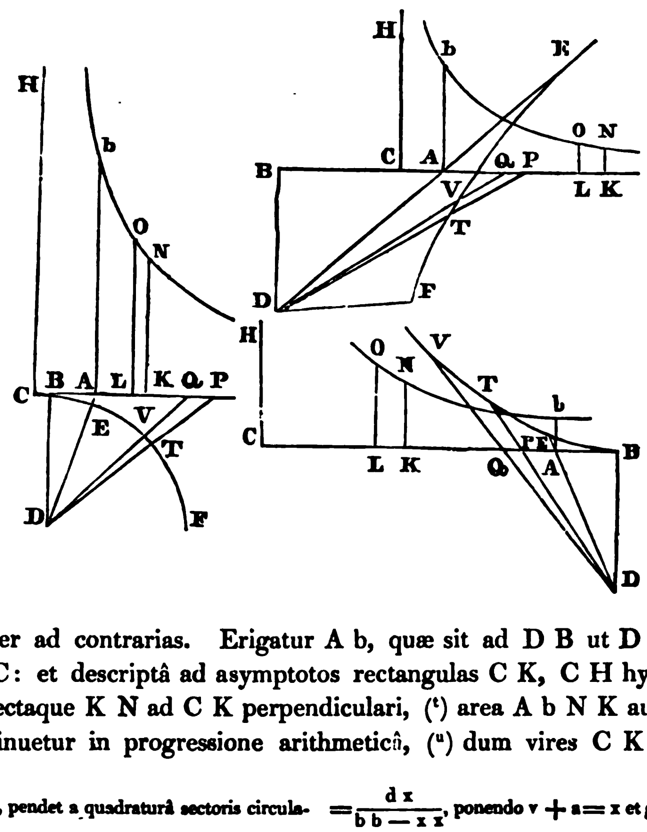
142. In isto casu velocitas A P est ad velocitatem quam corpus tempore D A T sive $\frac{AP}{BP}$ in spatio non resistente ascendendo amittere vel descendendo acquirere posset, ut B P ad A B. Nam velocitas in medio non resistente tempori atquè ideò areæ D A T sive rectæ A T proportionalis est; in medio resistente est ut A P, et in medio utroque ubi quàm minima est, accedit ad rationem æqualitatis; nam cum capiatur B D = A B, ratio linearum A P, A T, in puncto A ubi quàm minima est, accedit ad rationem linearum A F, F D quæ est æqualitatis. Quare velocitas A P, in medio resistente erit ad velocitatem in medio non resistente eodem tempore D A T amissam acquisitam ut A P ad A T, hoc est ob triangula similia A P T, B P D ut B P ad B D vel A B. Q. e. d.

143. Ex formulis quas (19) dedimus facilè intelligitur quomodo ad hoc Theorema X. deveniatur. Nam si dicatur gravitas g, velocitas v, resistentia 2 a v + v v, et tempus t; corpore ascendente erit (16. 17) g d t + 2 a v d t + v v d t = — d v, et ideò d t = $\frac{-dv}{vv+2av+g}$. Ponatur v + a = x, et ideò d v = d x, et v v + 2 a v = x x — a a, fiet d t = $\frac{-dx}{xx+g-aa}$. Undè si fuerit g = a a, erit d t = $\frac{-dx}{xx}$; si g — a a = b b, erit d t = $\frac{-dx}{xx+bb}$. Si g — a a = — b b erit d t = $\frac{-dx}{xx-bb}$. Fluens quantitatis $-\frac{dx}{xx}$, est $\frac{1}{x}$, fluens quantitatis

## PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

*Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areæ per quam tempus exponitur, et areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione arithmeticâ; si vires ex resistentiâ et gravitate compositæ sumantur in progressione geometricâ.*

Capiatur A C in (fig. tribus ultimis) gravitati, et A K resistentiæ proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncti A si corpus descen-




dit, aliter ad contrarias. Erigatur A b, quæ sit ad D B ut D B q ad 4 B A C: et descriptâ ad asymptotos rectangulas C K, C H hyperbolâ b N, erectaque K N ad C K perpendiculari, (t) area A b N K augebitur vel diminuetur in progressione arithmeticâ, (u) dum vires C K in pro-

$\frac{-dx}{xx+bb}$, pendet a quadraturâ sectoris circularis (107), fluens quantitatis $\frac{-dx}{xx-bb}$, a quadraturâ sectoris hyperbolici; atquè hi sunt tres casus pro corporis ascensu; pro descensu verò est (19) $g\,dt - 2av\,dt - vv\,dt = dv$, et ideò $dt = \frac{dv}{g-2av-vv} = \frac{dx}{g+aa-xx}$ $= \frac{dx}{bb-xx}$, ponendo $v + a = x$ et $g + aa = bb$, fluens autem quantitatis $\frac{dx}{bb-xx}$, pendet a quadraturâ hyperbolæ.

(t) * *Area A b N K augebitur vel*, &c. (380. Lib. 1.).

(u) * *Dum vires C K*, &c. Sunt enim vires acceleratrices vel retardatrices ut C K, siquidem

gressione geometricâ sumuntur. (z) Dico igitur quòd distantia corporis ab ejus altitudine maximâ sit ut excessus areæ A b N K supra aream D E T.

Nam cùm A K sit ut resistentia, id est, ut A P q + 2 B A P; assumatur data quævis quantitas Z, et ponatur A K æqualis $\frac{A\,P\,q + 2\,B\,A\,P}{Z}$; et (per hujus Lemma II.) erit ipsius A K momentum K L æquale $\frac{2\,A\,P\,Q + 2\,B\,A \times P\,Q}{Z}$ seu $\frac{2\,B\,P\,Q}{Z}$, et areæ A b N K momentum K L O N æquale $\frac{2\,B\,P\,Q \times L\,O}{Z}$ (a) seu $\frac{B\,P\,Q \times B\,D\text{ cub.}}{2\,Z \times C\,K \times A\,B}$.

*Cas.* 1. Jam si corpus ascendit, (a) sitque gravitas ut A B q + B D q existente B E T circulo (in figurâ primâ) (b) linea A C, quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{A\,B\,q + B\,D\,q}{Z}$, (c) et D P q seu A P q + 2 B A P + A B q + B D q erit A K × Z + A C × Z seu C K × Z; (d) ideóque area D T V erit ad aream D P Q ut D T q vel D B q ad C K × Z.

*Cas.* 2. Sin corpus ascendit, et gravitas sit ut A B q — B D q, (e) linea A C (in figurâ secundâ) erit $\frac{A\,B\,q - B\,D\,q}{Z}$, (f) et D T q erit ad D P q ut D F q seu D B q ad B P q — B D q seu A P q + 2 B A P + A B q — B D q, id est, ad A K × Z + A C × Z seu C K × Z.

in corporis ascensu vis retardatrix est A C + A K, seu summa virium gravitatis et resistentiæ, et in descensu vis acceleratrix est A C — A K = C K seu excessus vis gravitatis supra resistentiam (18).

(z) * *Dico igitur quod distantia corporis ascendentis ab ejus altitudine maximâ* et distantia descendentis a puncto quietis et quo decidit *sit ut excessus*, &c.

(a) * *Seu*, &c. Nam (per Theor. IV. de Hyp.) est L O : A b = C A : C K, et (per constr.) A b : D B = D B² : 4 B A × A C, ideóque (ex æquo) L O : D B = D B² : 4 B A × C K, et hinc $L\,O = \frac{D\,B^3}{4\,C\,K \times B\,A}$. Quarè momentum K L O N = L O × K L = $\frac{2\,B\,P\,Q \times L\,O}{Z} = \frac{B\,P\,Q \times B\,D^3}{2\,Z \times C\,K \times A\,B}$.

(a) * *Sitque gravitas*, &c. In Cas. 1°. Prop. XIII. gravitas erat ut $D\,A^2 = A\,B^2 + B\,D^2$.

(b) * *Linea A C*, &c. Est enim in Cas. 1°. Prop. XIII. gravitas ad resistentiam ut A B² + B D² ad A P² + 2 B A P, et (per Hyp.) ut A C ad A K, seu $\frac{A\,P^2 + 2\,B\,A\,P}{Z}$. Quarè erit A B² + B D² ad A P² + 2 B A P ut A C ad $\frac{A\,P^2 + 2\,B\,A\,P}{Z}$, et hinc habetur $A\,C = \frac{A\,B^2 + B\,D^2}{Z}$, et $A\,C \times Z = A\,B^2 + B\,D^2$.

(c) * *Et D P q*, &c. Ob angulum D B P rectum, et quia $A\,K \times Z = A\,P^2 + 2\,B\,A\,P$, atque $A\,C \times Z = A\,B^2 + B\,D^2$, ut ex superioribus patet.

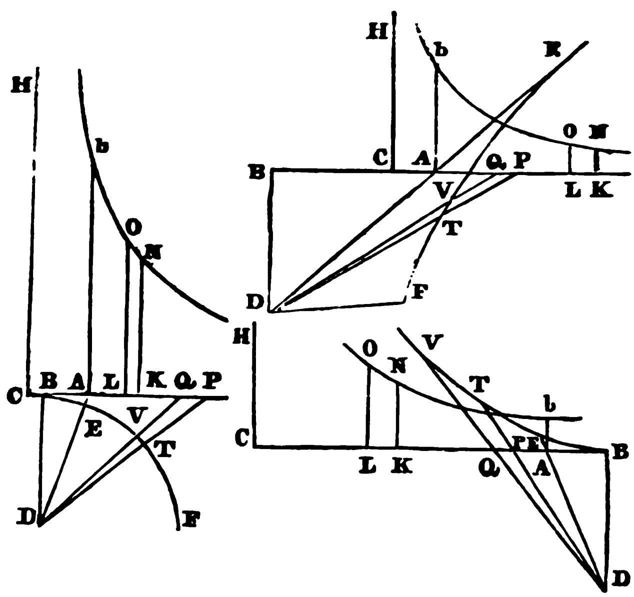
(d) * *Ideóque area D T V*, &c. Nam (ex dem. in 1°. Casu Prop. XIII.) area D T V est ad aream D P Q, ut D T² vel D B² ad D P², et est $D\,P^2 = C\,K \times Z$.

(e) * *Linea A C*, &c. Patet ut in primo casu hujus.

(f) *Et D T q erit ad D P q*. Patet (ex dem. in Cas. 2°. Prop. XIII.)

(g) Ideóque area D T V erit ad aream D P Q ut D B q ad C K × Z.

*Cas.* 3. Et eodem argumento, si corpus descendit, et propterea gravitas sit ut B D q — A B q, et linea A C (in figurâ tertiâ) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$ (h) erit area D T V ad aream D P Q ut D B q ad C K × Z: ut supra.




Cum igitur areæ illæ semper sint in hâc ratione; si pro areâ D T V, quâ momentum temporis sibimet ipsi semper æquale exponitur, scribatur determinatum quodvis rectangulum, putà B D × m, erit area D P Q, id est, ½ B D × P Q, ad B D × m ut C K × Z ad B D q. Atque inde fit P Q × B D cub. æquale 2 B D × m × C K × Z, et areæ A b N K (i) momentum K L O N superius inventum fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Au-

(g) * *Ideóque area D T V*, &c. Nam (ex dem. in 2°. Cas. Prop. XIII.) area D T V, est ad aream D P Q, ut $BD^2$ ad $BD^2 - BP^2 = BD^2 - AB^2 - 2BAP - AP^2 = AC \times Z - AK \times Z = CK \times Z$.

(h) * *Erit area D T V.* (Ex demonstratis in 3°. Cas. Prop. XIII.) area D T V est ad aream D P Q, ut $BD^2$ ad $BD^2 - BP^2 = BD^2 - AB^2 - 2BAP - AP^2 = AC \times Z - AK \times Z = CK \times Z$.

(i) * *Momentum K L O N superius inventum* est $\frac{BPQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB} = \frac{BP \times PQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB}$. Quarè cum sit $PQ \times BD^3 = 2BD \times m \times CK \times Z$, erit $KLON = \frac{BP \times BD \times m}{AB}$.

feratur areæ D E T momentum D T V seu B D × m, et restabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Est igitur differentia momentorum, id est, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; et propterea ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$ ut velocitas A P, (k) id est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo vel descendendo describit. Ideóque differentia arearum et spatium illud proportionalibus momentis crescentia vel decrescentia et simul incipientia vel simul evanescentia, (l) sunt proportionalia. Q. e. d.

*Corol.* Si longitudo, quæ oritur applicando aream D E T ad lineam B D, dicatur M; et longitudo alia V sumatur in eâ ratione ad longitudinem M, quam habet linea D A ad lineam D E: spatium, quod corpus ascensu vel descensu toto in medio resistente describit, erit ad spatium in medio non resistente e quiete cadendo eodem tempore describere potest, ut arearum prædictarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{AB}$: ideóque ex dato tempore datur. Nam spatium in medio non resistente est in duplicatâ ratione temporis, (m) sive ut $V^2$; et ob datas B D et A B ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$. (n) Hæc area æqualis est areæ $\frac{DAq \times BD \times M^2}{DEq \times AB}$, (o) et ipsius M momentum est m; et propterea hujus areæ momentum est $\frac{DAq \times BD \times 2M \times m}{DEq \times AB}$. Hoc autem momentum est ad momentum differentiæ arearum prædictarum D E T et A b N K, viz. ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, ut $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq}$ ad $\frac{1}{2}$ B D × A P, (p) sive ut $\frac{DAq}{DEq}$ in D E T ad D A P, ideóque, ubi

(k) * *Id est ut momentum spatii.* Nam dato temporis momento, momentum spatii est ut velocitas (11.).

(l) * *Sunt proportionalia.* (Per Corol. Lem. IV. Lib. I.) Dum autem evanescit A P, seu velocitas, evanescit quoque resistentia A K, cum areâ A b N K, et tempore D T E.

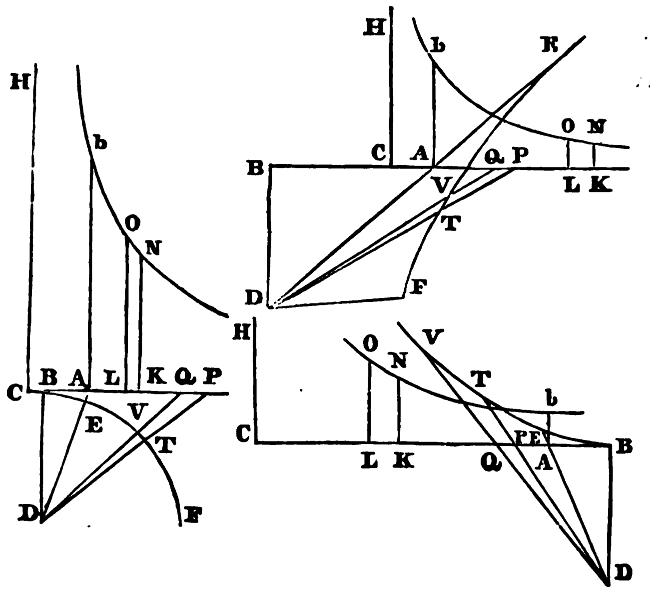
(m) * *Sivè ut $V^2$.* Nam ob datas B D, D A, D E, longitudo quæ æquatur D E T × $\frac{DA}{BD \times DE}$ (per Hyp.) est ut area D E T, seu ut tempus. Spatium autem in medio non resistente est in duplicatâ ratione temporis (27. Lib. I.) ideóque ut $V^2$.

(n) * *Hæc area.* Quoniam (per Hyp.) V : M = D A : D E, erit $V = \frac{DA \times M}{DE}$ et $V^2 = \frac{DA^2 \times M^2}{DE^2}$, adeóque $\frac{BD \times V^2}{AB} = \frac{DA^2 \times BD \times M^2}{DE^2 \times AB}$.

(o) * *Et ipsius M momentum est m.* Cùm enim sit (per Hyp.) $M = \frac{DET}{BD}$, momentum ipsius M, erit $\frac{DTV}{BD}$, sed superiùs supponebatur D T V = B D × m; quarè momentum ipsius M, est m; et ideò momentum quadrati $M^2$ est 2 M × m (per Cas. 3. Lem. hujus) et propterea ob datas D A, B D, D E et A B, *hujus areæ momentum*, &c.

(p) * *Sivè ut $\frac{DAq}{DEq}$ in D E T,* &c. Ob

areæ D E T et D A P quam minimæ sunt, (q) in ratione æqualitatis. Area igitur $\frac{BD \times V^2}{AB}$, et differentia arearum D E T et A b N K, quan-




do omnes hæ areæ quam minimæ sunt, æqualia habent momenta; (r) ideóque sunt æquales. Unde cum velocitates, et propterea etiam spatia in medio utroque in principio descensûs vel fine ascensûs simul descripta (s) accedant ad æqualitatem; ideóque tunc sint ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{AB}$, et arearum D E T et A b N K differentia; et præterea cùm

$M = \frac{DET}{BD}$, ideóque $M \times BD = DET$, et $\frac{1}{2} BD \times AP = DAP$.

(q) * *In ratione æqualitatis.* Ubi enim areæ D E T et D A P quam minimæ sunt, fit $DET : DAP = DE^2 : DA^2$, ideóque $\frac{DA^2}{DE^2} \times DET = DAP$.

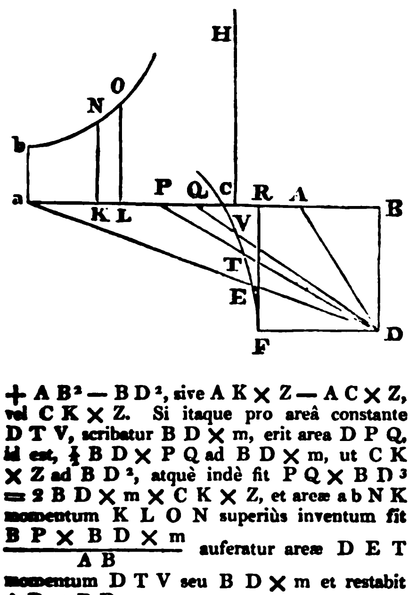
(r) *Ideóque sunt æquales.* Quandò sunt quam minimæ.

(s) *Accedant ad æqualitatem.* Ob resistentiam cum velocitate nascentem vel evanescentem, manente gravitate.

144. Constructione Casûs 3i. Propositionis hujus 14æ. uti possumus ad determinandum motum corporis verticaliter deorsum projecti cum velocitate quæ terminali minor est. Nam si æqualis ipsi fuerit, motus est æquabilis; si verò celeritas projectionis terminali major sit, paulò mutanda erit Casûs tertii constructio. Iisdem enim positis in not. 139. capiatur A C gravitati et A K resistentiæ proportionalis, ità ut sit C inter A et K, quod resistentia gravitate major supponatur. Sit A a velocitas projectionis terminali major; erigatur perpendicularis a b, quæ sit ad D B, ut D B², ad 4 A B × C a, et descriptâ ad asymptotos rectangulas C K, C H hyperbolâ b N, erectâque K N ad C K, perpendiculari, area a b N K augebitur in progressione arithmeticâ, dum vires C K in progressione geometricâ minuuntur. Spatium autem tempore D E T descriptum erit ut excessus areæ a b N K, suprà aream D E T; nam ponatur, (ut in de-

spatium in medio non resistente sit perpetuò ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$, et spatium in medio resistente sit perpetuò ut arearum D E T et A b N K differentia: necesse est, ut spatia in medio utroque, in æqualibus quibuscunque temporibus descripta, sint ad invicem ut area illa $\frac{BD \times V^2}{AB}$, et arearum D E T et A b N K differentia. Q. e. d.

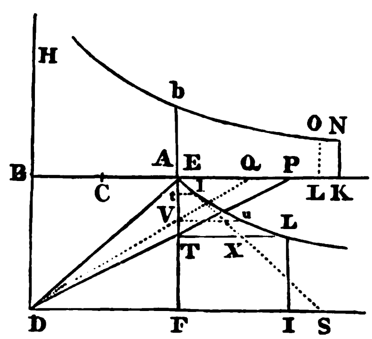
monstratione Prop. XIV.) $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$, et ideò $KL = \frac{2BPQ}{Z}$ atque areæ a b N K momentum K L O N, $= \frac{2BPQ \times LO}{Z} = \frac{BPQ \times DB^3}{2Z \times AB \times CK}$. Cùm gravitas sit ut $BD^2 - AB^2$, erit $AC = \frac{BD^2 - AB^2}{Z}$, et area D T V ad aream D P Q ut $BD^2$ ad $BP^2 - BD^2$ (136) sive $AP^2 + 2BAP$




$+ AB^2 - BD^2$, sive $AK \times Z - AC \times Z$, vel $CK \times Z$. Si itaque pro areâ constante D T V, scribatur $BD \times m$, erit area D P Q, id est, $\frac{1}{2} BD \times PQ$ ad $BD \times m$, ut $CK \times Z$ ad $BD^2$, atquè indè fit $PQ \times BD^3 = 2BD \times m \times CK \times Z$, et areæ a b N K momentum K L O N superiùs inventum fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$ auferatur areæ D E T momentum D T V seu $BD \times m$ et restabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Est igitur differentia momentorum, id est, momentum differentiæ arearum ut velocitas A P, id est, ut momentum spatii quod corpus describit, ideóque differentia arearum ut spatium descriptum.

145. Hinc spatium tempore D E T, velocitate uniformi A a descriptum est ad spatium eodem tempore descriptum in medio resistente ut factum $Aa \times DET$ ad arearum a b N K et D E T differentiam in A B ductam. Nam spatium tempore D E T, velocitate uniformi A a descriptum, est ut $Aa \times DET$ (5. Lib. I.) et spatii hujus momentum est ut $Aa \times DTV$; momentum autem spatii in medio resistente descripti est ut $AP \times DTV$, seu ut velocitas in momentum temporis ducta (12) et quia evanescente D E T, fit $AP = Aa$, hæc momenta $Aa \times DTV$, $AP \times DTV$, initio temporis æqualia sunt, sicut et spatia initio descripta. Sed $AP \times DTV = AP \times BD \times m$ et momentum differentiæ arearum a b N K et D E T; est $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$ (144). Ergo $AP \times DTV$ æquale est momento differentiæ arearum a b N K et D E T per A B ducto, unde manifestum est propositum.

146. Si corporis ascendentis velocitas exponatur per longitudinem A P, et resistentia per A K quæ ponatur esse ut $AP^2 + 2BAP$, ita ut assumptâ datâ quâvis quantitate Z, sit $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$; vis autem gravitatis exponatur per A C, quæ sit semper ut $AB^2$, ita ut




sit $AC = \frac{AB^2}{Z}$ eademque constructio fiat quæ (not. 141.) * et in A erigatur perpendiculum $Ab = \frac{AB^2}{4CA}$. Denique erecto perpendi-

*Scholium.*

(t) Resistentia corporum sphæricorum in fluidis oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, et partim ex densitate medii. Et resistentiæ

culo in C describatur ad asymptotos rectangulos C K, C H hyperbolâ b N, erectâque K N ad C K perpendiculari, area A b N K diminuetur in progressione arithmeticâ dum vires C K in progressione geometricâ decrescente sumuntur. Et distantia corporis ab ejus altitudine maximâ erit ut excessus areæ A b N K supra triangulum D E T.

Cùm enim sit $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$ erit ipsius A K momentum K L (per Lib. II. Lem. II.) $= \frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z} = \frac{2BPQ}{Z}$ et areæ AbNK momentum KLON $= \frac{2BPQ \times LO}{Z}$, et quia, per naturam hyp. est $CK : CA = Ab \left(\text{sive } \frac{AB^2}{4CA}\right) : LO$, est $LO = \frac{AB^2}{4CK}$, ideóque $KLON = \frac{BP \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$. Est verò area D T V ad aream D P Q ut $DT^2$ ad $DP^2$, sive etiam ob triangula similia T D F, B D P, ut $DF^2$ sive $AB^2$ ad $BP^2$, seu $AP^2 + 2BAP + AB^2$ (per 4. 2. El.) hoc est (quia ex hypothesi est, $AP + 2BAP = AK \times Z$, et $AB^2 = CA \times Z$) ad $CK \times Z$.

Hinc si pro area D P Q scribatur ejus valor $\frac{1}{2} BD \times PQ = \frac{1}{2} AB \times PQ$, erit area $DTV = \frac{AB \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$, quæ valorem constantem exprimere debet, quia momentum temporis sibi semper æquale exponit, ejus itaque loco scribatur rectangulum $AB \times m$ in quo m erit momentum constans, est $m = \frac{AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$, erit ergo areæ A b N K momentum superius inventum $\frac{BP \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK} = BP \times m$, igitur differentia momentorum K L O N et D T V, est $BP \times m - AB \times m = AP \times m$ et propterea ob datum m ut velocitas A P, id est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo describit, et quo minuitur corporis distantia ab ejus altitudine maximâ. Ideóque differentia arearum et spatium illud proportionalibus momentis decrescentia, simulque evanescentia sunt proportionalia.

Verùm in isto casu facilius quam per methodum Newtonianam obtinetur spatium a corpore ascendente usque ad quietem in medio resistente descriptum, et ejus relatio ad spatium in medio non resistente eodem tempore percurrendum: etenim per punctum A asymptotis D B, D F describatur hyperbola, et ex puncto T ducatur perpendiculum T L ad hyperbolam usque, trilineum A T L erit ut spatium quæsitum. Ducatur L I ad asymptotum perpendicularis, erit $FI = TL$ et $TF = LI$, sed ex natura hyperbolæ est $DF : DI = LI$ (sive T F) : A F, et dividendo $DF : FI$ (sive T L) $= TF : AT$, hoc est alternando $DF : TF = TL : AT$, (sed per 141) est $DF : TF = AP : AT$,




ergo est $AP = TL$, itaque ducta ex V parallela V u, erit V T L u, momentum areæ $ATL = VT \times TL$, est autem V T momentum temporis, et $TL = AP$ ipsa velocitas eo momento, ergo $VT \times TL$ est ut momentum spatii eo momento descripti, ergo tota area A T L est ut spatium descriptum.

Ducatur præterea tangens A S et designet A t ultimum temporis momentum, et ducta t l, trilineum evanescens A T L æquale fiet triangulo A t l, et eo ultimo momento spatia tam in medio resistente quam in non resistente descripta erunt æqualia, ideóque per idem triangulum A t l exprimentur; spatia verò in medio non resistente descripta sunt ut quadrata temporum, ideóque spatium tempore A t in medio non resistente descriptum erit ad spatium tempore A T in eodem medio descriptum sicut $\overline{At}^2$ ad $\overline{AT}^2$, sive ut area trianguli A t l ad aream A T X; spatium verò in medio resistente descriptum tempore A t erit ad spatium tempore A T in eodem medio descriptum ut A t l ad trilineum A T L, unde liquet quod spatium in medio non resistente descriptum, ascendendo ad quietem usque, erit ad spatium in medio resistente descriptum, ut A T X ad A T L, existente velocitate, in medio non resistente, ut T X, et in medio resistente, ut T L.

(t) * *Resistentia corporum.* (Vid. Lem. num. I.)

partem illam, quæ oritur ex densitate fluidi, diximus esse in duplicata ratione velocitatis; pars altera, quæ oritur ex tenacitate fluidi, est uniformis, sive ut momentum temporis: ideóque jam pergere liceret ad motum corporum, quibus resistitur partim vi uniformi seu in ratione momentorum temporis, et partim in ratione duplicatâ velocitatis. Sed sufficit aditum patefecisse ad hanc speculationem in Propositionibus VIII. et IX. quæ præcedunt, et eorum Corollariis. ([u]) In iisdem utique pro corporis ascendentis resistentiâ uniformi, quæ ex ejus gravitate oritur, substitui potest resistentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii, quando corpus solâ vi insitâ movetur; et corpore rectâ ascendente addere licet hanc uniformem resistentiam vi gravitatis; eandemque subducere, quando corpus rectâ descendit. Pergere etiam liceret ad motum corporum, quibus resistitur partim uniformiter, partim in ratione velocitatis, et partim in ratione duplicatâ velocitatis. Et viam aperui in Propositionibus præcedentibus XIII. et XIV. ([x]) in quibus etiam resistentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii pro vi gravitatis, substitui potest, vel cum eâdem, ut prius, componi. Sed propero ad alia.

([u]) * *In iisdem utique* (105).

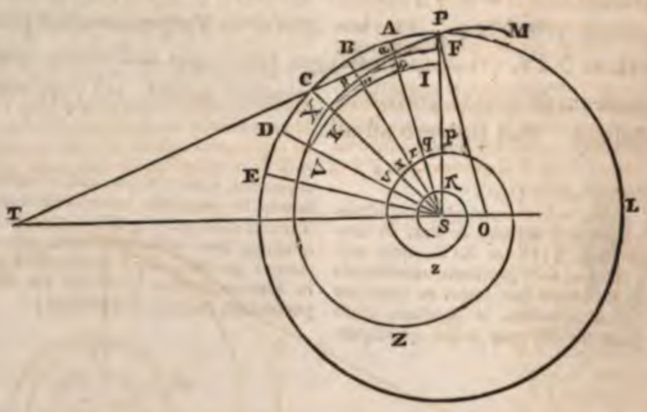
([x]) * *In quibus etiam resistentia uniformis*, hoc est, si corpus solâ vi insitâ feratur, in constructionibus Prop. XIII. et XIV., quæ sunt pro corporis ascensu, loco gravitatis substituenda est resistentia uniformis quæ oritur ex tenacitate medii; si corpus ascendens vi gravitatis etiam urgeatur, quantitas illa quæ solam gravitatem exponebat, summam gravitatis et resistentiæ uniformis in prædictis constructionibus exponet. Tandem si corpus vi gravitatis descendat, eadem quantitas quæ solam gravitatem exponebat, excessum gravitatis suprà resistentiam uniformem in constructionibus quæ sunt pro descensu repræsentabit (cæteris manentibus.)

# SECTIO IV.

## *De corporum circulari motu in mediis resistentibus* (*).

(*) Newtonus in hâc sectione præcipuas supponit logarithmicæ spiralis proprietates, postulat igitur instituti nostri ratio ut de illâ curvâ aliquid præmittamus.

147. Circulus P A E L, centro S, et radio quovis S P descriptus divisus sit in arcus quotlibet æquales P A, A B, B C, C D, &c., sintque radiorum P S, A S, B S, C S, &c., partes P S, Q S, R S, X S, &c. in continuâ progressione geometricâ, puncta P, Q, R, X, &c., erunt in spirali logarithmicâ in quâ proindè si radii Q S, R S, X S, &c., sint numeri, arcus circuli P A, P B, P C, &c., sicut et anguli P S Q, P S R, P S X, &c., erunt ut illorum numerorum logarithmi, prorsùs ut in vulgari logarithmicâ axis partes sunt ut logarithmi ordinatarum correspondentium.




148. Quoniam autem progressio geometrica in infinitum decrescere et crescere potest, manifestum est spiralem logarithmicam utrinquè tam ad centrum S accedendo quàm ab eodem versùs M recedendo per gyros infinitos continuari posse, continuatâ progressione radiorum decrescentium vel crescentium circà centrum S, ad quod idcircò curva decrescentibus radiis proportionalibus, magis magisque accedit, licet numquam illud possit attingere, sive ut loqui amant, licet illud centrum non attingat nisi post infinitas revolutiones.

149. Angulus S Q R, quem radius quilibet S Q, cum curvâ ad easdem partes constituit constans est; si quidem evanescentibus arcubus æqualibus P A, A B, B C, &c., triangula evanascentia P S Q, Q S R, R S X, &c., similia fiunt propter latera circà æquales ad centrum angulos proportionalia (147) et ideò alii anguli homologi S P Q, S Q R, S R X, &c., et P Q S, Q R S, R X S, æquales sunt.

150. Quoniam itaque spira quælibet P Q R Z p, p q r z π, &c., totidem triangulis P Q S et p q S, Q R S et q r S, &c. similibus similiterque positis divisa est, spiræ omnes quæ a radio positione dato S P, ad eundem radium ductæ sunt, inter se similes radiisque correspondentibus proportionales erunt, id est P S : p S = P Q R Z p : p q r z π, &c. Atquè hinc sequitur (147) tam spiras omnes quàm radios ipsis correspondentes ad centrum usque in progressione geometricâ decrescere, sunt enim P S, p S, π S, &c. progressionis geometricæ termini æquidistantes ob æqualem angulorum æqualium P S Q, Q S R, p S q, q S r, &c. numerum in singulis spiris comprehensum, undè radiorum quoque differentiæ P p, p π, &c. in eâdem geometricâ progressione decrescunt.

151. Ductâ rectâ P T spiralem tangente in P, et rectâ P O ad eandem perpendiculari, per centrum S erigatur ad radium S P perpendiculum T S O rectis P T et P O occurrens in T et O, longitudo spiralis P Z p z π S, ad centrum usque S, æquabitur tangenti P T, eritque proindè ad radium S P in datâ ratione P T ad S P, vel O P ad O S. Nam centro S, radiis S Q, S R, S X, S V, &c. infinitè propinquis descripti sint arcus circulares Q F, R G, X H, V K, &c., et ob angulos Q F P, R G Q, X H R rectos, angulosque Q P F, R Q G, X R H, &c. æqua-

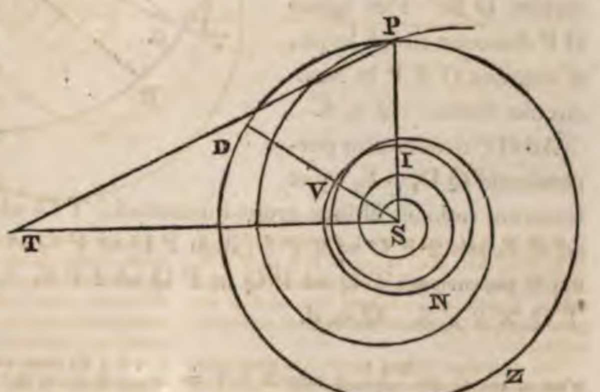
les (149), triangula evanescentia P F Q, Q G R, R H X, &c. similia sunt triangulo P S T, est igitur P T : P S = P Q : P F = Q R : Q G = R X : R H, &c. et composite P T : P S = P Q + Q R + R X, &c. : P F + Q G + R H, &c. id est, ut longitudo spiralis ad totum radium P S. Quarè longitudo spiralis æquatur tangenti P T. Est autem ubique tangens P T ad radium correspondentem P S, in ratione datâ, ob triangulum P T S specie datum (149) et ob triangula T P S, P O S, (per constr.) similia, est etiam O P : O S = P T : P S, seu ut longitudo spiralis ad radium.

152. Hinc quoque patet quòd si centro S et radio quovis V S describatur circulus secans spiralem in V et radium P S, in I, pars spiralis P V erit ad partem P I radii P S, ut tangens P T ad totum radium P S. Quarè si, manentibus circulorum radiis S P, S I, mutetur utcumque angulus T P S, quem spiralis seu ipsius tangens continet cum radio P S, longitudo spiralis tota ad centrum usquè S, sicut et longitudo inter duos circulos radiis S P, et S I descriptos comprehensa, erit ut spiralis tangens P T, seu ut secans anguli T P S. Ostendimus (151) longitudinem spiralis æqualem esse tangenti P T, et partem spiralis P V, inter prædictos circulos contentam, esse ad tangentem P T, in ratione P I ad P S, quæ (per Hyp.) data est; manente autem radio seu sinu toto P S, est P T secans anguli P T S.

153. Dicantur radius constans P S = a, subtangens S T = b, arcus quilibet circuli P C vel P C L P + P C, vel 2 P C L P + P C = x, correspondens spiralis radius S X = y, qui crescente arcu x decrescit, erit ob triangulorum X K V, P S T similitudinem P S : S T = X K : V K, et ob sectores S V K, S D C similes, S K sive S X : S C seu P S = V K : D C, ideóque ex æquo S X : S T = X K : D C; id est, y : b = — d y : $d\,x = -\frac{b\,d\,y}{y}$, hinc sumptis fluentibus x = Q — b L. y, et quia ubi x = o, fit y = a, erit Q = b L. a, et ideò x = b L. a — b L. y = $b\,L.\frac{a}{y}$; si itaque datus fuerit radius y cum arcu circulari x, seu angulo P S C dabitur b subtangens anguli spiralis, est enim $b = \frac{x}{L.\frac{a}{y}}$. Si verò datus sit tum arcus x tum subtangens b dabitur radius y; ponatur enim L. h = 1 et erit $\frac{x}{b} \times L.\,h = L.\frac{a}{y}$, adeóque $h^{\frac{x}{b}} = \frac{a}{y}$; $y = \frac{a}{h^{\frac{x}{b}}}$, et hinc aitem $a = y \times h^{\frac{x}{b}}$.

154. Hinc si manentibus radiis S P seu a, et S V vel S I seu y, adeóque et $L.\frac{a}{y}$, mutetur utcumque angulus T P S, quem spiralis cum radio continet, arcus circularis P D vel x, comprehensus inter radios S P et S V D, erit semper ut subtangens spiralis S T, seu b, quæ, manente radio seu sinu toto P S, est ut anguli T P S tangens.

155. Iisdem positis, hoc est, manentibus radiis S P sive a, et S I sive y, et utcumque mutato angulo T P S, numerus revolutionum spiralis inter circulos P D Z P, et I V N I centro S et radiis datis S P, S V vel S I descriptos est ut tangens S T anguli T P S, quem spiralis cum radio continet. Sit enim c circumferentia circuli P D Z P, et n numerus integer vel fractus revolutionum spiralis a puncto P ad punctum V inter circulos P D Z P, et I V N I, erit (153) $n\,c = x = b\,L.\frac{a}{y}$; et hinc $n = \frac{b}{c} \times L.\frac{a}{y}$. Quarè ob datas c, a et y, (per Hyp.) erit n ut b, id est numerus revolutionum inter circulos datos ut subtangens spiralis S T, seu ut tangens anguli T P S, quem spiralis cum radio continet.

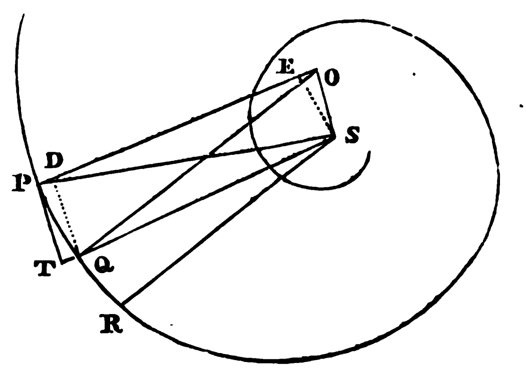



156. Spiralis post infinitos sibi super-impositos gyros comprehendit cum radio P S spatium duplum trianguli P S T. Iisdem enim positis quæ num. 153. cum sit (fig. pag. præced.) P S (a) : S T (b) = X K (— d y) : V K = — $\frac{b\,d\,y}{a}$, erit sector S V K seu S V X = $-\frac{y\,b\,d\,y}{2\,a}$, et sumptis fluentibus, sector S P V = Q — $\frac{b\,y^2}{4\,a}$; quia verò evanescente sectore S P V, fit

## LEMMA III.

*Sit* P Q R *spiralis quæ secet radios omnes* S P, S Q, S R, &c. *in æqualibus angulis. Agatur recta* P T *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *secetque radium* S Q *in* T; *et ad spiralem erectis perpendiculis* P O, Q O *concurrentibus in* O, *jungatur* S O. *Dico quod si puncta* P *et* Q *accedant ad invicem et coëant, angulus* P S O *evadet rectus, et ultima ratio rectanguli* T Q × 2 P S *ad* P Q *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis O P Q, O Q R subducantur anguli æquales S P Q, S Q R, et manebunt anguli æquales O P S, O Q S. Ergo circulus qui transit per puncta O, S, P (y) transibit etiam per punctum Q. Coëant puncta P et Q, et hic circulus in loco coitûs P Q tanget spiralem, (z) ideóque perpendiculariter secabit rectam O P. Fiet igitur O P diameter circuli hujus, et angulus O S P in semicirculo rectus. Q. e. d.




Ad O P demittantur perpendicula Q D, S E, (a) et linearum rationes ultimæ erunt hujusmodi: T Q ad P D ut T S vel P S ad P E, seu 2 P O ad 2 P S; item P D ad P Q ut P Q ad 2 P O; et ex æquo perturbatè T Q ad P Q ut P Q ad 2 P S. Unde fit P Q q æquale T Q × 2 P S. Q. e. d.

y = a, erit $Q = \frac{b\,a^2}{4\,a}$, et hinc $S\,P\,V = \frac{b\,a\,a - b\,y\,y}{4\,a}$. Quarè ubi radius y = o, fiet area $S\,P\,V = \frac{b\,a}{4} = \frac{P\,S \times S\,T}{4} = \frac{1}{2}$ triang. P S T.

(y) * *Transibit etiam per punctum Q.* (Per Prop. XXI. Lib. III. Elem.)

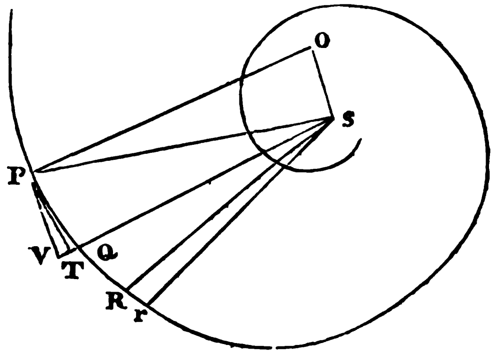
(z) *Ideóque perpendiculariter secabit rectam O P*, quæ (per Hyp.) perpendicularis est ad arcum Q P, fiet igitur O P diameter circuli hujus (per Prop. XIX. Lib. III. Elem.) et angulus O S P in semi-circulo rectus (per Prop. XXXI. Lib. III. Elem.).

(a) * *Et linearum rationes ultimæ.* Quoniam lineæ P T, D Q, E S ad P O normales, sunt parallelæ, erit (per Prop. X. Lib. VI. Elem.) T Q : P D = T S vel P S : P E, et ob similitudinem triangulorum P S O, P E S, P S : P E = P O : P S, seu 2 P O : 2 P S, ideóque T Q : P D = 2 P O : 2 P S. Quia verò radii O P, O Q sunt ad arcum evanescentem P Q perpendiculares, punctum O est centrum, P O radius et 2 P O diameter circuli spiralem osculantis in P (121. Lib. I.) et (per Lem. VII. Lib. I.) P Q hujus circuli arcus vel chordæ; atque adeò (ex naturâ circuli) abscissa P D est ad chordam P Q ut P Q ad diametrum 2 P O. Quare *ex æquo perturbatè*, &c.

## PROPOSITIO XV. THEOREMA XII.

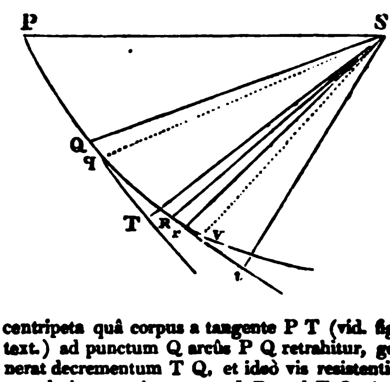
*Si medii densitas in locis singulis sit reciprocè ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta in duplicatâ ratione densitatis; dico quod corpus gyrari potest in spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.*

Ponantur quæ in superiore Lemmate, et producatur S Q ad V, ut sit S V æqualis S P. Tempore quovis, in medio resistente, describat corpus arcum quàm minimum PQ, et tempore duplo arcum quàm minimum P R; et decrementa horum arcuum ex resistentiâ oriunda, sive defectus ab arcubus, qui in medio non resistente iisdem temporibus describerentur, (b) erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: Est itaque decrementum arcûs P Q pars quarta decrementi arcûs P R. (c) Unde etiam, si areæ P S Q æqualis capiatur area Q S r, erit decrementum arcûs P Q æquale



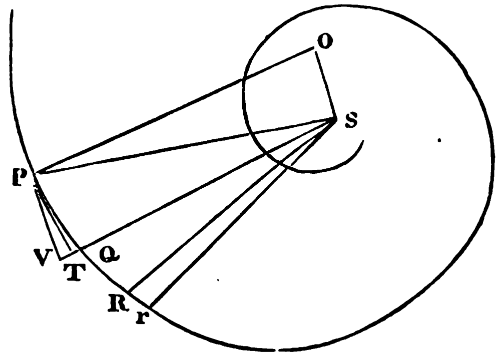

(b) * *Erunt ad invicem.* Cùm enim resistentia per arcum P R considerari possit tanquam vis retardatrix (4), decrementa arcuum minimorum P Q, P R ex resistentiâ oriunda sunt ut spatia quæ urgente vi acceleratrice resistentiæ æquali corpus describeret iisdem temporibus quibus describit arcus illos P Q, P R; quarè decrementa illa sunt ut quadrata temporum quibus generantur (per Lem. X. Lib. I.).

(c) * *Undè etiam si areæ.* Corpus eâ velocitate quam habet in loco P, temporibus æqualibus describet arcus quàm minimos P q, q v, in medio non resistente, et arcus P Q, Q R in medio resistente, et erit (ex dem.) 4 Q q = R v, sunt autem areæ P S q et q S v æquales (per Prop. I. Lib. I.) ideóque ob areas P S Q, et Q S r, etiam æquales (per Hyp.) erit P S q — P S Q seu area Q S q æqualis q S v — Q S r, seu r S v — Q S q, et hinc area r S v æqualis est 2 Q S q; sed demissis ex centro S ad tangentes Q T et r t per puncta Q et r ductas perpendiculis S T et S t, area evanescens Q S q est $\frac{1}{2}$ S T × Q q, et area r S v, est $\frac{1}{2}$ S t × r v. Quarè S T × Q q æquatur $\frac{1}{2}$ S t × r v, et coëuntibus punctis P et v, fit S t = S T atquè adeò Q q = $\frac{1}{2}$ r v, et 2 Q q = r v. Cùm igitur suprà invenerimus 4 Q q = R v, erit 4 Q q — 2 Q q, seu 2 Q q = R v — r v = R r, et ideò Q q = $\frac{1}{2}$ R r. Itaque eodem tempore quo resistentia generat decrementum Q q, seu $\frac{1}{2}$ R r, vis




centripeta quâ corpus a tangente P T (vid. fig. text.) ad punctum Q arcûs P Q retrahitur, generat decrementum T Q, et ideò vis resistentiæ est ad vim centripetam ut $\frac{1}{2}$ R r ad T Q, (per Cor. 4. Lem. X.) atque hæc omnia generaliter obtinent, quæcumque fuerit tum curva P Q R, cujus proprietates nondum adhibuimus, tum vis centripeta, tum resistentia, tum velocitas corporis.

dimidio lineolæ R r; ideóque vis resistentiæ et vis centripeta sunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2}$ R r et T Q quas simul generant. Quoniam vis centripeta, quâ corpus urgetur in P, ([d]) est reciprocè ut S P q, et ([e]) (per Lem. X. Lib. I.) lineola T Q, quæ vi illâ generatur, est in ratione compositâ ex ratione hujus vis et ratione duplicatâ temporis quo arcus P Q describitur (nam resistentiam in hoc casu, ut infinitè minorem quàm vis centripeta, negligo) erit T Q × S P q, id est (per Lemma novissimum) $\frac{1}{2}$ P Q q × S P, in ratione duplicatâ temporis, ([g]) ideóque tempus est ut P Q × $\surd$ S P; ([h]) et corporis velocitas, quâ arcus P Q illo tempore describitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \surd SP}$ seu $\frac{1}{\surd SP}$, hoc est, in subduplicatâ ratione ipsius S P reciprocè. Et simili argumento, velocitas quâ arcus Q R describitur, est in subduplicatâ ratione ipsius SQ reciprocè. Sunt autem arcus illi PQ et QR ([i]) ut velocitates descriptrices ad invicem, id est, in subduplicatâ ratione SQ ad S P, sive ut S Q ad $\surd \overline{SP \times SQ}$; ([k]) et ob æquales angulos S P Q, S Q r et æquales areas P S Q, Q S r, est arcus P Q ad arcum Q r ut S Q ad S P. ([l]) Sumantur proportionalium consequentium differentiæ, et fiet arcus P Q




([d]) * *Est reciprocè ut S P q* (per Hyp.).

([e]) * *Per Lem. X.* (Cor. 3.)

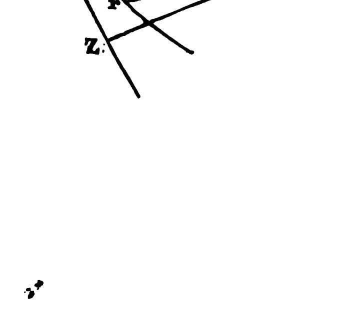
([g]) * *Ideóque tempus.* (Neglectâ fractione datâ $\frac{1}{2}$ *est ut,* &c.

([h]) * *Et corporis velocitas.* (14).

([i]) * *Ut velocitates descriptrices ad invicem* (11), quia arcus illi P Q, et Q R, æqualibus temporibus describuntur (per Hyp.).

([k]) * *Et ob æquales angulos.* Ex centro S ad tangentes P X, Q Z demissa sint perpendicula S X, S Z, et areæ æquales P S Q et Q S r, erunt $\frac{1}{2}$ S X × P Q, et $\frac{1}{2}$ S Z × Q r, ideóque S X ad S Z ut Q r ad P Q; sed ob angulos rectos ad X et Z, et angulos æquales X P S et Z Q S (per Lem. III.) similia sunt triangula S X P et S Z Q, et ideò S X : S Z = S P : S Q, quare fit Q r : P Q = S P : S Q.

([l]) * *Sumantur proportionalium,* &c. Cùm enim sit (per dem.) P Q : S Q = Q R :



ad arcum R r ut S Q ad $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, seu $\frac{1}{2}$ V Q. Nam punctis P et Q coëuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, ad $\frac{1}{2}$ V Q (m) est æqualitatis. Quoniam decrementum arcûs P Q, ex resistentiâ oriundum, sive hujus duplum R r, (n) est ut resistentia et quadratum temporis conjunctim; (o) erit resistentia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem P Q ad R r, ut S Q ad $\frac{1}{2}$ V Q, et inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2} VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ sive ut $\frac{\frac{1}{2} OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis P et Q coëuntibus, S P et S Q coincidunt, et angulus P V Q fit rectus; (p) et ob similia triangula P V Q, P S O, fit P Q ad $\frac{1}{2}$ V Q ut O P ad $\frac{1}{2}$ O S. Est igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut resistentia, (q) id est, in ratione densitatis medii in P et ratione duplicatâ velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, et manebit medii densitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur spiralis, (r) et ob datam rationem O S ad O P, densitas medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In medio igitur cujus densitas est reciprocè ut distantia a centro S P, corpus gyrari potest in hâc spirali. Q. e. d.

*Corol.* 1. (s) Velocitas in loco quovis P ea semper est, quâcum corpus in medio non resistente eâdem vi centripetâ gyrari potest in circulo, ad eandem a centro distantiam S P.

*Corol.* 2. Medii densitas, si datur distantia S P, est ut $\frac{OS}{OP}$, sin distan-

$\sqrt{SP \times SQ}$, et P Q : S Q = Q r : S P, erit etiam Q r : S P = Q R : $\sqrt{SP \times SQ}$, unde erit P Q : S Q = Q r — Q R seu R r : $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, et hinc P Q : R r = S Q : $SP - \sqrt{SP \times SQ}$.

(m) * *Est æqualitatis.* Est enim S Q = S P — V Q, et proindè $SP \times SQ = SP^2 - SP \times VQ$, ideóque extrahendo radicem quadratam (per formulam Lib. I. 551.) fit $\sqrt{SP \times SQ} = SP - \frac{1}{2} VQ - \frac{VQ^2}{8\,SP}$ —, &c., in infinitum; cæteri verò termini post secundum negligi possunt, quia coëuntibus P et Q, evanescunt respectu V Q, et ideò erit $\sqrt{SP \times SQ} = SP - \frac{1}{2} VQ$, ac proindè $\frac{1}{2} VQ = SP - \sqrt{SP \times SQ}$.

(n) * *Est ut resistentia et quadratum temporis conjunctim.* (Per Cor. 3. Lem X Lib. I.)

(o) *Erit resistentia,* &c. Nam tempus est ut $PQ \times \sqrt{SP}$ (ex dem.).

(p) * *Et ob similia triangula P V Q, P S O,* angulus P S O (per Lemma novissimum) rectus est et ideò æqualis angulo etiam recto P V Q, et præterea si ex angulis rectis Q P O et V P S subducatur communis angulus Q P S, remanent æquales V P Q et S P O; quarè triangula P V Q et P S O sunt similia.

(q) * *Id est in ratione,* &c. (per Hyp.)

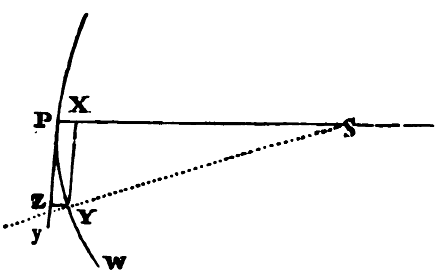
(r) * *Ob datam rationem O S ad O P.* Datâ spirali datur angulus Q P S et hinc in triangulo S P O datur angulus S P O cum isto Q P S rectum faciens, datur etiam rectus P S O (per Lem. III.) atquè ideò trianguli P O S anguli omnes dantur, et proindè datur ratio O S ad O P.

(s) * *Velocitas in loco quovis P,* &c. * Gyretur corpus in medio non resistente in circulo

tia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. ([t]) Et inde spiralis ad quamlibet medii densitatem aptari potest.

*Corol.* 3. Vis resistentiæ in loco quovis P, est ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}$ O S ad O P. Nam vires illæ sunt ad invicem ut $\frac{1}{2}$ R r et T Q ([u]) sive ut $\frac{\frac{1}{4} VQ \times PQ}{SQ}$ et $\frac{\frac{1}{2} PQq}{SP}$ hoc est, ut $\frac{1}{2}$ V Q et P Q, ([x]) seu $\frac{1}{2}$ O S et O P. ([y]) Datâ igitur spirali datur proportio resistentiæ

P W radio P S descripto, in eoque retineatur vi centripetâ quæ sit eadem cum illâ qua corpus urgetur in puncto P spiralis (vide fig. textûs). Sumatur in radio P S particula P X æqualis T Q, sive spatio quod generatur per vim centripetam quâ corpus retinetur in spirali in P, ductâque tangente P Z, e puncto Y ducatur per centrum linea S Y y ad tangentem usque, Y y erit spatium quod generatur per vim centripetam quâ corpus in circulo retinetur, sed coëuntibus punctis P et Y, linea y Y fit ultimò parallela




lineæ P S, ideóque y Y fit æqualis particulæ P X, sive T Q. Cùm ergo eadem sit vis centripeta tam in circulo quàm in spirali, et spatia æqualia y Y et T Q ab illâ vi centripeta generentur, æquali tempore utrinque generabuntur, unde eodem tempore quo corpus in spirali in Q pervenerit, eo ipso tempore perveniet in Y in circulo, velocitas ergo in spirali erit ad velocitatem in hoc circulo ut est arcus P Q ad arcum P Y, sed ex naturâ spiralis per Lemma III. est $PQ = \sqrt{TQ \times 2PS}$, et ex naturâ circuli est $PY = \sqrt{PX \times 2PS}$ et ex constructione cùm sit $PX = TQ$ erit $PY = \sqrt{TQ \times 2PS}$ ergo $PQ = PY$, ergo velocitas in loco quovis spiralis ea est quâcum corpus eâdem vi centripetâ in medio non resistente ad eandem a centro distantiam gyrari potest.

([t]) * *Et inde spiralis*, &c. * Fingantur duo media diversæ densitatis, talia tamen ut in singulo medio densitas in locis diversis sit reciprocè ut distantia locorum a centro. Sumptâ verò in utroque æquali a centro distantiâ S P, sit ratio densitatis prioris medii ad densitatem posterioris in eo loco ut a ad b, ea ratio eadem erit in aliâ quâcumque distantiâ a centro, putâ in distantiâ S X. Nam in utroque medio densitas in P erit ad densitatem in X ut $\frac{1}{SP}$ ad $\frac{1}{SX}$; itaque si in priore medio densitas in P fuerit ut a, densitas in X erit ut $\frac{a \times SP}{SX}$, et si in secundo medio densitas in P fuerit ut b densitas in X erit ut $\frac{b \times SP}{SX}$, est verò $\frac{aSP}{SX}$ ad $\frac{b \times SP}{SX}$ ut a ad b, ergo in his duobus mediis densitates erunt ubique in datâ ratione a ad b, in æqualibus a centro distantiis.

Si itaque data sit spiralis quæ in medio priore describitur, inveniri poterit illa quæ in posteriore medio describi posset; nam sumpta distantia quâvis S P, fiat a ad b ut $\frac{OS}{OP}$ ad $\frac{b \times OS}{a \times OP}$ hæc erit ratio quæ in hâc novâ spirali intercedet inter lineas, lineis O S et O P correspondentes, sive quia angulus S in triangulo O S P est rectus, hæc erit ratio inter sinum anguli quem facit linea P S cum perpendiculari ad curvam, et radium; quo sinu dato ejusque angulo, spiralis obtinetur ad hanc medii densitatem aptata.

Ex quibus illustratur quod præcedit in hoc ipso Corollario, si duæ spirales in diversis mediis describantur, mediorum densitates in eadem distantia erunt ut $\frac{OS}{OP}$, sed si distantiæ a centro diversæ sumantur, ratio inversa distantiarum est huic conjungenda, eruntque ideò mediorum densitates ut $\frac{OS}{OP \times SP}$.

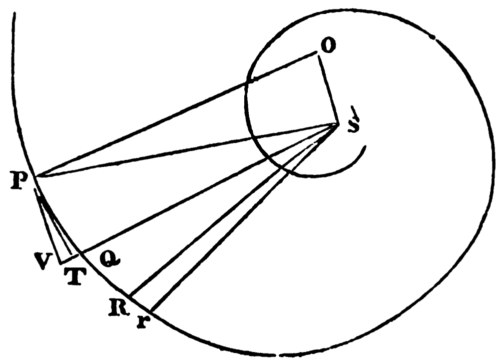
([u]) * *Sive ut*, &c. Nam (per dem.) $PQ : Rr = SQ : \frac{1}{2} VQ$, et (per Lem. III.) $TQ = \frac{PQ^2}{2PS}$, et punctis Q et P coëuntibus, est $SQ = SP$.

([x]) * *Seu* $\frac{1}{2}$ *O S et O P.* Quia triangula P V Q, P S O similia sunt (ex dem.) est $\frac{1}{2} VQ : PQ = \frac{1}{2} OS : OP$.

([y]) * *Datâ igitur spirali.* Nam datâ spirali

ad vim centripetam, et vice versâ ex datâ illâ proportione datur spiralis.

*Corol.* 4. Corpus itaque gyrari nequit in hâc spirali, (z) nisi ubi vis resistentiæ minor est quàm dimidium vis centripetæ. (a) Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ, et spiralis conveniet cum lineâ rectâ P S, inque hac rectâ corpus descendet ad centrum eâ cum velocitate, quæ sit ad velocitatem, quâ probavimus in superioribus in casu parabolæ (Theor. X. Lib. I.) descensum in medio non resistente fieri, (b) in subduplicatâ ratione unitatis ad numerum binarium. (c) Et tempora descensûs hic erunt reciprocè ut velocitates, atque ideò dantur.




datur specie triangulum P S O (ex dem.) et indè datur ratio O S ad O P, et vice versâ datâ hâc ratione, datur specie triangulum rectangulum P S O, et hinc datur angulus P O S æqualis angulo Q P S quem spiralis cum radio continet, ideóque datur spiralis. Iis enim datis et assumpto ut libet radio S P, dabitur subtangens spiralis logarithmicæ, seu tangens anguli Q P S, et hinc dato angulo quovis P S R, dabitur radius S R cum puncto R in spirali (153).

(z) * *Nisi ubi vis resistentiæ minor est*, &c. Cùm enim vis resistentiæ sit ad vim centripetam ut ½ O S ad O P, et ad dimidium vis centripetæ ut ½ O S ad ½ O P, seu ut O S ad O P, sitque trianguli rectanguli P S O (Lem. III.) crus O S minus hypothenusâ O P, manifestum est vim resistentiæ minorem esse dimidiâ vi centripetâ.

(a) * *Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ*, &c. Ideóque O S æqualis O P, et puncto O in infinitum abeunte, fiet O P perpendicularis ad S P, et angulus P O S ipsique æqualis angulus Q P S quem spiralis continet, cum radio P S evanescet, convenietque proindè spiralis cum lineâ rectâ P S.

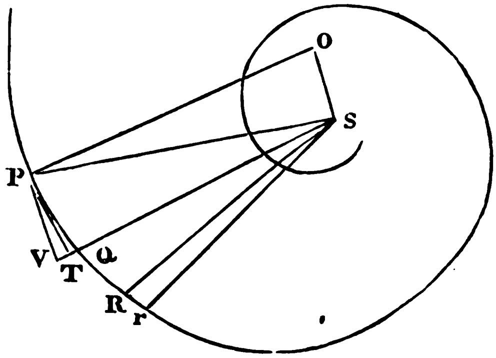
(b) * *In subduplicatâ ratione unitatis.* Nam (in Theor. X. Lib. I.) corporis in medio non resistente rectâ cadentis velocitas in loco quovis P æqualis est velocitati quâ corpus ad distantiam dimidiam a centro, seu ad distantiam ½ S P circulum describere potest, et (per Cor. 1. hujus) corporis in medio resistente spiralem seu rectam P S cum quâ spiralis convenire supponitur describentis velocitas in eodem loco P æqualis est velocitati quâcum corpus in medio non resistente gyrari potest in circulo ad integram distantiam S P. Sed velocitates corporum diversos circulos describentium (in hypothesi quòd vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata radiorum) sunt inter se reciprocè in radiorum ratione subduplicatâ (pro convers. Cor. 6. Prop. IV. Lib. I.) adeóque velocitas in circulo cujus radius S P est ad velocitatem in circulo cujus radius ½ S P, ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ad $\sqrt{1}$, sive ut 1 ad $\sqrt{2}$, erit ergo velocitas corporis in medio resistente per rectam P S descendentis ad velocitatem descendentis in medio non resistente per rectam eandem et in eodem loco P existentis, ut 1 ad $\sqrt{2}$. Q. e. d.

* Observandum verò quòd velocitates initiales utrinque debent esse secundùm legem quæ in reliquo motu obtinet, hoc est velocitas initialis in medio resistente esse debet æqualis celeritati quâ corpus ad eamdem a centro distantiam in medio non resistente circulum describeret, et velocitas initialis in medio non resistente æqualis esse debet velocitati quâ corpus ad dimidiam a centro distantiam in medio non resistente in circulo revolveretur.

Quoniam itaque velocitas corporis in medio non resistente descendentis datur (per Theor. X. Lib. I.) dabitur etiam velocitas in medio resistente descendentis.

(c) * *Et tempora descensûs, hic erunt reciprocè ut velocitates, atquè ideò dantur.* Nam momenta

*Corol.* 5. Et quoniam in æqualibus a centro distantiis velocitas (d) eadem est in spirali P Q R atque in rectâ S P, et longitudo spiralis ad longitudinem rectæ P S est in datâ ratione, (e) nempe in ratione O P ad O S; tempus descensûs in spirali erit ad tempus descensûs in rectâ S P (f) in eâdem illâ datâ ratione, proindeque datur.




*Corol.* 6. Si centro S intervallis duobus quibuscunque datis describantur duo circuli; et manentibus hisce circulis, mutetur utcunque angulus quem spiralis continet cum radio P S: numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias, pergendo in spirali a circumferentiâ ad circumferentiam, complere potest, (g) est ut $\frac{P\,S}{O\,S}$, sive ut tangens anguli illius quem spiralis continet cum radio P S; (h) tempus verò revolutionum earundem ut $\frac{O\,P}{O\,S}$, id est, ut secans anguli ejusdem, vel etiam reciprocè ut medii densitas.

temporis quibus corpora duo in medio resistente et in eodem non resistente describunt spatium idem quam minimum R v, sunt ut corporum velocitates reciprocè (12) id est ut $\sqrt{2}$ et 1 directè (per modò demonstrata) adeóque in datâ ratione. Quarè (per Cor. Lem. IV. Lib. I.) tempora tota quibus corpora illa idem spatium quodvis P R describunt, sunt etiam in eâdem datâ ratione $\sqrt{2}$ ad 1, seu ut velocitates reciprocè. Cùm igitur (per Prop. XXXVI. et XXXVII. Lib. I.) detur tempus quo corpus in medio non resistente cadendo spatium quodlibet describit, dabitur quoque tempus quo corpus in medio resistente spatium quodvis datum cadendo percurrit.



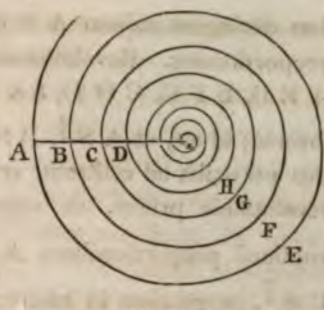

(d) *Eadem est in spirali.* (Per Cor. 1. hujus.)

(e) * *Nempè in ratione O P ad O S* (151).

(f) * 157. *In eâdem illâ ratione.* Spatia enim velocitatibus æqualibus et uniformibus descripta sunt ut tempora quibus describuntur; undè si spiralis P Q R et recta P S, divisæ intelligantur in partes quam minimas totis proportionales, quod fit dum puncta divisionum in spirali et in radio P S a centro S æquidistant (152) tempora quibus partes illæ quam minimæ in spirali et in rectâ P S homologæ describuntur, erunt ut eædem partes, seu in datâ ratione, siquidem velocitas in spirali et in recta P S in iis punctis a centro æquidistantibus sunt æquales eidem, nempe celeritati corporis circa idem centrum ad eandem distantiam in circulo revolventis; ideóque (per Cor. Lem. IV. Lib. I.) totum tempus descensûs in spirali erit ad totum tempus descensûs in rectâ P S per spatia homologa in datâ illâ ratione longitudinis nempe spiralis ad longitudinem P S, seu in ratione O P ad O S.

(g) * *Est ut* $\frac{P\,S}{O\,S}$ *sivè ut tangens anguli,* &c. (155). Si autem sinus totus sit 1, cum sit O S, ad P S, ut sinus totus ad tangentem anguli P O S, seu anguli æqualis Q P S, erit tangens illa $\frac{P\,S}{O\,S}$.

(h) * *Tempus verò revolutionum earundem ut* $\frac{O\,P}{O\,S}$, *id est, ut secans,* &c. Est enim tempus illud revolutionum inter circulos duos datos, ad tempus descensûs per partem datam rectæ P S inter circulos contentam ut longitudo revolu-

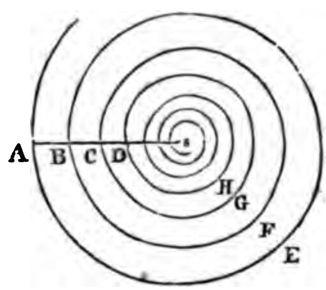



*Corol.* 7. Si corpus in medio, cujus densitas est reciprocè ut distantia locorum a centro, revolutionem in curvâ quâcunque A E B circa centrum illud fecerit, et radium primum A S in eodem angulo secuerit in B quo prius in A, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem suam primam in A reciprocè in subduplicatâ ratione distantiarum a centro (id est, ut A S ad mediam proportionalem inter A S et B S) (¹) corpus illud perget innumeras consimiles revolutiones B F C, C G D, &c. facere, et intersectioni-

tionum illarum ad partem hanc rectæ P S, circulis duobus interceptam (157); sed mutato utcumque angulo quem spiralis continet cum radio P S longitudo revolutionum inter duos circulos datos comprehensa est ut secans anguli illius (152). Quarè cùm datum sit tempus descensûs per partem datam rectæ P S inter circulos datos contentam, erit tempus revolutionum inter circulos ut secans anguli quem spiralis continet cum radio P S seu ut $\frac{O P}{O S}$; si enim sinus totus sit 1, erit O S ad O P ut 1 ad secantem anguli P O S seu Q P S, et ideò secans est $\frac{O P}{O S}$. Porrò datâ rectâ P S, densitas est ut $\frac{O P}{O S}$ reciprocè (per Cor. 2. hujus). Ergò, &c.

(¹) * *Corpus illud perget*, &c. Centro S et radio dato S A descripta intelligatur spiralis logarithmica quæ primâ revolutione absolutâ, transeat per punctum B datum in radio S A (153.) et spiralis illa suis semper similibus revolutionibus distinguet radium A S in partes A S, B S, C S, D S, &c. continuè proportionales (150). Fingamus etiam quòd iisdem positis quæ (in Prop. XV.) corpus aliquod P in medio justæ densitatis spiralem illam logarithmicam describat, dum corpus aliud Q in alio medio describit curvam A E B F C S et in iisdem a centro S distantiis densitates duorum mediorum erunt in datâ ratione, cum in utroque medio sit (per Hyp. Cor. hujus et per Prop. XV.) densitas in loco A ad densitatem in loco B, ut S B ad S A. Simili modo velocitates corporum P et Q in loco B, erunt in eorumdem velocitates in loco A, (per Prop. XV. et Hyp. Corol, hujus) ideóque in datâ ratione; vires autem centripetæ quibus corpora P et Q urgentur, sunt in utroque medio iisdem in locis eædem (per Hyp.), et tandem ob angulos datos quos tam spiralis logarithmica, quàm curva A E B continet cum radio A S, directiones motuum in utrâque curvâ pares sunt in locis A et B; quarè postquam corpus Q primâ revolutione A E B absolutâ, pervenit in B, per quod punctum transit etiam spiralis logarithmica, eodem modo determinatur ad æmulandum motum corporis P secundam suam revolutionem absolventis, quo determinatum fuerat in loco A ut æmularetur motum corporis ejusdem P primam suam revolutionem perficientis; cùm (per dem.) omnia paria sint in locis B et A videlicet mediorum densitates, corporum velocitates, directiones, viresque centripetæ. Quoniam igitur secunda spiralis logarithmicæ revolutio a puncto B ad punctum C priori a puncto A ad punctum B absolutæ similis est (150), necessum est ut secunda quoque curvæ revolutio B F C priori A E B sit similis; et simili modo ostendetur revolutiones omnes B F C, C G D, &c. et motus corporis Q eas absolventis esse inter se similes. Erunt igitur revolutiones A E B, B F C, C G D, &c. ut radii A S, B S, C S, &c. id est, continuè proportionales, et ob similitudinem motuum in similibus revolutionibus A E B, B F C, &c. si ex centro S ductus intelligatur radius revolutiones illas secans in E, F, G, &c. quæ erunt in revolutionibus A E B, B F C, &c. loca homologa, erit velocitas corporis Q in loco E ad velocitatem ejus in loco A ut velocitas in F ad velocitatem in B, et proinde velocitas in E ad velocitatem in B, ut velocitas in A ad velocitatem in B, id est, (per Hyp. Cor. hujus) ut $B S^{\frac{1}{2}}$ ad $A S^{\frac{1}{2}}$; sed tempora quibus spatia homologa quam minima in locis E et F describuntur sunt ut spatia illa directè et velocitates inversè (12); quare cum spatia homologa in locis E et F sint ut radii A S et B S, et velocitates ibidem ut $A S^{\frac{1}{2}}$ et $B S^{\frac{1}{2}}$ inversè (ex dem.) tempus quo spatium minimum revolutionis A E B describitur est ad tempus quo describitur spatium homologum revolutionis similis B F C ut $A S \times A S^{\frac{1}{2}}$ ad $B S \times B S^{\frac{1}{2}}$, id est, ut $A S^{\frac{3}{2}}$ ad $B S^{\frac{3}{2}}$, ideóque in datâ ratione. Undè (per Cor. Lem. IV. Lib. I.) tempus totum quo corpus Q primam suam revolutionem A E B absolvit est ad tempus quo secundam revolutionem B F C, perficit in eâdem ratione

bus distinguet radium A S in partes A S, B S, C S, D S, &c. continuè proportionales. Revolutionum verò tempora erunt ut perimetri orbitarum A E B, B F C, C G D, &c. directè, et velocitates in principiis A, B, C, inversè; id est, ut A S $^{\frac{3}{2}}$, B S $^{\frac{3}{2}}$, C S $^{\frac{3}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continuè proportionalium A S $^{\frac{3}{2}}$, B S $^{\frac{3}{2}}$, C S $^{\frac{3}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum A S $^{\frac{3}{2}}$; id est, ut terminus ille primus A S $^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum A S $^{\frac{3}{2}}$ — B S $^{\frac{3}{2}}$, sive ut $\frac{2}{3}$ A S ad A B quam proximè. Unde tempus illud totum expeditè invenitur.




*Corol.* 8. Ex his etiam præter propositum colligere licet motus corporum in mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro S, intervallis continuè proportionalibus S A, S B, S C, &c. describe circulos quotcunque, et statue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, (k) in medio de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in medio pro-

A S $^{\frac{3}{2}}$ ad B S $^{\frac{3}{2}}$. Et simili argumento liquet tempora revolutionum B F C, C G D, &c. esse inter se ut sunt B S $^{\frac{3}{2}}$, C S $^{\frac{3}{2}}$, &c. Cùm igitur revolutionum tempora sicut quantitates A S $^{\frac{3}{2}}$, B S $^{\frac{3}{2}}$, C S $^{\frac{3}{2}}$ D S $^{\frac{3}{2}}$, &c. progressionem geometricam in infinitum decrescentem constituant, tempus totum quo corpus Q, perveniet ad centrum S erit ad tempus revolutionis primæ A E B ut summa omnium continuè proportionalium A S $^{\frac{3}{2}}$, B S $^{\frac{3}{2}}$, D S $^{\frac{3}{2}}$, &c. pergentium, in infinitum, ad terminum primum A S $^{\frac{3}{2}}$; porrò summa illa est ad terminum primum A S $^{\frac{3}{2}}$ ut hic terminus primus ad differentiam duorum priorum, nempè A S $^{\frac{3}{2}}$ — B S $^{\frac{3}{2}}$. Nam scribatur sic terminorum series, A S $^{\frac{3}{2}}$ : B S $^{\frac{3}{2}}$ = B S $^{\frac{3}{2}}$ : C S $^{\frac{3}{2}}$ = C S $^{\frac{3}{2}}$ : D S $^{\frac{3}{2}}$, &c. in infinitum, et ultimo progressionis termino evanescente, erit summa antecedentium, id est, summa omnium terminorum quæ dicatur S ad summam consequentium, seu summam omnium terminorum dempto primo, ut primus ad secundum, hoc est S : S — A S $^{\frac{3}{2}}$ = A S $^{\frac{3}{2}}$ : B S $^{\frac{3}{2}}$; undè habetur dividendo S : A S $^{\frac{3}{2}}$ = A S $^{\frac{3}{2}}$ : A S $^{\frac{3}{2}}$ — B S $^{\frac{3}{2}}$; est autem B S = A S — A B, et ideò B S $^{\frac{3}{2}}$ = (A S — A B) $^{\frac{3}{2}}$ = A S $^{\frac{3}{2}}$ — $\frac{3}{2}$ A S $^{\frac{1}{2}}$ × A B + $\frac{3}{8}$ × $\frac{A\,B^2}{A\,S^{\frac{1}{2}}}$ —, &c. in infinitum (551. Lib. I.). Quapropter si distantia A B minima fuerit, respectu radii A S, fiet B S $^{\frac{3}{2}}$ = A S $^{\frac{3}{2}}$ — $\frac{3}{2}$ A S $^{\frac{1}{2}}$ × A B, quàm proximè, neglectis nimirum cæteris terminis ferè evanescentibus; erit igitur S : A S $^{\frac{3}{2}}$ = A S $^{\frac{3}{2}}$ : $\frac{3}{2}$ A S $^{\frac{1}{2}}$ × A B = $\frac{2}{3}$ A S : A B quam proximè; et hinc dato tempore revolutionis primæ A E B, tempus totum quo corpus pervenit ad centrum expeditè invenitur. Sit, exempli causâ, A S ad A B ut 300000 ad 1, et tempus primæ revolutionis = 1, erit tempus totum = 200000, quàm proximè.

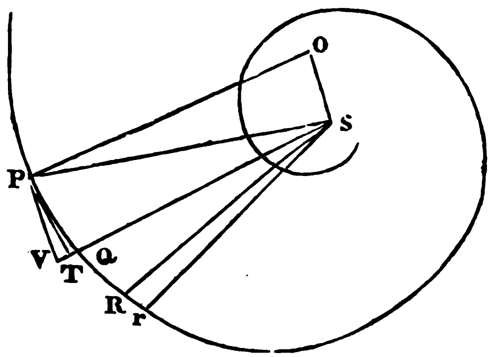
(k) * *In medio de quo egimus.* (In Prop. XV. et Cor. ejus), cujus nimirum densitas est reciprocè ut distantia locorum a centro.

posito, (l) ut medii propositi densitas mediocris inter hos circulos ad medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quàm proximè: sed et in eadem quoque ratione esse secantem anguli quo spiralis præfinita, in medio de quo egimus, secat radium A S, ad secantem anguli quo spiralis nova secat radium eundem in medio proposito: (m) atque etiam ut sunt eorumdem angulorum tangentes ita esse numeros revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proximè. (n) Si hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possumus quibus modis ac temporibus corpora in medio quocunque regulari gyrari debebunt.

*Corol.* 9. Et quamvis motus excentrici in spiralibus (o) ad formam ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo spiralium illarum singulas revolutiones iisdem ab invicem intervallis distare, iisdemque gradibus ad centrum accedere cum spirali superius descriptâ, (p) intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujusmodi spiralibus peragantur.

## PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

*Si medii densitas in locis singulis sit reciprocè ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta reciprocè ut dignitas quælibet ejusdem distantiæ: dico quod corpus gyrari potest in spirali quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.*




Demonstratur eâdem methodo cum Propositione superiore. Nam si vis centripeta in P sit reciprocè ut distantiæ S P, dignitas quælibet $SP^{n+1}$ cujus index est n + 1: (q) colligetur ut supra, quòd tempus, quo corpus describit arcum quemvis P Q; erit ut $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; et resis-

(l) * *Ut medii propositi densitas* (per Cor. 6. hujus) supponendo spirales logarithmicas, per puncta A, B, C, D, in utroque medio descriptas.

(m) * *Atquè etiam ut sunt*, &c. Per Cor. 6. hujus.

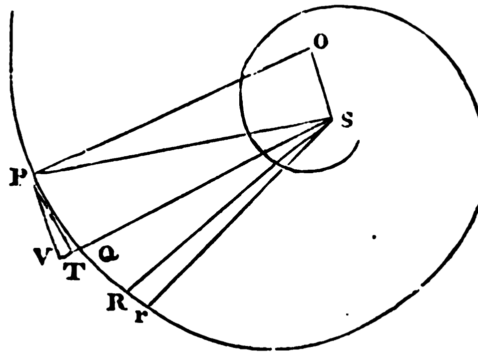
(n) * *Si hæc fiant passim inter circulos binos*, invenietur in medio regulari lex quâ motus continuabitur per circulos omnes, seu, inter circulos omnes, quemadmodum inventis prioribus seriei regularis terminis, cognoscitur lex quâ illa progreditur, *atquè hoc pacto*, &c.

(o) * *Ad formam ovalium accedentibus*, &c. Sunt enim spirales quarum revolutiones singulæ ferè concentricæ sunt et ad formam circulorum accedunt; aliarum revolutiones accedunt ad formam ovalium centro spiralis pro ellipseos vel ovalis foco accepto.

(p) * *Intelligemus etiam* (ut in Cor. 8.) *quomodò*, &c

(q) * *Colligetur ut suprà*, &c. Quæcumque enim sit vis centripeta, illa est ad vim resisten-

tentia in P ut $\frac{R\,r}{P\,Q\,q \times S\,P^{n}}$, sive ut $\frac{\overline{1 - \frac{1}{2}n} \times V\,Q}{P\,Q \times S\,P^{n} \times S\,Q}$, ideóque ut $\frac{\overline{1 - \frac{1}{2}n} \times O\,S}{O\,P \times S\,P^{n+1}}$, hoc est, ob datum $\frac{\overline{1 - \frac{1}{2}n} \times O\,S}{O\,P}$, reciprocè ut




$S\,P^{n+1}$. Et propterea, cùm velocitas sit reciprocè ut $S\,P^{\frac{1}{2}n}$, densitas in P erit reciprocè ut S P.

*Corol.* 1. (r) Resistentia est ad vim centripetam ut $\overline{1 - \frac{1}{2}n} \times O\,S$ ad O P.

tiæ ut T Q ad $\frac{1}{2}$ R r (per dem. Prop. XV.). Quoniam igitur vis centripeta quâ corpus urgetur in P, est reciprocè ut $S\,P^{n+1}$, et (per Cor. Lem. X. Lib. I.) lineola T Q quæ vi illâ generatur, est in ratione compositâ ex ratione hujus vis et ratione duplicatâ temporis quo arcus P Q describitur; erit $T\,Q \times S\,P^{n+1}$, id est, (per Lem. III.) $\frac{1}{2}\,P\,Q^{2} \times S\,P^{n}$, in ratione duplicatâ temporis, ideóque tempus est ut $P\,Q \times S\,P^{\frac{n}{2}}$, et corporis velocitas quâ arcus P Q illo tempore describitur ut $\frac{P\,Q}{P\,Q \times S\,P^{\frac{n}{2}}}$, seu $\frac{1}{S\,P^{\frac{n}{2}}}$; et simili argumento velocitas quâ arcus Q R describitur est ut $\frac{1}{S\,Q^{\frac{n}{2}}}$; sunt autem arcus illi P Q et Q R ut velocitates descriptrices ad invicem, id est, in ratione $S\,Q^{\frac{n}{2}}$ ad $S\,P^{\frac{n}{2}}$, et (per dem. Prop. XV.) arcus Q r, est ad arcum P Q ut S P ad S Q; quarè (per compositionem rationum et ex æquo) $Q\,r : Q\,R = S\,P \times S\,Q^{\frac{n}{2}} : S\,Q \times S\,P^{\frac{n}{2}} = S\,Q^{\frac{1}{2}n - 1} : S\,P^{\frac{1}{2}n - 1}$, et sumptis terminorum differentiis $Q\,r : R\,r = S\,Q^{\frac{1}{2}n - 1} : S\,Q^{\frac{1}{2}n - 1} - S\,P^{\frac{n}{2} - 1}$. Quia verò $S\,P = S\,Q + V\,Q$, ideóque (549. Lib. I.) $S\,P^{\frac{1}{2}n - 1} = S\,Q^{\frac{1}{2}n - 1} + \frac{1}{2}\overline{n - 1} \times V\,Q \times S\,Q^{\frac{1}{2}n - 2} +$, &c., neglectis reliquis terminis respectu priorum evanescentibus, erit $S\,Q^{\frac{1}{2}n - 1} - S\,P^{\frac{1}{2}n - 1} = (1 - \frac{1}{2}n) \times V\,Q \times S\,Q^{\frac{1}{2}n - 2}$, atque adeò $Q\,r : R\,r = S\,Q : (1 - \frac{1}{2}n)\,V\,Q$. Erat autem $P\,Q : Q\,r = S\,Q : S\,P$; undè (ex æquo) fit $P\,Q : R\,r = S\,Q^{2} : (1 - \frac{1}{2}n)\,V\,Q \times S\,P$, et hinc $R\,r = (1 - \frac{1}{2}n)\,\frac{V\,Q \times S\,P \times P\,Q}{S\,Q^{2}} = \frac{(1 - \frac{1}{2}n) \times V\,Q \times P\,Q}{S\,Q}$, ob $S\,P = S\,Q$, ubi puncta Q et P coëunt. Quoniam decrementum arcûs P Q ex resistentiâ oriundum, sivè hujus duplum R r, est ut resistentia et quadratum temporis conjunctim, erit resistentia ut $\frac{R\,r}{P\,Q^{2} \times S\,P^{n}}$, id est, ut $\frac{(1 - \frac{1}{2}n)\,V\,Q}{P\,Q \times S\,P^{n} \times S\,Q}$. Sivè ut $\frac{(1 - \frac{1}{2}n)\,O\,S}{O\,P \times S\,P^{n+1}}$ (quia $V\,Q : P\,Q = O\,S : O\,P$ ex dem. Prop. XV.) hoc est, ob datum $\frac{(1 - \frac{1}{2}n)\;O\,S}{O\,P}$ ut $\frac{1}{S\,P^{n+1}}$. Et propterea cùm velocitas (ex dem.) sit ut $\frac{1}{S\,P^{\frac{1}{2}n}}$, si ex resistentiâ auferatur duplicata velocitatis ratio $\frac{1}{S\,P^{n}}$, manebit medii densitas in P, ut $\frac{1}{S\,P}$, seu reciprocè ut S P,

(r) * *Resistentia est ad vim centripetam.* Nam

*Corol.* 2. Si vis centripeta sit reciprocè ut S P cub. (ˢ) erit $1 - \frac{1}{2} n = o$; ideóque resistentia et densitas medii nulla erit, ut in Propositione nonâ Libri primi.

*Corol.* 3. Si vis centripeta sit reciprocè ut dignitas aliqua radii S P cujus index est major numero 3, resistentia affirmativa (ᵗ) in negativam mutabitur.

## *Scholium.*

Cæterum hæc Propositio et superiores, quæ ad media inæqualiter densa spectant, intelligendæ sunt de motu corporum adeò parvorum, ut medii ex uno corporis latere major densitas quàm ex altero non consideranda veniat. Resistentiam quoque cæteris paribus densitati proportionalem esse suppono. Unde in mediis, quorum vis resistendi non est ut densitas, debet densitas eo usque augeri vel diminui, ut resistentiæ vel tollatur excessus vel defectus suppleatur.

vires illæ sunt ad invicem ut $\frac{1}{2}$ R r et T Q, sivè ut $\frac{(1 - \frac{1}{2} n) V Q \times P Q}{2 S Q}$ et $\frac{P Q^2}{2 S P}$, hoc est, ut $(1 - \frac{1}{2} n)$ V Q et P Q, seu $(1 - \frac{1}{2} n)$ O S et O P.

(ˢ) * *Erit* $1 - \frac{1}{2} n = o$. Cùm enim (per Hyp.) sit $n + 1 = 3$; erit $n = 2$, $\frac{1}{2} n = 1$ et $1 - \frac{1}{2} n = o$.

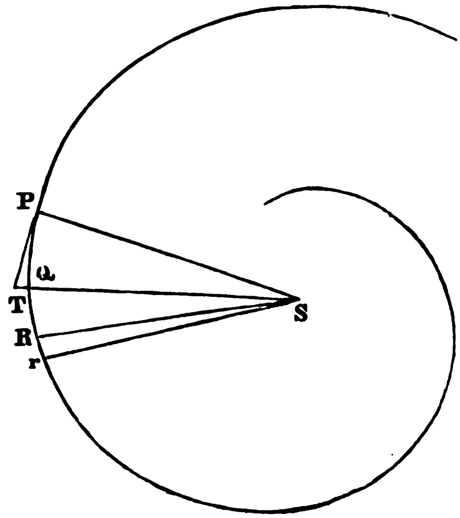
(ᵗ) * *In negativam mutabitur.* Tum enim $n + 1$, erit numerus ternario major, et ideò n binario major, et hinc $1 - \frac{1}{2} n$, numerus negativus.

*Corol.* 4. Medii densitas, si datur distantia S P, est ut $\frac{(1 - \frac{1}{2} n) O S}{O P}$; sin distantia illa non datur ut $\frac{(1 - \frac{1}{2} n) O S}{O P \times S P}$, seu ob datum numerum $1 - \frac{1}{2} n$, ut $\frac{O S}{O P}$, vel $\frac{O S}{O P \times S P}$.

*Corol.* 5. Quoniam (per Cor. 1. Prop. XV.) mutato utcumque spiralis angulo, itâ ut etiam evanescat, et spiralis cum radio conveniat, velocitas corporis in loco quovis P ea semper est quâcum corpus in medio non resistente eâdem vi centripetâ gyrari potest in circulo ad eandem a centro distantiam S P (per const. 1. Cor. 7. Prop. IV. Lib. I.) liquet (per Cor. 6. Prop. XV. et 152.) tempora descensûs a puncto dato P ad centrum usque S, fore etiam (in Hyp. Prop. XVI.) ut spiralium variarum longitudines; quod observavit Joannes Bernoullius in Actis Eruditorum Lips. an. 1713. ubi hanc materiam eleganter tractat.

## PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IV.

*Invenire et vim centripetam et medii resistentiam, quâ corpus in datâ spirali, datâ velocitatis lege, revolvi potest.*




Sit spiralis illa P Q R. Ex velocitate, quâ corpus percurrit arcum quàm minimum P Q, dabitur tempus, et ex altitudine T Q, quæ est ut vis centripeta et quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum P S Q et Q S R, differentia R S r, dabitur corporis retardatio, et ex retardatione invenietur resistentia (w) ac densitas medii.

## PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

*Datâ lege vis centripetæ, invenire medii densitatem in locis singulis, quâ corpus datam spiralem describet.*

Ex vi centripetâ invenienda est velocitas in locis singulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda medii densitas; (x) ut in Propositione superiore.

(w) * *Ac densitas medii.* Sit, exempli causâ, curva P Q R spiralis logarithmica et velocitas in loco quovis P ut $\frac{1}{SP^m}$, erit tempus quo describitur arcus P Q, ut $PQ \times SP^m$ (12); vis autem centripeta quæ (per Cor. 4. Lem. X. Lib. I.) est ut lineola T Q directè et quadratum temporis inversè erit ut $\frac{TQ}{QP^2 \times SP^{2m}}$, id est, (per Lem. III. hujus) ut $\frac{1}{SP^{2m+1}}$. Inventis tempore et velocitate, invenietur (ut in not. ad Prop. XVI.) resistentia ut $\frac{(1-m)\,VQ}{SQ \times PQ \times SP^{2m}}$, sive ut $\frac{(1-m)\,OS}{OP \times SP^{2m+1}}$, et auferendo duplicatam velocitatis rationem $\frac{1}{SP^{2m}}$ erit densitas ut $\frac{(1-m)\,OS}{OP \times SP}$, sive ut $\frac{1}{SP}$.

(x) * *Ut in Propositione superiore.* Sit vis centripeta in P ut $\frac{1}{SP^{n+1}}$ et quoniam T Q est ut vis centripeta et quadratum temporis quo describitur arcus P Q, erit $TQ \times SP^{n+1}$, id est, (per Lem. III.) $PQ^2 \times SP^n$ ut qua-

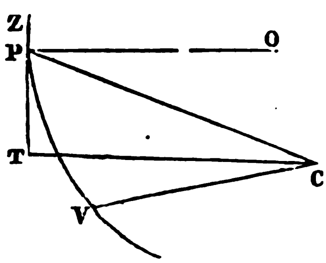
Methodum verò tractandi hæc Problemata aperui in hujus Propositione decimâ, et Lemmate secundo; et lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate et resistentiâ mediorum, in quibus motus hactenus expositi et his affines peraguntur.

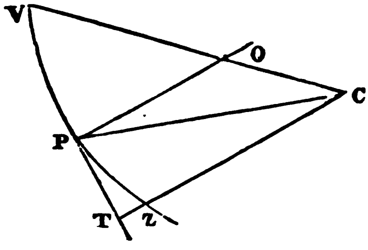
dratum temporis, ideóque tempus ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, et corporis velocitas quâ arcum PQ illo tempore describit ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}n}}$ (11); determinatis autem tempore et velocitate, invenietur resistentia et densitas ut in notâ superiore.

## PROBLEMA.

**Vis centripeta tendens ad datum punctum C sit in loco quovis P ut distantiæ CP dignitas $CP^n$ reciprocè, et medii resistentia sit ut medii densitas et velocitatis dignitas quælibet conjunctim; requiritur tum medii densitas in locis singulis quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ VPZ moveatur, tum corporis velocitas et medii resistentia in locis singulis.**

158. Dicantur vis centripeta in loco P, g, resistentia r, medii densitas k, velocitas corporis v, distantia PC, y, radius PO circuli curvam





osculantis in P, R, arcus VP, s; perpendiculum CT in tangentem PT ductum p, et a, b, n, m, quantitates datæ, erit (per Hyp.) $g = \frac{a}{y^n}$ et $r = \frac{kv^m}{b}$, sed est semper (27) $vv = \frac{Rpg}{y} = \frac{aRp}{y^{n+1}} = \frac{apdy}{y^n dp}$. Velocitas igitur per alterutram ex his æquationibus dabitur. Porrò (26.) $r = \frac{-vdv - gdy}{ds} = \frac{-vdv}{ds} - \frac{ady}{y^n ds}$, vel etiam (ibid.) $\pm r =$

$$\frac{-vdv \times \sqrt{yy-pp} - gdy \times \sqrt{yy-pp}}{ydy} = \frac{-vdv \times \sqrt{yy-pp}}{ydy} - \frac{a\sqrt{yy-pp}}{y^{n+1}}.$$

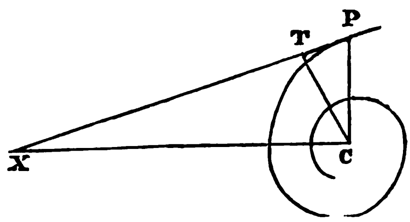
Quarè si in alterutrâ harum æquationum loco $vdv$ scribatur ipsius valor, qui reperitur capiendo fluxionem æquationis $vv = \frac{aRp}{y^{n+1}} = \frac{apdy}{y^n dp}$, obtinebitur resistentia r, seu $\frac{kv^m}{b}$, ejusque valore diviso per $\frac{v^m}{b}$ quod datum est inventâ velocitate v, dabitur medii densitas k. Q. e. i.

159. Exemplo sit spiralis logarithmica. In illâ ob datum angulum TPC datur ratio PC ad CT seu y ad p; sit ergò $c : a = y : p$, et ideò $p = \frac{ay}{c}$; atque $dp = \frac{ady}{c}$, et erit $vv = \frac{apdy}{y^n dp} = \frac{pc}{y^n} = \frac{a}{y^{n-1}}$. Ex his verò habetur $\sqrt{yy-pp} = \frac{y\sqrt{cc-aa}}{c}$, et $vdv = \frac{(1-n)ady}{2y^n}$, undè pro corporis descensu invenitur $r = \frac{(3-n)a\sqrt{cc-aa}}{acy^n}$; et pro ascensu $r = \frac{(n-3)a\sqrt{cc-aa}}{2cy^n}$, ideóque resistentia est reciprocè ut $y^n$. Cùm autem (per Hyp.) sit $r = \frac{kv^m}{b} = \frac{ka^{\frac{m}{2}}}{by^{\frac{mn-m}{2}}}$, erit densitas k ut $ry^{\frac{mn-m}{2}}$, seu ut $\frac{y^{\frac{mn-m}{2}}}{y^n} = y^{\frac{mn-m-2n}{2}}$, et hinc si ponatur $m = 2$, erit densitas k, ut $y^{-1}$, seu ut $\frac{1}{y}$, prorsus ut (in Prop. XVI.) demonstratum est.

160. *Corol.* 1. Per superiores æquationes

(158.) ex datâ corporis velocitate invenitur tum vis centripeta, tum resistentia et medii densitas. Est enim $g = \frac{vvy}{Rp} = \frac{vvdp}{pdy}$; undè habetur vis centripeta g; datis autem vi centripetâ et celeritate, invenitur tum resistentia r, tum medii densitas k, ut supra (158).

161. Exemplum sit in spirali hyperbolicâ cujus hæc est proprietas ut si per centrum C erigatur ad radium C P, perpendicularis C X tangenti P X per P ductæ occurrens in X sit subtangens illa C X constans. Velocitas sit ut




tangens P X, et resistentia r ut densitas medii et quadratum velocitatis conjunctim, hoc est $r = \frac{kv^2}{b}$, dicaturque C X, c, et ideò $PX = \sqrt{yy+cc}$, atque (per Hyp.) $v = \frac{e\sqrt{yy+cc}}{c}$, et e, quantitas data. Erit ob triangula C P T, X P C similia, P X $(\sqrt{yy+cc})$ : C X (c) = P C (y) : C T (p), et ideò $p = \frac{cy}{\sqrt{yy+cc}}$, $dp = \frac{c^3 dy}{\overline{yy+cc}^{\frac{3}{2}}}$, et $\sqrt{yy-pp} = \frac{yy}{\sqrt{yy+cc}}$. Quarè fiet (160) $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{e^2}{y}$; id est, vis centripeta ut distantia PC reciprocè. Quia verò $vv = \frac{ee}{cc} \times (yy+cc)$ erit $vdv = \frac{eeydy}{cc}$ et propterea pro corporis descensu $r = \frac{vdv\sqrt{yy-pp}}{ydy} + \frac{g\sqrt{yy-pp}}{y} = \frac{eeyy}{cc\sqrt{yy+cc}} + \frac{e^2}{\sqrt{yy+cc}} = \frac{e^2 \times \overline{yy+cc}}{cc\sqrt{yy+cc}} = \frac{e^2}{c^2} \times \sqrt{yy+cc}$, adeóque resistentia ut tangens P X, seu ut velocitas. Cùm igitur sit $r = kv^2 = \frac{ke^2}{cc} \times (yy+cc) = \frac{e^2}{cc} \times \sqrt{yy+cc}$, erit densitas medii $k = \frac{1}{\sqrt{yy+cc}}$, seu reciprocè ut tangens P X sivè reciprocè ut velocitas.

162. *Corol.* 2. Datâ medii densitate et concessis figurarum quadraturis, dabitur vis centripeta et corporis velocitas. Est enim (27. et 160) $vdv + \frac{vvdp}{p} = -rds = \frac{kv^m ds}{b}$ (158) et dividendo per $v^m$, et multiplicando per $p^{2-m}$, fit $p^{2-m}v^{1-m}dv + v^{2-m}p^{1-m}dp = -\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, et sumptis utrinque fluentibus habetur, $\frac{1}{2-m} \times p^{2-m} \times v^{2-m} = -S.\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, ideóque $v^{2-m} = (m-2) \times \frac{S.kp^{2-m}ds}{b \times p^{2-m}}$. Quare si densitas medii k, sit ut functio quævis distantiæ P C a centro C, inveniri poterit fluens $S.kp^{2-m}ds$ aut algebraicè aut per figurarum quadraturas, et loco ds, scribi potest $\pm \frac{ydy}{\sqrt{yy-pp}}$ (26). Inventâ autem velocitate v, obtinetur vis centripeta g per æquationem $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{vvy}{Rp}$ (160).

163. *Corol.* 3. Si in superiori Corollario sit m = 2, id est, resistentia ut densitas et quadratum velocitatis conjunctim, erit 2 — m = o, et æquatio $p^{2-m}v^{1-m}dv + v^{2-m}p^{1-m}dp = -\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, in hanc mutabitur $\frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = -\frac{kds}{b}$, undè sumptis fluentibus, habetur $L.v + L.p = -S.\frac{kds}{b}$, et $L.v = -S.\frac{kds}{b} - L.p$, ex quâ æquatione invenitu, v, et hinc habetur g ut suprà.

164. *Corol.* 4. Sit in hypothesi Corol. 3. densitas medii k uniformis, velocitas corporis in locc dato v = c, et perpendiculum p in eodem loco = q datæ, erit $L.v = -\frac{ks}{b} - L.p + Q$, et quia in loco V, fit s = o, v = c, p = q, erit $Q = L.c + L.q = L.cq$. Et hinc $L.v = L\frac{cq}{p} - \frac{ks}{p}$. Ponatur L. h = 1, ut sit $L.v = L.\frac{cq}{p} - \frac{ks}{b} \times L.h = L.\frac{cq}{ph^{\frac{ks}{b}}}$. Undè deducitur $v = \frac{cq}{ph^{\frac{ks}{b}}}$, $vv = \frac{c^2q^2}{p^2h^{\frac{2ks}{b}}}$, et hinc $g = \frac{vvy}{Rp} = \frac{c^2q^2y}{Rp^3h^{\frac{2ks}{b}}}$, vel $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{c^2q^2dp}{p^3h^{\frac{2ks}{b}}dy}$

165. *Corol.* 5. In his autem omnibus inveniri potest tempus per æquationem $dt = \frac{ds}{v}$, seu $t = S.\frac{ds}{v}$ (13).

166. *Corol.* 6. Datâ vi centripetâ et resistentiâ ac densitate medii, inveniri potest æquatio ad trajectoriam Z P V quam corpus projectile circà centrum virium C describit. Sit, exempli gratiâ, medium uniforme, resistentia ut quadratum velocitatis et vis centripeta $= \frac{a}{y^n}$ et (164.) erit $\frac{a}{y^n} = \frac{c^2 q^2 d p}{p^3 h^{\frac{2ks}{b}} d y}$, ideóque $h^{\frac{2ks}{b}} = \frac{c^2 q^2 y^n d p}{a p^3 d y}$, et $L. h^{\frac{2ks}{b}} = \frac{2 k s}{b} = L. \frac{c^2 q^2 y^n d p}{a p^3 d y}$; capiantur utrinque fluxiones, factâ d y constante, et fiet (26) $\frac{2 k d s}{b} \left(= \pm \frac{2 k y d y}{b \sqrt{y y - p p}}\right) = \frac{n d y}{y} + \frac{d d p}{d p} - \frac{3 d p}{p}$ (notum supponimus (40), quantitatis cujusvis logarithmicæ L. z fluxionem esse $\frac{d z}{z}$). Hinc verò habetur $\frac{2 k s}{b} = L. y^n + L. d p - 3 L. p - L. \frac{d y.}{Q}$, ubi $\frac{d y}{Q}$, est quantitas constans, ideóque sit $\frac{2 k s}{b} = L. y^n + L. \frac{Q d p}{d y} - L. p^3 = L. \frac{Q y^n d p}{p^3 d y}$, et hinc $h^{\frac{2ks}{b}} = \frac{Q y^n d p}{p^3 d y}$, æquatio ad trajectoriam.

167. *Schol.* Si curva V P Z sit sectio conica cujus umbilicus C axis major c semiaxis minor e, erit (276. Lib. I.) pro ellipsi $p p = \frac{e e y}{c - y}$, pro hyperbolâ $p p = \frac{e e y}{c + y}$, et pro parabolâ, si latus rectum axis dicatur 4 e, erit (per Lem. XIV. Lib. I.) $p p = e y$. Undè facile est superioris Problematis solutiones ad sectiones conicas transferre. Sit V P Z parabola, vis centripeta $g = \frac{a}{y^n}$, resistentia $r = \frac{k v^2}{b}$, et quæratur tum corporis velocitas tum resistentia et medii densitas in loco quovis P. Quoniam $p p = e y$, erit $2 p d p = e d y$, $d p = \frac{e d y}{2 p}$, $\frac{p}{d p} = \frac{2 p p}{e d y} = \frac{2 y}{d y}$; undè fit (158) $v v = \frac{a p d y}{y^n d p} = \frac{2 a}{y^{n-1}}$; hinc verò habetur $v d v = \frac{(1 - n) a d y}{y^n}$, atque ideò pro corporis descensu (158) $r = \frac{v d v \sqrt{y y - p p}}{y d y} + \frac{a \sqrt{y y - p p}}{y^{n+1}} = \frac{(2 a - n a) \sqrt{y y - e y}}{y^{n+1}}$; et pro ascensu $r = \frac{(n a - 2 a) \sqrt{y y - e y}}{y^{n+1}}$; resistentia igitur est semper ut $\frac{P T}{P C^{n+1}}$; porrò est (per Hyp.) $r = \frac{k v^2}{b} = \frac{2 a k}{b y^{n+1}} = (2 a - n a) \times \frac{\sqrt{y y - e y}}{y^{n+1}}$, vel $= (n a - 2 a) \frac{\sqrt{y y - e y}}{y^{n+1}}$; quarè erit medii densitas k, ut $\frac{\sqrt{y y - e y}}{y^2}$, seu ut $\frac{P T}{P C^2}$. Et simili modo in ellipsi et hyperbolâ invenitur medii densitas ut $\frac{P T}{P C^2}$. At in circulo fit $P T = o$, ideóque medii densitas et resistentia nulla. Evanescit quoque resistentia, si $n = 2$, id est, si vis centripeta sit ut quadratum distantiæ reciprocè, quo casu sectiones conicæ, ut Lib. I. demonstratum est, in medio non resistente describuntur. Si n est numerus binario minor, sectiones conicæ per descensum describi possunt; per ascensum verò si n, binario major. Tandem ubi est $n = 1$, hoc est, vis centripeta distantiæ P C, reciprocè proportionalis, velocitas in parabolâ sicut et in spirali logarithmicâ uniformis est.

## SECTIO V.

### *De densitate et compressione fluidorum, deque hydrostaticâ.* (*)

Definitio Fluidi.

*Fluidum est corpus omne, cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, et cedendo facile moventur inter se.*

### PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV

*Fluidi homogenei et immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur et undique comprimitur, partes omnes (sepositâ condensationis, gravitatis, et virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, et sine omni motu a pressione illâ orto permanent in locis suis.*

*Cas.* 1. In vase sphærico A B C claudatur et uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejusdem pars nulla ex illâ pressione movebitur. Nam si pars aliqua D moveatur, necesse est ut omnes hujusmodi partes ad eandem a centro distantiam undique consistentes, simili motu

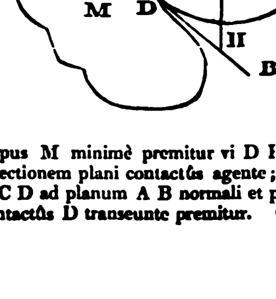
(*) 168. *Hydrostaticâ* est scientia pressionum quas fluida vel ipsorum partes in se mutuò vel in corpora solida exercent.

169. *Fluidum homogeneum* dicitur, cujus densitas est uniformis, adeò ut nimirum æqualis materiæ quantitas sub voluminibus æqualibus ubique per totam fluidi massam contineatur, *fluidum heterogeneum* appellatur cujus densitas uniformis non est.

170. *Gravitas specifica* corporis est ratio ponderis ejusdem ad volumen; itâ ut corpora ejusdem gravitatis specificæ dicantur quæ sub æqualibus voluminibus æquale pondus habent; specificè graviora vel leviora quæ sub æqualibus voluminibus majus vel minus pondus continet; quarè cum densitas sit ratio massæ ad volumen corporis (2. Lib. I.) ubi pondera sunt ut massæ, gravitates specificæ sunt ut densitates.

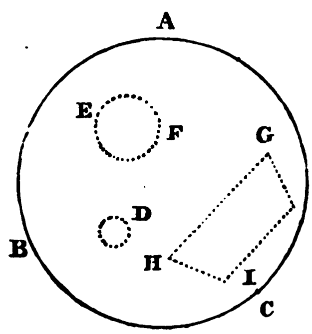
171. Lemma. *Pressiones quas corpora quævis in se motuò exercent, fiunt juxtà directiones communi plano contingenti perpendiculares, et per punctum contingentiæ eorumdem corporum transeunt.*

Corpus N vi quâlibet secundum directionem F C urgeatur, tangaturque in D a corpore M; producatur F C ut plano A B quod utrumque corpus contingit in D occurrat in H, ductâ per D rectâ D C ad planum A B perpendiculari, vis quâ corpus N urgetur, exponatur per lineam C H, et hæc (per Leg. Mot. Cor. 9.) resolvi poterit in vires æquipollentes C D et D H. Sed




corpus M minimè premitur vi D H secundùm directionem plani contactûs agente; quarè solâ vi C D ad planum A B normali et per punctum contactûs D transeunte premitur. Q. e. d.

simul moveantur; atque hoc ideò quia similis et æqualis est omnium pressio, et motus omnis exclusus supponitur, nisi qui a pressione illâ oriatur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere, nisi fluidum ad centrum condensetur; contra hypothesin. Non possunt longiùs ab eo recedere, nisi fluidum ad circumferentiam condensetur; etiam contra hypothesin. Non possunt servatâ suâ a centro distantiâ moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non potest pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco suo movebitur. Q. e. d.




*Cas.* 2. Dico jam, quòd fluidi hujus partes omnes sphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim E F pars sphærica fluidi, et si hæc undique non premitur æqualiter, augeatur pressio minor, usque dum ipsa undique prematur æqualiter; et partes ejus, per Casum primum, permanebunt in locis suis. Sed ante auctam pressionem permanebant in locis suis, per Casum eundem primum, et additione pressionis novæ movebuntur de locis suis, per Definitionem Fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falsò dicebatur quòd sphæra E F non undique premebatur æqualiter. Q. e. d.

*Cas.* 3. Dico præterea quòd diversarum partium sphæricarum æqualis sit pressio. Nam partes sphæricæ contiguæ se mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motûs Legem tertiam. Sed et, per Casum secundum, undique premuntur eâdem vi. Partes igitur duæ quævis sphæricæ non contiguæ, (*) quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque, prementur eâdem vi. Q. e. d.

*Cas.* 4. Dico jam quòd fluidi partes omnes ubique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi possunt a partibus sphæricis in punctis quibuscunque, et ibi partes illas sphæricas æqualiter premunt, per Casum tertium et vicissim ab illis æqualiter premuntur, per motûs Legem tertiam. Q. e. d.

*Cas.* 5. Cùm igitur fluidi pars quælibet G H I in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, et undique prematur æqualiter, partes autem ejus se mutuò æqualiter premant et quiescant inter se; manifestum est quòd

(*) * *Quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque.* Nam pars illa intermedia duas alias partes sphæricas in punctis contactûs premet; atque ab illis premetur æqualiter, (ex dem.)

fluidi cujuscunque G H I, quod undique premitur æqualiter, partes omnes se mutuò premunt æqualiter, et quiescunt inter se. Q. e. d.

*Cas.* 6. Igitur si fluidum illud in vase non rigido claudatur, et undique non prematur æqualiter; cedet idem pressioni fortiori, per Definitionem Fluiditatis.

*Cas.* 7. Ideóque in vase rigido fluidum non sustinebit pressionem fortiorem ex uno latere quàm ex alio, sed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vasis rigidum non persequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppositum, et sic pressio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum, quàm primum a parte magis pressâ recedere conatur, inhibetur per resistentiam vasis ad latus oppositum; reducetur pressio undique ad æqualitatem, in momento temporis, sine motu locali: et subinde partes fluidi, per Casum quintum, se mutuò prement æqualiter, et quiescent inter se. Q. e. d.

*Corol.* Unde nec motus partium fluidi inter se, per pressionem fluido ubivis in externâ superficie illatam, mutari possunt, nisi quâtenus aut figura superficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intensiùs vel remissiùs sese premendo difficiliùs vel faciliùs labuntur inter se.

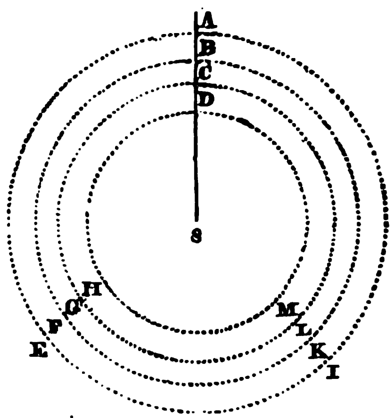
## PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

(b) *Si fluidi sphærici, et in æqualibus a centro distantiis homogenei, fundo sphærico concentrico incumbentis partes singulæ versus centrum totius graviten; sustinet fundum pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi, et altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.*

Sit D H M superficies fundi, et A E I superficies superior fluidi. Superficiebus sphæricis innumeris B F K, C G L distinguatur fluidum in orbes concentricos æqualiter crassos; et concipe vim gravitatis agere solummodo in superficiem superiorem orbis cujusque, et æquales esse actiones in æquales partes superficierum omnium. Premitur ergo superficies suprema A E vi simplici gravitatis propriæ, quâ et omnes orbis su-

(b) 172. *Si fluidi sphærici*, &c. Fluidi quiescentis superficies ad gravitatis directionem perpendicularis est ubique, et ideò si vis gravitatis ad centrum unum dirigatur, sphærica est. Si enim superficiei fluidi pars aliqua ad gravitatis directionem inclinata sit, resolvatur vis gravitatis in duas vires quarum una directionem habeat superficiei fluidi perpendicularem, altera parallelam et, (ex Definitione) fluidum secundùm hanc directionem movebitur, contra Hyp. Erit igitur pars quælibet superficiei ad gravitatis directionem perpendicularis: et quoniam nulla est alia superficies, præter sphæricam, quæ hanc habeat proprietatem, ut lineæ omnes ipsi perpendiculares ad centrum unum concurrant, superficies illa fluidi sphærica erit. Q. e. d.

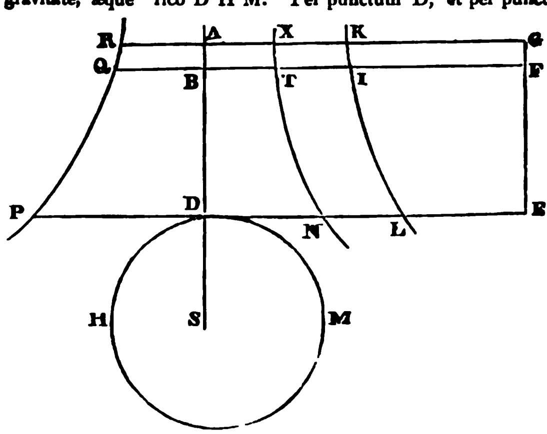
premi partes et superficies secunda B F K (per Prop. XIX.) (c) pro mensurâ suâ æqualiter premuntur. Premitur præterea superficies secunda B F K vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit pressionem duplam. Hâc pressione, pro mensurâ suâ, et insuper vi propriæ gravitatis, id est, pressione triplâ urgetur superficies tertia C G L. Et similiter pressione quadruplâ urgetur superficies quarta, quintuplâ quinta, et sic deinceps. Pressio igitur quâ superficies unaquæque urgetur, non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus orbium ad usque summitatem fluidi; et æquatur gravitati orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium: hoc est, gravitati solidi cujus ultima ratio ad cylindrum præfinitum (si modo orbium augeatur numerus et minuatur crassitudo in infinitum, sic ut actio gravitatis a superficie infimâ ad supremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus cylindri præfiniti. Q. e. d. (d) Et simili argumentatione patet Propositio, ubi gravitas decrescit in ra-




(c) * *Pro mensurâ suâ æqualiter premuntur.* Singulæ, nimirum, superficiei secundæ partes, semotâ partium illarum propriâ gravitate, æque premuntur ac partes æquales superficiei supremæ; quod per Prop. XIX. manifestum fit, si spatium, quod illas superficies continet, tanquam vas aliquod consideretur quod fluidum æqualiter undique compressum complectitur.

(d) * *Et simili argumentatione*, &c. Patet ut in superiori demonstratione, quod pondus partium omnium æqualium D, C, B, A in totâ rectâ D A existentium sustineatur a parte D correspondente fundi sphærici D H M. Hoc igitur fundum sustinet pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi, et altitudo eadem quæ fluidi incumbentis D A; modo tamen in locis a fundo sphærico D H M et a basi planâ cylindri æquidistantibus, eadem servetur fluidi densitas, eademque vis gravitatis quæ in basim cylindri perpendiculariter tendat ubique.

173. Designet D A G E prædictum cylindrum, cujus basis D E æqualis sit fundo sphærico D H M. Per punctum D, et per puncta B et A infinitè propinqua ductæ sint rectæ D E, B F et A G perpendiculares ad A S; in illis perpendicularibus capiantur D L, B I, A K densitatibus fluidi et D N, B T, A X viribus

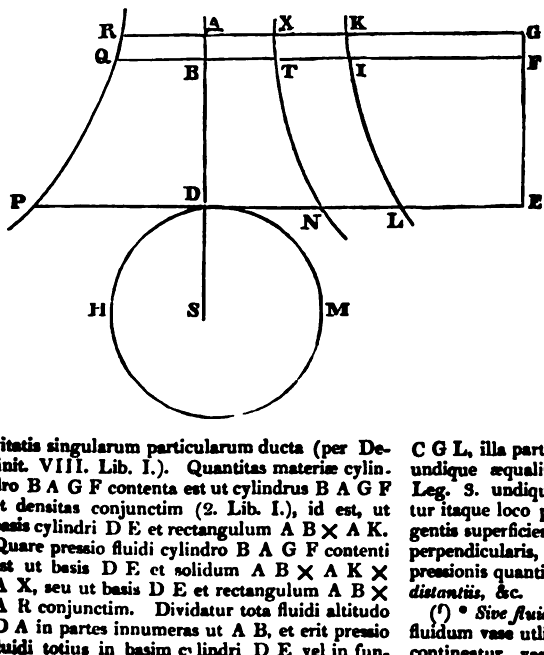


tione quâvis assignatâ distantiæ a centro, ut et ubi fluidum sursum rarius est, deorsum densius. Q. e. d.

*Corol.* 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, sed eam solummodo ponderis partem sustinet quæ in Propositione describitur; pondere reliquo a fluidi figurâ fornicatâ sustentato.

*Corol.* 2. In æqualibus autem a centro distantiis eadem semper est pressionis quantitas, (e) sive superficies pressa sit horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; (f) sive fluidum, a superficie pressâ sursum continuatum, surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpit obliquè per tortas cavitates et canales, easque regulares vel maximè irre-

gravitatis acceleratricibus in locis D, B, A proportionales, sintque curvæ L I K et N T X loca punctorum L, I, K, et N, T, X. Producatur K A in R, ut sit semper A R rectangulo A X × A K proportionalis, et R Q P curva quam punctum R perpetuo tangit: et pressio fluidi in fundum sphæricum D H M erit ut fundum D H M et area D A R P conjunctim. Nam pressio fluidi cylindrulo B A G F contenti in basim D E est ut quantitas materiæ in vim gravitatis singularum particularum ducta (per Definit. VIII. Lib. I.). Quantitas materiæ cylindro B A G F contenta est ut cylindrus B A G F et densitas conjunctim (2. Lib. I.), id est, ut basis cylindri D E et rectangulum A B × A K. Quare pressio fluidi cylindro B A G F contenti est ut basis D E et solidum A B × A K × A X, seu ut basis D E et rectangulum A B × A R conjunctim. Dividatur tota fluidi altitudo D A in partes innumeras ut A B, et erit pressio fluidi totius in basim cylindri D E vel in fundum sphæricum D H M, ut basis D E vel fundum D H M et area D A R P conjunctim. Q. e. d.




Si vis acceleratrix gravitatis constans sit, curva X T N in rectam lineam mutabitur axi A D parallelam, eritque proinde pressio fluidi in fundum D H M, ut fundum hoc et area D A K L conjunctim; in hâc enim hypothesi, ob datam A K, area D A R P proportionalis est areæ D A K L.

Si vis gravitatis et densitas fluidi constantes sint, curvæ X T N, K I L et R Q P in rectas lineas axi A D parallelas migrant; et ideò pressio fluidi in fundum sphæricum D H M, vel in basim cylindri D E, est ut fundum illud D H M, vel basis D E, et altitudo fluidi A D conjunctim. Si verò conferantur liquores in se homogenei, sed diversæ inter se densitatis, pressiones erunt in ratione compositâ basium, altitudinum et densitatum, modò gravitas acceleratrix constans, sit in utroque liquore æqualis; nam si inæqualis esset, pressiones forent in ratione compositâ basium, altitudinum, densitatum et virium gravitatis.

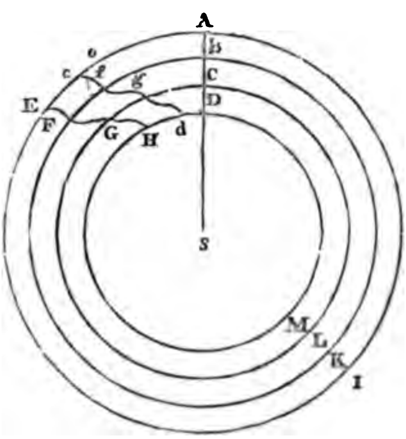
(e) * *Sive superficies pressa sit horizonti, &c.* * Sumatur quævis particula inter duos orbes concentricos B F K, C G L, illa particula per Casum 5. Prop. XIX. undique æqualiter premitur, ergo per motûs Leg. 3. undique æqualiter premit, substituatur itaque loco particulæ cujusvis hanc contingentis superficies quævis, sive horizontalis, sive perpendicularis, sive obliqua, æqualis erit in eam pressionis quantitas: *ergo in æqualibus a centro distantiis, &c.*

(f) * *Sive fluidum a superficie pressâ, &c.* Si fluidum vase utlibet irregulari E F G H d g f e contineatur, vasis fundum H d sustinebit pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi H d, et altitudo D A eadem quæ fluidi in vase contenti. Iisdem enim positis, quæ in de-

gulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem nil mutari colligitur, applicando demonstrationem Theorematis hujus ad casus singulos fluidorum.

*Corol.* 3. Eâdem demonstratione colligetur etiam (per Prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex pressione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter se; si modò excludatur motus qui ex condensatione oriatur.

*Corol.* 4. Et propterea si aliud ejusdem gravitatis specificæ corpus, quod sit condensationis expers, submergatur in hoc fluido, id ex pressione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non descendet, non ascendet, non cogetur figuram suam mutare. Si sphæricum est, manebit sphæricum, non obstante pressione; si quadratum est, manebit quadratum: idque sive molle sit, sive fluidissimum; sive fluido liberè innatet, sive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis submersi, et par est ratio omnium ejusdem magnitudinis, figuræ et gravitatis specificæ submersorum corporum. Si corpus submersum servato pondere liquesceret et indueret formam fluidi; hoc, si prius ascenderet, vel descenderet, vel ex pressione figuram novam indueret, etiam nunc ascenderet, vel descenderet, vel figuram novam induere cogeretur: id adeò quia gravitas ejus cæteræque motuum causæ permanent. Atqui (per Cas. 5. Prop. XIX.) jam quiesceret et figuram retineret. Ergo ut prius.




monstratione Propositionis hujus, premitur superficies suprema E e vi simplici gravitatis propriæ, quâ et superficies secunda F f pro mensura sua æqualiter premitur. Premitur præterea superficies secunda F f vi propriâ gravitatis, quæ addenda est vi priori. Hâc pressione, pro mensurâ suâ, et insuper vi propriæ gravitatis, urgetur superficies tertia G g; et sic deinceps. Quare patet, ut supra, pressionem quam superficies infima H d subit, æqualem esse ponderi cylindri cujus est altitudo D A et basis fundo H d æqualis.

Manente igitur tum basi H d, tum fluidi altitudine perpendiculari D A, manet fluidi in basim pressio, utcumque mutetur vasis fluidum continentis figura. Atque hinc in vasis communicantibus æquilibrium est, ubi perpendiculares fluidi altitudines supra fundum commune in utroque vase æquantur, dummodo in paribus a centro virium gravitatis S distantiis tam fluidi densitas quàm vis gravitatis servetur eadem. Nam si, manente vi gravitatis acceleratrice, conferantur fluida in se homogenea, sed diversæ inter se densitatis, erit in vasis communicantibus æquilibrium, ubi fluidorum in utroque vase altitudines perpendiculares erunt in ratione densitatum reciprocâ, quia in eo casu fluidorum in basim communem pressiones æquales sunt (173).

*Corol.* 5. Proinde corpus quod specificè gravius est quàm fluidum sibi contiguum, subsidebit, et quod specificè levius est ascendet, motumque et figuræ mutationem consequetur, quantum excessus ille vel defectus gravitatis efficere possit. Namque excessus ille vel defectus rationem habet impulsus, quo corpus, aliàs in æquilibrio cum fluidi partibus constitutum, urgetur; et comparari potest cum excessu vel defectu ponderis in lance alterutrâ libræ.

*Corol.* 6. Corporum igitur in fluidis constitutorum duplex est gravitas, altera vera et absoluta, altera apparens, vulgaris et comparativa. Gravitas absoluta est vis tota quâ corpus deorsum tendit: relativa et vulgaris est excessus gravitatis quo corpus magis tendit deorsum quam fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum et corporum omnium gravitant in locis suis: ideóque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave est, ut in vasis liquorum plenis experiri licet; et pondus totius æquale est ponderibus omnium partium, ideóque ex iisdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis suis, id est, inter se collata non prægravant, sed mutuos ad descendendum conatus impedientia permanent in locis suis, perinde ac si gravia non essent. Quæ in aëre sunt et non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quâtenus aëris pondere non sustinentur. Pondera vulgi nihil aliud sunt quàm excessus verorum ponderum supra pondus aëris. Unde et vulgò dicuntur levia, quæ sunt minus gravia, aërique prægravanti cedendo superiora petunt. Comparativè levia sunt, non verè, quia descendunt in vacuo. Sic et in aquâ corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem descendunt vel ascendunt, sunt comparativè et apparenter gravia vel levia, et eorum gravitas vel levitas comparativa et apparens est excessus vel defectus quo vera eorum gravitas vel superat gravitatem aquæ, vel ab eâ superatur. Quæ verò nec prægravando descendunt, nec prægravanti cedendo ascendunt, etiamsi veris suis ponderibus adaugeant pondus totius, comparativè tamen et in sensu vulgi non gravitant in aquâ. Nam similis est horum casuum demonstratio.

*Corol.* 7. Quæ de gravitate demonstrantur, obtinent in aliis quibuscunque viribus centripetis.

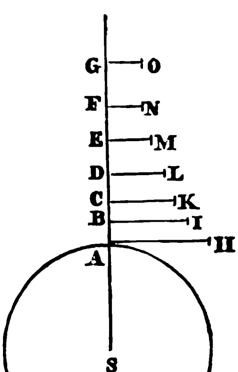
*Corol.* 8. Proinde si medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propriâ, vel ab aliâ quâcunque vi centripetâ, et corpus ab eâdem vi urgeatur fortius; differentia virium est vis illa motrix, quam in præcedentibus Propositionibus ut vim centripetam consideravimus.

Sin corpus a vi illâ urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifugâ haberi debet.

*Corol.* 9. Cùm autem fluida premendo corpora inclusa non mutent eorum figuras externas, patet insuper (per Corollarium Prop. XIX.) quod non mutabunt situm partium internarum inter se: proindeque, si animalia immergantur, et sensatio omnis a motu partium oriatur; nec lædent corpora immersa, nec sensationem ullam excitabunt, nisi quâtenus hæc corpora a compressione condensari possunt. Et par est ratio cujuscunque corporum systematis fluido comprimente circundati. Systematis partes omnes iisdem agitabuntur motibus, ac si in vacuo constituerentur, ac solam retinerent gravitatem suam comparativam, nisi quâtenus fluidum vel motibus earum nonnihil resistat, vel ad easdem compressione conglutinandas requiratur.

## PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

*Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, et partes ejus a vi centripetâ distantiis suis a centro reciprocè proportionali deorsum trahantur: dico quod, si distantiæ illæ sumantur continuè proportionales, densitates fluidi in iisdem distantiis erunt etiam continuè proportionales.*

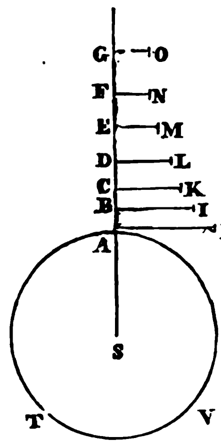



Designet A T V fundum sphæricum cui fluidum incumbit, S centrum, S A, S B, S C, S D, S E, S F, &c. distantias continuè proportionales. Erigantur perpendicula A H, B I, C K, D L, E M, F N, &c. quæ sint ut densitates medii in locis A, B, C, D, E, F; ([g]) et specificæ gravitates in iisdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. ([h]) vel, quod perinde est, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Finge primùm has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, a B ad C, a C ad D, &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D,

([g]) 174. *Et specificæ gravitates*, &c. Fluidi enim cujus singulæ particulæ vi gravitatis urgentur gravitas specifica est ut densitas et vis gravitatis acceleratrix conjunctim. Est enim gravitas specifica ut pondus directè et volumen inversè (170); sed pondus (per Defin. VIII. Lib I.) est ut quantitas materiæ et vis gravitatis acceleratrix conjunctim; quantitas verò materiæ (2. Lib. I.) est ut densitas et volumen conjunctim. Quarè, conjunctis his rationibus, gravitas specifica est ut densitas et vis gravitatis acceleratrix conjunctim. Q. e. d.

([h]) • *Vel quod perinde est, ut*, &c. Cùm enim (per Hyp.) distantiæ S A, S B, S C, S D

&c. (l) Et hæ gravitates ductæ in altitudines A B, B C, C D, &c. conficient pressiones A H, B I, C K, &c. quibus fundum A T V (juxta Theorema XV.) urgetur. Sustinet ergo particula A pressiones omnes A H, B I, C K, D L, (k) pergendo in infinitum; et particula B pressiones omnes præter primam A H; et particula C omnes præter duas primas A H, B I; et sic deinceps: ideóque particulæ primæ A densitas A H, est ad particulæ secundæ B densitatem B I ut summa omnium A H + B I + C K + D L, in infinitum, ad summam omnium B I + C K + D L, &c. Et B I densitas secundæ B est ad C K densitatem tertiæ C, ut summa omnium B I + C K + D L, &c. ad summam omnium C K + D L, &c. Sunt igitur summæ illæ differentiis suis A H, B I, C K, &c. proportionales, atque ideò continuè proportionales (per hujus Lem. I.) proindeque differentiæ A H, B I, C K, &c. summis proportionales, sunt etiam continuè proportionales. Quare cùm densitates




in locis A, B, C, &c. sint ut A H, B I, C K, &c. erunt etiam hæ continuè proportionales. Pergatur per saltum, et ex æquo in distantiis S A, S C, S E continuè proportionalibus, erunt densitates A H, C K, E M continuè proportionales. Et eodem argumento, in distantiis quibusvis continuè proportionalibus S A, S D, S G, densitates A H, D L, G O erunt continuè proportionales. Coëant jam puncta A, B, C, D, E, &c. eo ut progressio gravitatum specificarum a fundo A ad summitatem fluidi continua reddatur, et in distantiis quibusvis continuè proportionalibus S A, S D, S G, densitates A H, D L, G O, semper existentes continuè proportionales, manebunt etiamnum continuè proportionales. Q. e. d.

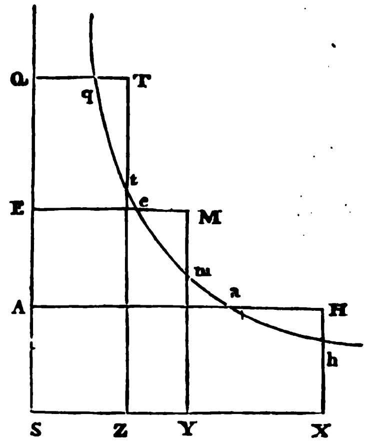
*Corol.* Hinc si detur densitas fluidi in duobus locis, putà A et E, col-

&c. sint continuè proportionales, earum differentiæ A B, B C, C D, &c. ipsis proportionales erunt.

(l) * *Et hæ gravitates ductæ*, &c. Nam si pondus quod fundum sphæricum A T V sustinet, exponatur per cylindrum cujus basis æqualis sit superficiei A T V et altitudo eadem quæ fluidi incumbentis, volumen fluidi cylindrici pro altitudine A B erit A T V × A B, ideóque ob datam superficiem A T V, erit volumen illud ut A B, multiplicetur illud per gravitatem specificam et factum erit ut pondus seu pressio; quare cùm (ex demonst.) gravitas specifica sit ut $\frac{A\,H}{A\,B}$, pressio fluidi cylindrici, cujus est altitudo A B, erit ut A H, et ita de cæteris.

(k) 175. * *Pergendo in infinitum.* Quoniam enim (per Hyp.) densitas compressioni proportionalis est, ubi compressio nulla evadit, evanescit quoque densitas, seu, fluidum fit infinitè rarum, ac proinde in infinitum expanditur; cùm ratio voluminis ad materiæ quantitatem infinita evadat (2. Lib. I.).

ligi potest ejus densitas in alio quovis loco Q. Centro S, asymptotis rectangulis S Q, S X describatur hyperbola secans perpendicula A H, E M, Q T in a, e, q, ut et perpendicula H X, M Y, T Z, ad asymptoton S X demissa, in h, m et t. Fiat area Y m t Z ad aream datam Y m h X ut area data E e q Q ad aream datam E e a A; et linea Z t producta abscindet lineam Q T densitati proportionalem. Namque si lineæ S A, S E, S Q sunt continuè proportionales, (l) erunt areæ E e q Q, E e a A æquales, et inde areæ his proportionales Y m t Z, X h m Y etiam æquales, et lineæ S X, S Y, S Z, id est, A H, E M, Q T (m) continuè proportionales, ut oportet. Et si lineæ S A, S E, S Q obtinent alium quemvis ordinem in serie continuè proportionalium, lineæ A H, E M, Q T, ob proportionales areas hyperbolicas, (n) obtinebunt eundem ordinem in aliâ serie quantitatum continuè proportionalium.




(l) * *Erunt areæ E e q Q, E e a A æquales*, per not. 379. Lib. I.

(m) * *Continue proportionales*, (379. Lib. I.)

(n) * *Obtinebunt eumdem ordinem*, &c. * Etenim areæ hyperbolicæ E e a A, Q q a A sunt logarithmi linearum S E, S Q, et pariter areæ Y m t Z, X h t Z sunt logarithmi linearum S Y, S X, (379. 389. Lib. I.) sed cùm areæ Y m t Z, X h t Z sint per constructionem proportionales areis E e a A, Q q a A, illæ areæ Y m t Z, X h t Z per doctrinam logarithmorum (n. 38.) poterunt esse logarithmi linearum S E, S Q; cùm ergo eædem quantitates possint esse logarithmi tam quantitatum S E, S Q, quàm quantitatum S Y, S X, oportet ut istæ quantitates S E, S Y et S Q, S X correspondentia loca occupent in progressionibus geometricis ad quas pertinent.

## PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

*Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, et partes ejus a gravitate quadratis distantiarum suarum a centro reciprocè proportionali deorsum trahantur: dico (°) quòd, si distantiæ sumantur in progressione musicâ, densitates fluidi in his distantiis erunt in progressione geometricâ.*

Designet S centrum, et S A, S B, S C, S D, S E distantias in progressione geometricâ. Erigantur perpendicula A H, B I, C K, &c.

(°) * *Quòd, si distantiæ sumantur in progressione musicâ,* aut, quod idem est, si tales sumantur distantiæ ut earum reciprocæ sint in progressione arithmeticâ.

* Scilicet tres quantitates dicuntur esse in continuâ proportione musicâ sive harmonicâ, si prima sit ad tertiam ut differentia primæ et secundæ ad differentiam secundæ et tertiæ. Et si sit series plurium quantitatum talium ut terminus quivis sit ad subsequentem, ut differentia prioris a termino intermedio, ad differentiam hujus intermedii a posteriore termino, ea series dicitur *progressio musica.*

Corol. 1. *In progressione musicâ factum duorum priorum terminorum est ad factum duorum quorumvis immediatè sibi succedentium ut differentia inter duos primos terminos ad differentiam inter hos ultimos.* Nam sunto termini progressionis musicæ A, B, C, D, E, F, &c. et differentiæ inter singulos M, N, P, Q, R, &c. erit per definitionem hujus progressionis

A : C = M : N
B : D = N : P
C : E = P : Q
D : F = Q : R, unde ex compositione rationum patet quod est
A × B : E × F = M : R.

Corol. 2. *Differentia inter duos primos terminos est ad differentiam inter duos quosvis alios, ut secundus terminus, toties mulctatus differentiâ sua a primo quot sunt termini inter primum et ultimum, ad eum ultimum.*

Nam (iisdem litteris adhibitis quæ in superiore Corollario) cùm ex naturâ progr. sit A : C = M : N, sitque A = B — M; est B — M : C = M : N, ergo in hoc casu, differentia M inter duos primos terminos A et B est ad differentiam N inter B et C ut secundus terminus B semel mulctatus differentiâ suâ a primo, cùm sit unicus terminus inter primum A et ultimum C, ad eum ultimum C.

Cùm ergo sit B — M : C = M : N, vicissim B — M : M = C : N, et dividendo B — 2 M : M = C — N : N; cùmque sit C — N = B, est B — 2 M : M = B : N, sed, per defin. progress. est B : N = D : P ergo B — 2 M : M = D : P et vicissim B — 2 M : D = M : P, sunt verò duo termini inter A et D, unde rursus in hoc casu constat Corollarii veritas.

Item cùm sit B — 2 M : D = M : P et vicissim B — 2 M : M = D : P, erit dividendo B — 3 M : M = D — P : P, cùmque sit D — P = C erit B — 3 M : M = C : P cùmque per defin. progr. sit C : P = E : Q erit B — 3 M : M = E : Q et vicissim B — 3 M : E = M : Q. sunt verò inter A et E tres termini: cùmque eadem recurrat semper demonstratio si numerus terminorum progressionis inter primum et ultimum sit n; si secundus terminus dicatur B, differentia a primo M, ultimus terminus sit F, differentia a præcedente R erit, M : R = B — n M : F. Q. e. d.

Corol. 3. *In progressione musicâ secundus terminus toties mulctatus suâ differentiâ a primo quot sunt termini inter eum et ultimum est ad ultimum ut factum duorum primorum terminorum progressionis ad factum duorum postremorum.*

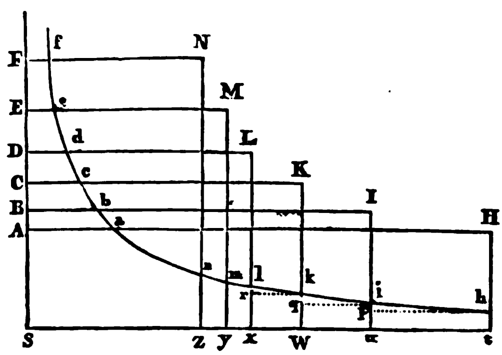
Liquet utique ex collatione duorum præcedentium Corollariorum; unde est semper, B — n M : F = A × B : E × F.

Theor. I. *Quilibet terminus progressionis musicæ est æqualis facto duorum primorum terminorum diviso per secundum terminum toties mulctatum differentiâ suâ a primo quot sunt termini a primo ad eum ultimum terminum.*

Primus terminus est $\frac{A \times B}{B}$, secundus terminus $\frac{A \times B}{A}$ sed A = B — M ergo secundus terminus est $\frac{A \times B}{B - M}$. Pro reliquis terminis habetur semper per Corol. 3. B — n M : F = A × B : E × F divisis ergo consequentibus per F, erit B — n M : 1 = A × B : E unde est E $= \frac{A \times B}{B - n M}$ sed cum n designaret numerum terminorum inter A et F hic exprimit numerum terminorum a primo ad E hoc ultimo annumerato, unde patet Theor. veritas.

Theor. II. *Termini omnes progressionis mu-*

quæ sint ut fluidi densitates in locis A, B, C, D, E, &c. et ipsius (p) gravitates specificæ in iisdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}$, $\frac{BI}{SBq}$, $\frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B, secundam a B ad C, tertiam a C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines A B, B C, C D, D E, &c. vel, quod perinde est, in distantias S A, S B, S C, &c. altitudinibus illis proportionales, (q) conficient exponentes pressionum $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Quare cùm densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum A H — B I, B I — C K, &c. erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Centro S, asymptotis S A, S x describatur hyperbola quævis, quæ secet perpendicula A H, B I, C K, &c. in a, b, c, &c. ut et perpendicula ad asymptoton S x demissa H t, I u, K w in h, i, k, et densitatum differentiæ t u, u w, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula t u × t h, u w × u i, &c. seu t p, u q, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id est, ut A a, B b, &c. Est enim, (r) ex naturâ hyperbolæ, S A ad A H vel S t, ut t h ad A a, ideóque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale A a. Et simili




*sicæ sunt inter se sicut quantitates quarum reciprocæ constituunt progressionem arithmeticam.*

Nam per Theor. prius termini A. B. C. D. E, &c. prog. musicæ sunt $\frac{A \times B}{B}$, $\frac{A \times B}{B - M}$, $\frac{A \times B}{B - 2M}$, $\frac{A \times B}{B - 3M}$, &c. $\frac{A \times B}{B - nM}$. Divisis itaque omnibus per A × B sunt ut $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{B - M}$, $\frac{1}{B - 2M}$, $\frac{1}{B - 3M}$, $\frac{B}{B - nM}$. Sed hæ sunt reciprocæ quantitatum B, B — M, B — 2 M, B — 3 M, B — n M quæ sunt in progressione arithmeticâ; ergo, &c.

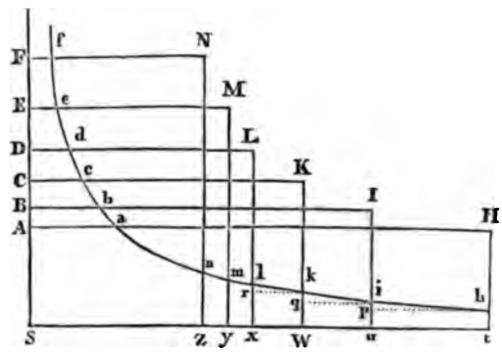
*Scholium.* Progressio musica potest esse decrescens et omnia ut prius procedent, mutatis signis negativis in positiva.

(p) * *Gravitates specificæ in iisdem locis erunt*, &c. (174.)

(q) * *Conficient exponentes pressionum*, seu quantitates pressionibus proportionales, &c. Quod patet ut in demonstratione Prop. XXI

(r) * *Ex natura hyperbolæ*, per Theor. IV. de Hyperbola.

argumento est $\frac{\text{B I} \times \text{u i}}{\text{S B}}$ æquale B b, &c. (s) Sunt autem A a, B b, C c, &c. continuè proportionales, et propterea differentiis suis A a — B b, B b — C c, &c. proportionales; ideóque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula t p, u q, &c. ut et summis differentiarum A a — C c vel A a — D d summæ rectangulorum t p + u q vel t p + u q + w r. Sunto ejusmodi termini quàm plurimi, et summa omnium differentiarum, puta A a — F f, erit summæ omnium rectangulorum, puta z t h n, proportionalis. Augeatur numerus terminorum et minuantur distantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, (t) et rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ z t h n, ideóque huic areæ proportionalis est differentia A a — F f. (u) Sumantur jam distantiæ quælibet, puta S A, S D, S F, in progressione musicâ, et differentiæ A a — D d, D d — F f erunt æquales; et propterea differentiis hisce proportionales areæ t h l x, x l n z æquales erunt inter se, et densitates S t, S x, S z, id est, A H, D L, F N, (x) continuè proportionales. Q. e. d.




*Corol.* Hinc si dentur fluidi densitates duæ quævis, puta A H et B I, dabitur area t h i u, harum differentiæ t u respondens; et inde invenietur densitas F N, in altitudine quâcunque S F, sumendo aream t h n z ad aream illam datam t h i u ut est differentia A a — F f (y) ad differentiam A a — B b.

(s) *Sunt autem A a, B b, C c, &c. continuè proportionales.* Nam (per Hyp.) S A, S B, S C sunt continuè proportionales, et (per Theor. IV. de Hyp.) A a, B b, C c sunt reciprocè ut S A, S B, S C, ideóque etiam continuè proportionales.

(t) * *Et rectangula evadent æqualia areæ hyperbolicæ z t h n*, per Lemma III. Lib. I.

(u) * *Sumantur jam* distantiæ quælibet, puta S A, S D, S F in progressione musicâ, et earum reciprocæ A a, D d, F f erunt in progressione arithmetica, ideóque differentiæ A a — D d, D d — F f æquales.

(x) * *Continuè proportionales.* (379. Lib. I.)

(y) 176. * *Ad differentiam A a — B b.* Quoniam verò area t h i u est ad aream t h n z ut logarithmus lineæ S t vel A H ad logarithmum lineæ S z seu F N (379 et 380 Lib. I), densitas F N per tabulas logarithmorum inveniri poterit. Et vice versâ, datâ densitate F N invenietur altitudo S F: nam per Prop. superiorem dabitur A a — F f, et inde dabitur F f, unde invenietur $\text{F S} = \frac{\text{S A} \times \text{A a}}{\text{F f}}$ (per Theor. IV. de Hyp.). Quia verò fluidi elasticitas, cæteris paribus, vi comprimenti, ideóque densitati (per Hyp.) proportionalis est, patet per hoc Corollarium ex datis altitudinibus inveniri posse elasticitates, et vice versâ.

*Scholium.*

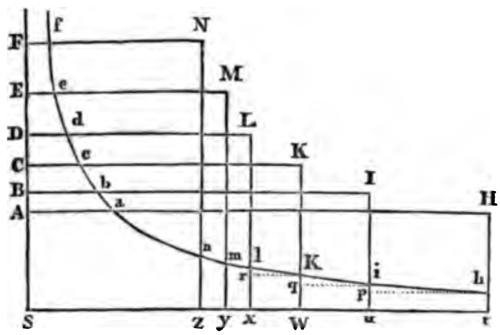
(*) Simili argumentatione probari potest, quòd si gravitas particularum fluidi diminuatur in triplicatâ ratione distantiarum a centro, et quadrato-

(*) 177. * *Simili argumentatione probari potest*, &c. Sit vis centripeta particularum fluidi reciprocè ut distantiæ dignitas, cujus index est n; designet S centrum, et S A, S B, S C, S D, S E distantias in progressione geometricâ. Erigantur perpendicula A H, B I, C K, &c. quæ sint ut fluidi densitates in locis A, B, C, D, E, &c. Et ipsius gravitates specificæ in iisdem locis erunt $\frac{AH}{SA^n}$, $\frac{BI}{SB^n}$, $\frac{CK}{SC^n}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari primam ab A ad B, secundam a B ad C, tertiam a C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines A B, B C, C D, D E, &c. vel quod perinde est, in distantias S A, S B, S C, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes pressionum $\frac{AH}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI}{SB^{n-1}}$, $\frac{CK}{SC^{n-1}}$, &c. Quare cùm densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum A H — B I, B I — C K, &c. erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI}{SB^{n-1}}$, $\frac{CK}{SC^{n-1}}$, &c. fiat eadem constructio, quæ supra in Prop. XXII., et densitatum differentiæ t v, u w, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI}{SB^{n-1}}$, &c. et rectangula t v $\times$ t h, u w $\times$ u i, &c., seu t p, u q, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI \times ui}{SB^{n-1}}$, &c. id est, ut $Aa^{n-1}$, $Bb^{n-1}$, &c. Est enim (per Theor. IV. de Hyp.) A H $\times$ t h æquale S A $\times$ A a, et A a reciprocè ut S A, seu directè ut $\frac{1}{SA}$, ideóque $\frac{AH \times th}{SA^{n-1}}$ ut $SA \times Aa \times Aa^{n-1}$, sive ut $Aa^{n-1}$ cum sit $SA \times Aa = 1$, et simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB^{n-1}}$ ut $Bb^{n-1}$, &c. sunt autem A a, B b, C c, &c. ideóque $Aa^{n-1}$, $Bb^{n-1}$, $Cc^{n-1}$, &c. continuè proportionales, et propterea differentiis suis $Aa^{n-1} - Bb^{n-1}$, $Bb^{n-1} - Cc^{n-1}$, &c. proportionales, ideóque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula t p, u q, &c. ut et summis differentiarum $Aa^{n-1} - Cc^{n-1}$, vel $Aa^{n-1} - Dd^{n-1}$ summæ rectangulorum t p + u q, vel t p + u q + w r. Sunto ejusmodi termini quàm plurimi, et summa omnium differentiarum; puta $Aa^{n-1} - Ff^{n-1}$, erit summæ omnium rectangulorum, puta z t h n, proportionalis. Augeatur numerus terminorum et minuantur distantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, et rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ z t h n, ideóque huic areæ proportionalis est differentia $Aa^{n-1} - Ff^{n-1}$.

Sumantur jam distantiarum quarumlibet, puta S A, S D, S F dignitates $SA^{n-1}$, $SD^{n-1}$, $SF^{n-1}$ in progressione musicâ, ideóque earum reciprocæ $\frac{1}{SA^{n-1}}$, $\frac{1}{SD^{n-1}}$, $\frac{1}{SF^{n-1}}$ seu $Aa^{n-1}$, $Dd^{n-1}$, $Ff^{n-1}$ in progressione arithmeticâ, et differentiæ $Aa^{n-1} - Dd^{n-1}$, $Dd^{n-1} - Ff^{n-1}$ erunt æquales; et propterea differentiis hisce proportionales areæ t h l x, x l n z æquales erunt inter se, et densitates S t, S x, S z, id est, A H, D L, F N continuè proportionales. Quare si gravitas particularum fluidi diminuatur in ratione quâcumque multiplicatâ distantiarum, cujus exponens sit n, et dignitatum $SA^{n-1}$, $SB^{n-1}$, $SC^{n-1}$, &c. reciproca (nempe $\frac{SA^n}{SA^{n-1}}$, $\frac{SA^n}{SB^{n-1}}$, $\frac{SA^n}{SC^{n-1}}$, &c. in quibus S A data est) sumantur in progressione arithmeticâ; densitates A H, B I, C K, &c. erunt in progressione geometricâ.

Si itaque loco n scribantur numeri 3, 4, 5, 6, &c. in infinitum; et rursus scribantur o, — 1, — 2, — 3, &c. in infinitum, patet veritas scholii in hypothesi densitatis vi comprimenti proportionalis. Quando autem n = o, seu quando gravitas particularum fluidi in omnibus distantiis eadem est. est $\frac{SA^n}{SA^{n-1}} = SA$, $\frac{SA^n}{SB^{n-1}} = SB$, ideóque si distantiæ sumantur in progressione arithmeticâ, densitates erunt in progressione geometricâ, ideóque distantiæ sunt ut densitatum logarithmi, quia crescentibus distantiis in progressione arithmeticâ, decrescunt densitates in progressione geometricâ. Quia verò *per experimenta constat, quod densitas aëris*, cæteris paribus ac potissimum manente eodem caloris gradu, *sit ut vis comprimens vel accuratè vel saltem quam proximè* in aëre quem experimentis possumus subjicere, vis autem aërem inferiorem comprimens, cæteris etiam paribus, æqualis sit ponderi aëris totius incumbentis, ideóque proportionalis altitudini mercurii in barometro, et præterea particularum aëris gravitas, in minoribus saltem a telluris superficie distantiis, constans censeri possit, patet, quod, cæteris paribus, aëris densitatem, ad hujusmodi distantias minores, metiri possimus per logarithmos. Sed de his plura videre est in Elementis Aërometriæ clar. Wolfii, in Libro II. Phoronomiæ, et in sectione 10. Hydrodynamicæ claris. Danielis Bernoulli.

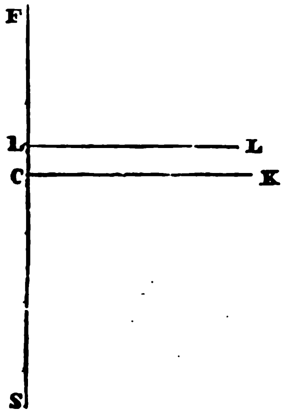
rum distantiarum S A, S B, S C, &c. reciproca (nempe $\frac{S\,A\ cub.}{S\,A\,q}$, $\frac{S\,A\ cub.}{S\,B\,q}$, $\frac{S\,A\ cub.}{S\,C\,q}$) sumantur in progressione arithmeticâ; densitates A H, B I, C K, &c. erunt in progressione geometricâ. Et si gravitas diminuatur in quadruplicatâ ratione distantiarum, et cuborum distantiarum reciproca (puta $\frac{S\,A\,q\,q}{S\,A\ cub.}$, $\frac{S\,A\,q\,q}{S\,B\ cub.}$, $\frac{S\,A\,q\,q}{S\,C\ cub.}$, &c.) sumantur in progressione arithmeticâ; densitates A H, B I, C K, &c. erunt in progressione geometricâ. Et sic in infinitum.




Rursus si gravitas particularum fluidi in omnibus distantiis eadem sit, et distantiæ sint in progressione arithmeticâ densitates erunt in progressione geometricâ, uti vir claris. Edmundus Halleius invenit. Si gravitas sit ut distantia, et quadrata distantiarum sint in progressione arithmeticâ, densitates erunt in progressione geometricâ. Et sic in infinitum. Hæc ita se habent ubi fluidi compressione condensati densitas est ut vis compressionis, vel, quod perinde est, spatium a fluido occupatum reciprocè ut hæc vis. Fingi possunt aliæ condensationis leges, ut quòd cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu triplicata ratio vis eadem cum quadruplicatâ ratione densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ a centro, densitas erit reciprocè ut cubus distantiæ. Fingatur quòd cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, et si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ, densitas erit reciprocè in sesquiplicatâ ratione distantiæ. Fingatur quòd vis comprimens sit in duplicatâ ratione densitatis, et gravitas reciprocè in ratione duplicatâ distantiæ, et densitas erit reciprocè ut distantia. ([a]) Casus omnes percurrere longum esset. Cæterùm per experimenta constat quòd densitas aëris sit ut vis comprimens vel accuratè, vel saltem quàm proximè: et propterea densitas aëris in atmosphærâ Terræ est ut pondus aëris totius incumbentis, id est, ut altitudo mercurii in barometro.

([a]) 178. * *Casus omnes percurrere longum esset*; satius erit generalem formulam tradere, ex quâ singuli casus pro lubitu eruantur. Iisdem igitur, quæ supra, positis, sit distantia varia-

bilis $SC = x$, altitudo $CD = dx$, densitas $CK = y$, vis tota comprimens in loco $C = v$, vis gravitatis ibidem $= g$; et erit gravitas specifica in eodem loco ut $gy$ (174), et hæc ducta




in altitudinem evanescentem C D seu $dx$ conficient momentum pressionis $g y dx = -dv$. Sumitur autem fluxio $dv$ negativè, quod crescente distantia x, pondus incumbens v decrescat.

Sit gravitas g ut $\frac{1}{x^m}$, densitas y ut vis comprimentis dignitas $v^n$, ideóque $y^{\frac{1}{n}}$ ut v, et sumptis fluxionibus $\frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} dy$ ut $dv$. Loco g et $dv$ substituantur hi valores in æquatione $g y dx = -dv$, et fiet $\frac{y dx}{x^m} = -\frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} dy$ seu $-\frac{dx}{x^m} = \frac{1}{n} y^{\frac{1-2n}{n}} dy$. His verò æquationibus non æqualitates, sed proportiones tantum exponimus, et ideò coëfficientes datas negligimus.

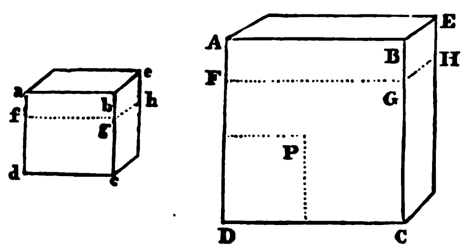
Si in ultimâ æquatione ponatur $n = 1$, id est, densitas vi comprimenti proportionalis, erit $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^m}$. Sumantur quantitates $\frac{1}{x^{m-1}}$ in progressione arithmeticâ; et earum fluxiones, seu differentiæ nascentes $-\frac{(m-1)dx}{x^m}$, ideóque et $\frac{-dx}{x^m}$ constantes erunt, et propterea quantitates $\frac{dy}{y}$ etiam datæ; ac proinde densitates y suis differentiis $dy$ proportionales, erunt continuè proportionales, (per Lem. II. Lib. II.). Si in eadem hypothesi ponatur $m = 1$, fit $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$; unde si capiantur quantitates $\frac{dx}{x}$ constantes, seu distantiæ x in progressione geometricâ, erunt etiam quantitates $\frac{dy}{y}$ constantes, et ideò densitates y in progressione geometricâ. Prorsus ut in Prop. XXI., XXII. et initio scholii hujus demonstratum est. Sumptis fluentibus, æquatio $\frac{1}{n} y^{\frac{1-2n}{n}} dy = -\frac{dx}{x^m}$ hanc abit $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = -\frac{1}{m-1} x^{1-m} + Q$. const. in quâ non potest esse $m = 1$, nec $n = 1$, neque $n = o$, ut patet. Ut autem determinetur valor constantis Q, primum definienda est altitudo S F, ubi densitas y evanescit. Nam si altitudo illa finita est et dicatur $= a$, positâ $y = o$, habebitur $Q = \frac{-1}{m-1} a^{1-m}$, et hinc $\frac{1}{1-n} \times y^{\frac{1-n}{n}} = -\frac{x^{1-m} - a^{1-m}}{m-1} = \frac{a^{1-m} - x^{1-m}}{m-1}$; in qua æquatione debet esse $\frac{1-n}{n}$ numerus positivus, seu n numerus positivus unitate minor, ut crescentibus distantiis x, decrescant densitates y, et contra. Si altitudo S F ad quam densitas y evanescit, infinita supponatur, erit constans $Q = o$, ac proinde æquatio $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{m-1} x^{1-m}$. Nam si in æquatione $\frac{1}{1-n} \times y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{x^{1-m} - a^{1-m}}{m-1}$, ponatur y nulla et x infinita, quantitas constans a erit infinita, contra hypothesim.

Jam vero si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ, id est si $m = 2$, æquatio $\frac{1}{1-n} \times y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{m-1} x^{1-m}$ in hanc migrat $\frac{1}{1-n} \times y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{x}$, unde est y ut $x^{\frac{1}{1-n}}$ reciprocè. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu $y^4$ ut $v^3$, ideóque y ut $v^{\frac{3}{4}}$, et hinc $n = \frac{3}{4}$; et erit $x^{\frac{1}{1-n}} = x^3$, ac proinde densitas y ut $x^3$ reciprocè, seu densitas, reciprocè ut cubus distantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, hoc est, $y^5$ ut $v^3$, adeóque y ut $v^{\frac{3}{5}}$, et hinc $n = \frac{3}{5}$; et erit y ut $x^{\frac{3}{2}}$ reciprocè, id est, densitas reciprocè in sesquiplicatâ ratione distantiæ. Fingatur quod vis comprimens sit in duplicatâ ratione densitatis; seu y ut $v^{\frac{1}{2}}$; et hinc erit $n = \frac{1}{2}$, ac proinde y ut x reciprocè, sive densitas est reciprocè ut distantia. Quæ Newtonus in scholio dixerat. Vide Monumenta Academiæ Regiæ Scientiarum anni 1716, ubi hanc materiam tractat Varignonius, quem hic sumus sequuti.

## PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVIII.

*Si fluidi ex particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciprocè proportionales distantiis centrorum suorum. Et vice versâ, particulæ viribus quæ sunt reciprocè proportionales distantiis centrorum suorum se mutuo fugientes componunt fluidum elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis.*

Includi intelligatur fluidum in spatio cubico A C E, dein compressione redigi in spatium cubicum minus a c e; et particularum, similem situm inter se in utroque spatio obtinentium, (b) distantiæ erunt ut cuborum latera A B, a b; (c) et mediorum densitates reciprocè ut spatia continentia A B cub. et a b cub. In cubi majoris latere plano A B C D capiatur quadratum D P æquale lateri plano cubi minoris d b; et ex hypothesi, pressio, quâ quadratum D P urget fluidum inclusum, erit ad pressionem, quâ illud quadratum d b urget fluidum inclusum, ut medii densitates ad invicem, hoc est, ut a b cub. ad A B cub.




Sed pressio, quâ quadratum D B urget fluidum inclusum, est ad pressionem, quâ quadratum D P urget idem fluidum, ut quadratum D B ad quadratum D P, hoc est, ut A B quad. ad a b quad. Ergo, ex æquo, pressio quâ quadratum D B urget fluidum, est ad pressionem quâ quadratum d b urget fluidum, ut a b ad A B. Planis F G H, f g h, per media cuborum ductis, distinguatur fluidum in duas partes, (d) et hæ se mutuo prement iisdem viribus, quibus premuntur a planis A C, a c, hoc est, in proportione a b ad A B: ideóque vires centrifugæ, quibus hæ pressiones sustinentur, sunt in eâdem ratione. Ob eundem particularum numerum similemque situm in utroque cubo, vires quas particulæ omnes secundum plana F G H, f g h exercent in omnes, sunt ut vires quas singulæ exer-

(b) * *Distantiæ erunt ut cuborum latera A B, a b*, per Lemma V. Lib. I.

(c) * *Et mediorum densitates, ut*, &c. ob datam in utroque spatio fluidi massam (2. Lib. I.).

(d) * *Et hæ se mutuo prement iisdem viribus*, &c. Pressiones enim in unoquoque spatio sunt ubique æquales; nam cùm fluidum uniforme supponatur, si pressio minor esset in uno loco quàm in alio, statim cederet fluidum magis pressum, atque ita pressio ad æqualitatem restitueretur, ut in Casu 6. Prop. XIX.

cent in singulas. Ergo vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum F G H in cubo majore, sunt ad vires, quas singulæ exercent, in singulas secundum planum f g h in cubo minore, ut a b ad A B, hoc est, reciprocè ut distantiæ particularum ad invicem. Q. e. d.

Et vice versâ, si vires particularum singularum sunt reciprocè ut distantiæ, id est, reciprocè ut cuborum latera A B, a b; summæ virium erunt in eâdem ratione, et pressiones laterum D B, d b ut summæ virium; et pressio quadrati D P ad pressionem lateris D B ut a b quad. ad A B quad. Et, ex æquo, pressio quadrati D P ad pressionem lateris d b ut a b cub. ad A B cub. id est, vis compressionis ad vim compressionis ut densitas ad densitatem. Q. e. d.

*Scholium.*

( ) Simili argumento, si particularum vires centrifugæ sint reciprocè in duplicatâ ratione distantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata densitatum. Si vires centrifugæ sint reciprocè in triplicatâ vel quadruplicatâ ratione distantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi densitatum. Et universaliter, si D ponatur pro distantiâ, et E pro densitate fluidi compressi, et vires centrifugæ sint reciprocè ut distantiæ dignitas quælibet $D^n$, cujus index est numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis $E^{n+2}$, cujus index est numerus n + 2: et contra. Intelligenda vero sunt hæc omnia de particularum viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longè ultra diffunduntur

(*) * *Simili argumento*, &c. Sunto D et d particularum distantiæ in spatiis cubicis A C E et a c e quæ sunt ut A B et a b, earumdem vires centrifugæ ut $D^n$ et $d^n$ reciprocè, fluidi densitates E et e, et vires comprimentes erunt ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ et $e^{\frac{n+2}{3}}$.

Nam cùm summæ virium quas omnes simul particulæ exercent in latera D B, d b, sint ut singularum particularum vires erunt istæ summæ virium ut $D^n$ et $d^n$ reciprocè, seu ut $ab^n$ et $AB^n$ directè; et pressio quadrati D P ad pressionem quadrati D B ut $ab^2$ ad $AB^2$; unde ex æquo pressio quadrati D P ad pressionem quadrati d b, hoc est, vis comprimens in spatio A C E ad vim comprimentem in spatio a c e, ut $ab^{n+2}$ ad $AB^{n+2}$. Sunt autem densitates, sive est E ad e, ut $ab^3$ ad $AB^3$, et ideò $E^{\frac{n+2}{3}}$ ad $e^{\frac{n+2}{3}}$ ut $ab^{n+2}$ ad $AB^{n+2}$. Quare vires comprimentes sunt ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ et $e^{\frac{n+2}{3}}$. Q. e. d.

Et vice versâ, si vires comprimentes sunt ut densitatum dignitates $E^{\frac{n+2}{3}}$, $e^{\frac{n+2}{3}}$, seu ut $ab^{n+2}$, $AB^{n+2}$; erit pressio quadrati D P ad pressionem quadrati d b in eâdem ratione, et pressio quadrati D B est ad pressionem quadrati D P, ut $AB^2$ ad $ab^2$; et, ex æquo, pressio quadrati D B ad pressionem quadrati d b, ut $ab^n$ ad $AB^n$, seu ut $d^n$ ad $D^n$. Sunt autem vires particularum singularum ut summæ virium, hoc est, ut pressiones laterum D B, d b; quare vires particularum centrifugæ sunt reciprocè ut distantiarum dignitates $D^n$, $d^n$. Q. e. d.

Jam si loco n scribantur numeri 2, 3, &c., patet veritas eorum quæ initio scholii dixit Newtonus.

Exemplum habemus in corporibus magneticis. Horum virtus attractiva terminatur ferè in sui generis corporibus sibi proximis. Magnetis virtus per interpositam laminam ferri contrahitur, et in laminâ ferè terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a magnete quam a laminâ trahuntur. Ad eundem modum si particulæ fugant alias suis generis particulas sibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujusmodi particulis componentur fluida de quibus actum est in hâc Propositione. Quod si particulæ cujusque virtus in infinitum propagetur, (f) opus erit vi majori ad æqualem condensationem majoris quantitatis fluidi. An vero fluida elastica ex particulis se mutuo fugantibus constent, quæstio physica est. Nos proprietatem fluidorum ex ejusmodi particulis constantium mathematicè demonstravimus, ut philosophis ansam præbeamus quæstionem illam tractandi.

(f) * *Opus erit vi majori*, &c. Non enim solum vincenda erit per compressionem vis centrifuga particularum proximarum, sed et remotiorum vis erit superanda quæ (ex Hyp.) in infinitum propagatur.

## SECTIO VI.

*De motu et resistentiâ corporum funependulorum.*

### (g) PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

*Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum a centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione compositâ ex ratione ponderum et ratione duplicatâ temporum oscillationum in vacuo.*

Nam velocitas, quam data vis in datâ materiâ, dato tempore generare potest, est ut vis et tempus directè, et materia inversè. Quo major est vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus Legem secundam manifestum est. (h) Jam verò si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut pondera: ideóque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, et arcus illi dividantur in partes æquales; (i) cùm tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes corres-

(g) * *Propositio XXIV.* In hâc Propositione et ejus Corollariis supponitur corpora funependula, quæ comparantur, in cycloidibus aut saltem in exiguis magni circuli arcubus oscillari. * Pondera autem corporum hic duplici de causâ a materiâ ipsorum distinguuntur; primo, quod nondum assumi possit gravitatem agere secundum rationem massarum, cum id ipsum ex isto Theoremate postea deducatur, Cor. 7.; et secundo, in diversis locis gravitas diversa esse potest (ut quidem ex experimentis constat) ideóque corporum duorum in diversis iis locis spectatorum ratio materiæ eadem manebit, non verò ratio ponderum.

(h) *Jam verò si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut pondera.*

* Nam si pendula ejusdem sint longitudinis, cycloides plane similes et æquales describent: in unaquâque autem cycloide, vires quibus corpora in locis quibusvis D, *(vid. fig. pag. seq.)* vel d accelerantur, sunt ad totum singuli corporis pondus in locis altissimis, ut arcus cycloidis inter loca proposita D, d et puncta infima C, c, ad totas semi-cycloides (Cor. Prop. LII. Lib. I.) Ergo si semi-cycloides sint æquales et loca D et d a perpendiculo æqualiter distent, arcus D C et d c erunt æquales, ideóque vis quâ corpus acceleratur in primâ cycloide in puncto D, erit ad totum ejus corporis pondus, ut vis quâ corpus acceleratur in alterâ cycloide in puncto d, ad totum ejus corporis pondus. Unde vicissim, vis quâ acceleratur primum corpus in puncto D, est ad vim quâ alterum acceleratur in puncto d, ut totum prioris corporis pondus, ad pondus alterius corporis, ideóque *si pendula sint ejusdem longitudinis vires motrices*, &c. Q. e. d.

(i) *Cum tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes* (æquales) *correspondentes sint ut tempora oscillationum totarum.*

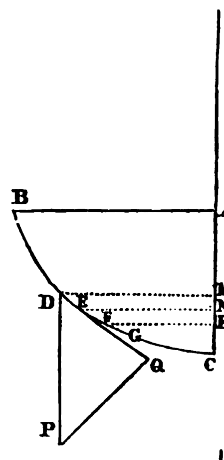
* Sint arcus D C, d c æquales, secenturque in partes æquales infinitè parvas D E, E F, &c.; d e, e f, &c., ex punctis D, E, F et d, e, f, ducantur perpendiculares ad axem, D M, E N, F R; D m, e n, f r; liquet lineolas M N et m n, M R et m r ex hypothesi fore æquales; ex naturâ autem gravitatis, velocitas acquisita in E erit ad velocitatem acquisitam in F ut radix altitudinis M N ad radicem M R, et pariter velocitas acquisita in e, erit ad velocitatem acquisitam in f ut $\sqrt{m\,n}$ ad $\sqrt{m\,r}$, cum ergo $\sqrt{M\,N} = \sqrt{m\,n}$ et $\sqrt{M\,R} = \sqrt{m\,r}$ velocitas acquisita in E est ad velocitatem acquisitam in F, ut velocitas acquisita in e est ad velocitatem acquisitam in f, et vicissim velocitas acquisita in E. est ad velocitatem acquisitam in e;

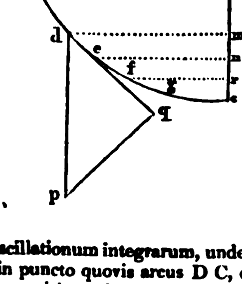
pondentes sint ut tempora oscillationum totarum, (†) erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices et tota oscillationum tempora directè et quantitates materiæ reciprocè: ideóque quantitates materiæ ut vires et oscillationum tempora directè et velocitates reciprocè. (§) Sed velocitates reciprocè sunt ut tempora, atque ideò tempora directè et velocitates reciprocè sunt ut quadrata tem-

ut velocitas acquisita in F est ad velocitatem acquisitam in f. Sed quoniam arcus E F et e f F G et f g sunt infinite parvi et æquales, uniformiter describi censendi sunt, et tempora quibus describuntur erunt in ratione reciprocâ velocitatum, ideóque tempus quo describitur E F est ad tempus quo describitur e f, ut velocitas in e ad velocitatem in E, et tempus quo describitur F G est ad tempus quo describitur f g, ut velocitas in f ad velocitatem in F, &c. sed rationes velocitatum in E et e, in F et f, &c. sunt semper æquales inter se, ergo et rationes temporum quæ istarum sunt inversæ sunt æquales inter se; ergo tempora quibus singulæ partes arcus D C describuntur, sunt ad tempora quibus correspondentes partes arcus d c describuntur, in eâdem ratione, ergo omnes antecedentes et omnes consequentes summando, omnia simul tempora quibus percurruntur omnes partes arcus D C, hoc est, totum tempus oscillationis per D C, est ad omnia tempora quibus partes arcus d c percurruntur, hoc est ad totum tempus oscillationis per d c ut tempus unum quodam pars arcus D C percurritur, est ad tempus quo pars correspondens arcus d c percurritur. Q. e. d.

(†) *Erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices et tota oscillationum tempora directè et quantitates materiæ reciprocè.* * Ex demonstratione notæ superioris liquet velocitates in correspondentibus partibus esse omnes in eâdem ratione, ideóque ut velocitas acquisita in E ad velocitatem acquisitam in e, sed cùm arcus D E et d e infinitè parvi supponantur, censendum est, vires motrices uniformiter agere, dum illi arcus percurruntur; motus ergo per eas productus crescet tam pro ratione virium ipsarum quàm pro ratione temporis quo arcus illi describuntur sive (ex demonstratis) pro ratione temporum oscillationum integrarum, motus verò ex Def. 2. Lib. I. æstimatur a Newtono ex velocitate et materiâ conjunctim, ergo velocitates productæ in *correspondentibus oscillationum partibus erunt ut vires motrices et tota oscillationum tempora directè et quantitates materiæ inversè.*

(§) * *Sed velocitates sunt reciprocè ut tempora.* * Ex demonstratis (ad notam superiorem [1]) liquet velocitatem acquisitam in E esse ad velocitatem acquisitam in e ut velocitas acquisita in puncto quovis arcus D C ad velocitatem acquisitam in puncto correspondenti arcus d c; ex eâdem demonstratione liquet velocitatem acquisitam in E esse ad velocitatem acquisitam in e, in ratione reciprocâ temporum quibus describuntur arcus E F, et e f; hæc verò tempora esse ut




tempora oscillationum integrarum, unde velocitas acquisita in puncto quovis arcus D C, est ad velocitatem acquisitam in puncto correspondenti arcus d c, in ratione reciprocâ temporum oscillationum totarum. Q. e. d.

porum, et propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices et quadrata temporum, id est, ut pondera et quadrata temporum. (††) Q. e. d.

*Corol.* 1. Ideóque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

*Corol.* 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

*Corol.* 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciprocè ut quadrata temporum.

*Corol.* 4. (k) Unde cum quadrata temporum, cæteris paribus, sint ut longitudines pendulorum; si et tempora et quantitates materiæ æqualia sunt, (l) pondera erunt ut longitudines pendulorum.

(††) *Quod erat demonstrandum.* * In demonstratione probatum est quod si describantur arcus æquales D C, d c quantitates materiæ sunt ut pondera et quadrata temporum, sumatur jam arcus b c major vel minor arcu d c sed quantitates materiæ et pondera utrinque maneant eadem quæ prius, et pariter ob isochroneitatem curvæ b d c, tempus oscillationis per b c, æquale erit tempori oscillationis per d c, ideóque quicumque sint arcus descripti si modo maneat penduli longitudo, eademque sit utrinque cyclois, pariter verum erit quod quantitates materiæ sunt ut pondera et quadrata temporum oscillationum.

(k) *Unde cum quadrata temporum cæteris paribus sint ut longitudines pendulorum.* * Fingatur L C, l c inæqualia esse, et arcus D C, d c non sumi æquales ut prius, sed similes, sive proportionales longitudinibus L C, l c, secetur D C in partes æquales inter se, et d c in partes similes, ita ut sit D E ad d e ut L C ad l c ductisque perpendiculis D M, E N, d m, e n, &c. liquet ex similitudine figurarum altitudines M N et m n, M R et m r, &c. esse etiam inter se in ratione L C ad l c, velocitates verò quibus describuntur arcus E F, F G sunt ut $\surd$ M N ad $\surd$ M R, et velocitates quibus describuntur arcus e f, f g sunt ut $\surd$ m n ad $\surd$ m r, sed quia M N et m n, M R et m r, sunt in eâdem ratione ideóque et earum radices, vicissim, velocitas quâ describitur E F est ad velocitatem quâ describitur e f, ut velocitas quâ describitur F G ad velocitatem quâ describitur f g; et sic ordine perpetuo demonstrabitur velocitates quibus successivæ partes correspondentes utriusque curvæ percurruntur fore semper in eâdem ratione; tempora verò quibus arcus similes describuntur sunt directè ut illi arcus et inversè ut velocitates; ergo cum ratio arcuum correspondentium sit semper eadem, nempe ratio L C ad l c, ut et ratio velocitatum quibus percurruntur illi arcus, singula tempuscula quibus describuntur particulæ arcus D C eamdem rationem habebunt ad tempuscula quibus correspondentes particulæ arcus d c percurruntur; ideóque tempora tota oscillationum per D C et d c erunt directè ut longitudines L C et l c, et inversè ut velocitates in punctis quibusvis correspondentibus arcuum D C et d c, putà in punctis infimis C et c, sed quia ex hypothesi quod pondera sunt æqualia et quod quantitates materiæ sunt æquales, velocitates sunt proportionales radicibus quadratis altitudinum, velocitates in punctis C et c erunt ut $\surd$ M C ad $\surd$ m c: sed ex similitudine curvarum et arcuum est m c ad M C sicut l c ad L C, ergo velocitates in punctis C et c sunt ut $\surd$ L C ad $\surd$ l c, ideóque tempora oscillationum integrarum in arcubus D C, d c erunt ut $\frac{L\,C}{\surd L\,C}$ ad $\frac{l\,c}{\surd l\,c}$, unde quadrata temporum erunt ut $\frac{L\,C^2}{L\,C}$ ad $\frac{l\,c^2}{l\,c}$ sive ut L C ad l c, hoc est ut longitudines pendulorum. Q. e. d.

(l) * *Pondera erunt ut longitudines pendulorum, et universaliter quantitas materiæ pendulæ est ut pondus et quadratum temporis directè et longitudo penduli inversè.* * Sint duo pendula A et B, quæ materiâ, pondere et oscillationum temporibus discrepent, sed æqualis sint longitudinis; ex Theoremate, erit quantitas materiæ pendulæ in A ad quantitatem materiæ pendulæ in B, ut pondus et quadratum temporis oscillationum penduli A conjunctim ad pondus et quadratum temporis oscillationum penduli B conjunctim; sit tertium pendulum C, cujus materia et pondus eadem sint cum materiâ et pondere penduli B, diversa verò sit utriusque longitudo, longitudo penduli C erit ad longitudinem penduli B (sive penduli A, perinde enim est ex hypothesi) ut quadratum temporis in pendulo C ad quadratum temporis in pendulo B, quod itaque æquale erit quadrato temporis in pendulo C, per longitudinem penduli multiplicato et per longitudinem penduli C diviso; unde quantitas materiæ in A erit ad quantitatem materiæ in B sive in C, ut pondus et quadratum temporis in A conjunctim ad pondus in B, sive in C, cum quadrato temporis in C et longitudine penduli A directè et longitudine penduli C inversè: unde liquet quantitatem materiæ in A esse ad quantitatem materiæ in C, ut pondus et quadratum temporis

*Corol.* 5. (m) Et universaliter, quantitas materiæ pendulæ est ut pondus et quadratum temporis directè, et longitudo penduli inversè.

*Corol.* 6. Sed et in medio non resistente quantitas materiæ pendulæ est ut pondus comparativum et quadratum temporis directè et longitudo penduli inversè. Nam pondus comparativum est vis motrix corporis in medio quovis gravi, (n) ut supra explicui; ideóque idem præstat in tali medio non resistente atque pondus absolutum in vacuo.

*Corol.* 7. (o) Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiæ in singulis; tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, (p) ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratissimis inveni semper quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

## PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

*Corpora funependula quibus, in medio quovis, resistitur in ratione momentorum temporis, et corpora funependula quæ in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente moventur, oscillationes in cycloide eodem tempore peragunt, et arcuum partes proportionales simul describunt.*

Sit A B cycloidis arcus, quem corpus D tempore quovis in medio non resistente oscillando describit. Bisecetur idem in C, ita ut C fit infimum ejus punctum; et erit vis acceleratrix quâ corpus urgetur in loco quovis

in pendulo A directè et ejus longitudo inversè ad pondus et quadratum temporis penduli C directè et ejus longitudinem inversè. Q. e. d. *universaliter.*

Unde si et tempora et quantitates materiæ eadem sunt, pondera sunt ut longitudines pendulorum directè.

(m) * *Et universaliter.* Vide notam superiorem.

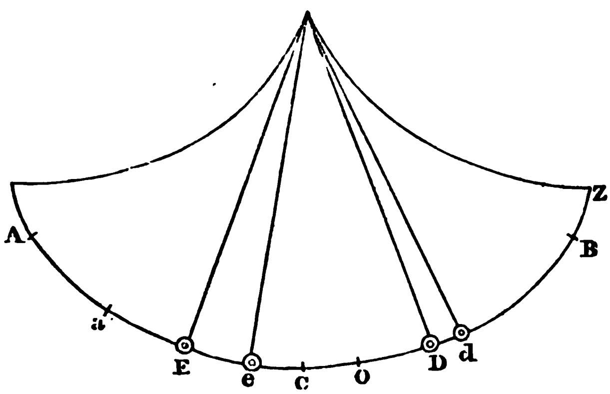
(n) * *Ut supra explicui,* in Cor. 6. et 8. Prop. XX.

(o) * *Et hinc liquet ratio,* &c. Nam ex datis pendulorum longitudinibus, oscillationum temporibus, et ponderibus corporum, datur ratio quantitatum materiæ in illis corporibus (per Cor. V.); et contra.

(p) * *Ad cognoscendam variationem gravitatis.* Ubi enim ejusdem penduli oscillationes tardiores sunt, gravitatis actio, cæteris paribus, minor est, cum in eodem pendulo pondera sint reciprocè ut quadrata temporum (per Cor. 3.). Sed de his plura ad Prop. XX. Lib. III. dicentur. Quanta autem in illis experimentis adhibenda sit diligentia, claris. D. de Mairan eâ quâ solet perspicuitate et elegantiâ exponit in Monumentis Acad. Reg. Scient. an. 1735.

179. Quia numeri oscillaticnum æqualibus temporibus a diversis pendulis absolvendarum sunt reciprocè ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt (473. Lib. I.), numeri oscillationum æqualibus temporibus peractarum erunt (per Cor. 5. Prop. hujus) in compositâ ratione ex ratione subduplicata directa ponderum et subduplicatis rationibus inversis massarum et longitudinum pendulorum; sive, quoniam pondus est ut factum ex massâ in vim gravitatis acceleratricem, erunt prædicti oscillationum numeri in ratione subduplicata directa virium gravitatis acceleratricum et ratione subduplicatâ longitudinum pendulorum inversâ; ac proinde pendulorum inæqualium, sed eâdem vi gravitatis agitatorum, numeri oscillationum eodem tempore absolvendarum sunt in reciprocâ subduplicatâ ratione longitudinum pendulorum, et numeri oscillationum in duobus pendulis æqualibus erunt in subduplicatâ ratione virium gravitatis. Hæc est regula quam ad comparandas corporum gravitates tradit Joh. Bernoulli in Actis Erudit. Lips. an. 1713.

D vel d vel E ([q]) ut longitudo arcus C D vel C d vel C E. Exponatur vis illa per eundem arcum; et cum resistentia sit ut momentum temporis, ideóque detur, exponatur eadem per datam arcus cycloidis partem C O, et sumatur arcus O d in ratione ad arcum C D quam habet arcus O B ad arcum C B: et vis quâ corpus in d urgetur in medio resistente, cum sit excessus vis C d supra resistentiam C O, exponetur per arcum O d, ideóque erit ad vim, quâ corpus D urgetur in medio non resistente in loco D, ut arcus O d ad arcum C D; et propterea etiam in loco B ut arcus




O B ad arcum C B. Proinde si corpora duo, D, d exeant de loco B, et his viribus urgeantur: cum vires sub initio sint ut arcus C B et O B; ([r]) erunt velocitates primæ et arcus primo descripti in eâdem ratione. Sunto arcus illi B D, et B d, arcus reliqui C D, O d erunt in eâdem ratione. Proinde vires, ipsis C D, O d proportionales manebunt in eâdem ratione ac sub initio, et propterea corpora pergent arcus in eâdem ratione simul describere. Igitur vires et velocitates et arcus reliqui C D, O d semper erunt ut arcus toti C B, O B, et propterea arcus illi reliqui ([s]) simul describentur. Quare corpora duo D, d simul pervenient ad loca C et O, alterum quidem in medio non resistente ad locum C, et alterum in medio resistente ad locum O. Cum autem velocitates in C et O sint ut arcus C B, O B; erunt arcus, quos corpora ulterius pergendo simul describunt, ([t]) in eâdem ratione. Sunto illi C E et O e. Vis quâ corpus

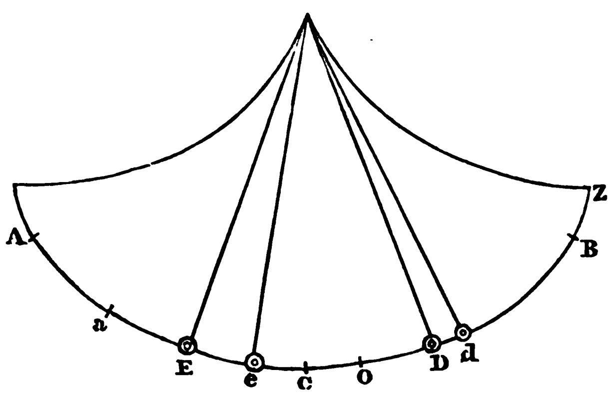
([q]) *Ut longitudo arcus*, &c. Per demonstrationem Prop. LI. et Cor. 2. Prop. LII. Lib. I.

([r]) * *Erunt velocitates primæ*, &c. Nam, dato temporis momento, velocitates genitæ sunt ut vires (13. Lib. I.) et ut spatia descripta (per Cor. 4. Lem. X. Lib. I.)

([s]) * *Simul describentur*. Quia enim est semper C B ad O B, ut C D ad O d; evanescente arcu O d, evanescet etiam arcus C D, seu punctum d cum O, et D cum C simul coincident.

([t]) * *In eâdem ratione*. Sunt enim velocitates, ut spatia dato temporis momento descripta, tam in medio resistente quam in medio non resistente (11.)

D in medio non resistente retardatur in E est ut C E, et vis quâ corpus d in medio resistente retardatur in e est ut summa vis C e et resistentiæ C O, id est ut O e; ideóque vires, quibus corpora retardantur, sunt ut arcubus C E, O e proportionales arcus C B, O B; proindeque velocitates, in datâ illâ ratione retardatæ, manent in eâdem illâ datâ ratione. Velocitates igitur et arcus iisdem descripti semper sunt ad invicem in datâ illâ ratione arcuum C B et O B; (u) et propterea si sumantur arcus toti A B, a B in eâdem ratione, corpora D, d simul describent hos arcus,




et in locis A et a motum omnem simul amittent. Isochronæ sunt igitur oscillationes totæ, et arcubus totis B A, B a proportionales sunt arcuum partes quælibet B D, B d vel B E, B e quæ simul describuntur. Q. e. d.

*Corol.* Igitur motus velocissimus in medio resistente non incidit in punctum infimum C, (x) sed reperitur in puncto illo O, quo arcus totus descriptus a B bisecatur. Et corpus subinde pergendo ad a, iisdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in descensu suo a B ad O.

(u) * *Et propterea.* Si sumatur arcus A C æqualis C B, et deinde arcus a B ad arcum A B in datâ ratione O B ad C B; corpora D et d simul describent hos arcus, et in locis A et a motum omnem simul amittent. Nam cum sit semper arcus C E ad O e ut C B ad O B, seu ut C A ad O a, ubi arcus C E æqualis evadet arcui C A, fiet quoque arcus O e æqualis arcui O a; et quia motus in medio non resistente extinguitur in A, ob C A = C B; in medio resistente extinguetur quoque in a, eo quod velocitates in locis E, e et A, a sint in datâ ratione.

(x) * *Sed reperitur in puncto illo O, quo, &c.* Nam ratio velocitatum in mediis resistente et non resistente est semper eadem in punctis correspondentibus ut in d et D, in O et C, in e et E; sed corporis in medio non resistente oscillantis velocitas maxima est in loco infimo C, et iisdem gradibus retardatur in ascensu, quibus antea accelerabatur in descensu; quare motus velocissimus in medio resistente reperitur in O, et iisdem deinde gradibus retardatur in ascensu, quibus ante accelerabatur in descensu.

## PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

*Corporum funependulorum, quibus resistitur in ratione velocitatum, oscillationes in cycloide sunt isochronæ.*

(y) Nam si corpora duo, a centris suspensionum æqualiter distantia oscillando describant arcus inæquales, et velocitates in arcuum partibus correspondentibus sint ad invicem ut arcus toti; resistentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ sint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ resistentiæ, erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa sint ut hæ differentiæ vel summæ, velocitates semper erunt ut arcus toti: igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eâdem ratione. Sed in principio motus, ut corpora incipiunt descendere et arcus illos describere, vires, cum sint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates semper erunt ut arcus toti describendi, et propterea arcus illi simul describentur. Q. e. d.

(y) * *Nam si corpora duo*, exempli causâ B et D, *a centro suspensionis æqualiter distantia, oscillando describant arcus inæquales* B a, D e, *et velocitates in arcuum partibus correspondentibus*, seu in arcuum B a, D e quadrantibus, partibus tertiis, &c., *sint ad invicem ut arcus toti* B a, D e: *resistentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus a gravitate oriundis* (secundum tangentes cycloidis agentibus) *quæ sint ut iidem arcus* B a, D e, *auferantur* dum corpus descendit, *vel addantur* dum corpus ascendit, *hæ resistentiæ; erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa*, dato temporis momento genita, *sint ut hæ differentiæ vel summæ* (18), *velocitates semper erunt ut arcus toti* B a, D e: *igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eâdem ratione. Sed in principio motûs, ubi corpora incipiunt* e locis B, D *descendere et arcus illos* B a, D e *describere*, ideóque ubi resistentia nulla est, *vires sunt arcubus illi proportionales.* Vires igitur, et velocitates, et arcus descripti, ac proinde et arcus describendi, manent semper in datâ ratione. Quare corpora duo simul perveniunt ad punctum infimum C; et eodem modo probatur quod arcus C a, C e simul describant.

*Scholium.* Newtonus in duabus Propositionibus præcedentibus ostendit cycloidem esse curvam isochronam, (quam alii tautochronam appellant,) non tantùm in medio non resistente, sed etiam in medio quod in ratione momentorum temporis, et in medio quod ratione simplici velocitatis resistit; verum quænam sit curva illa tautochrona in hypothesi resistentiæ velocitatum quadrato proportionalis non indicat. Elegantissimas hujusce Problematis solutiones dedere celeberrimi mathematici Eulerus Tom. IV. Acad. Petrop. et Tom. II. Mechanicæ, necnon clariss. Bernoullius in Monumentis Acad. Reg. Scientiarum Paris. an. 1730. Novam viam quâ curvæ tautochronæ in medio quolibet resistente possint inveniri aperuit D. Fontaine in iisdem Monumentis anni 1734.

## PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

*Si corporibus funependulis resistitur in duplicatâ ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oscillationum in medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales quam proximè.*

(a) Nam pendulis æqualibus in medio resistente describantur arcus inæquales A, B; et resistentia corporis in arcu A, erit ad resistentiam

(a) * *Nam pendulis æqualibus in medio resistente describantur arcus inæquales A et B,* * ad pleniorem hujus demonstrationis evidentiam, fingatur illos arcus in totidem partes quam minimas inter se æquales dividi, singulæ in utroque arcu erunt totis arcubus proportionales dicanturque a et b, si medium aut non resisteret aut resisteret in ratione velocitatum, velocitates initio particularum quarumvis correspondentium a et b, forent ut arcus ipsi A et B; at in medio resistente in ratione duplicatâ velocitatis paulo diversa erit hæc velocitatum ratio, sed propter exiguam rationem resistentiæ ad velocitatem, negligi poterit hæc differentia, et supponi potest velocitates manere in ratione arcuum quam proximè; quod si ita supponatur *resistentia corporis in quovis puncto arcus A erit ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus B,* sicut quadrata velocitatum in punctis illis correspondentibus eorum arcuum, id est ut *quadrata ipsorum arcuum A A et B B quam proximè.* Designetur vero velocitas initio arcus a per v A, et initio arcus b per v B. Designetur porro resistentia initio arcus a per m A A, et resistentia initio arcus b per m B B; in medio non resistente tempuscula quibus singulæ particulæ a et b describentur erunt æqualia, (per Prop. II. Lib. I.) designentur verò per T; cum ergo in medio resistente propter velocitatem imminutam longius fiat tempus in inversâ ratione velocitatum ut x excessus ille tempusculi quo arcus a describitur in medio resistente supra tempusculum quo idem arcus in medio non resistente percurritur habebiturque ex hypothesibus v A — m A A : v A = T : T + x.

Ut inveniatur ratio hujus excessus x ad excessum tempusculi quo arcus describitur in medio resistente secundum legem duplicatam velocitatis, supra tempusculum T, quo idem arcus in medio non resistente percurritur; supponatur arcum B in tali medio describi ut resistentia in punctis a arcûs A, sit ad resistentiam in punctis correspondentibus b arcûs B, sicut A est ad B, ideóque sicut velocitates initio arcuum illorum, sive cum resistentia in a sit m A A resistentia in b fingatur esse m A B, cùm ergo resistentiæ sint in ipsâ ratione velocitatum, velocitates demptis resistentiis manebunt in eâdem ratione, in ratione nempe arcuum describendorum a et b, qui ergo æqualibus temporibus describentur, sed tempus quo describitur arculus a est T + x ergo si resistentia in arcu B, sive b sit m A B ideóque velocitas sit v B — m A B tempus quo describetur arcus b erit etiam T + x.

Cum autem reverâ resistentia initio arcus b non sit m A B sed m B B, si y sit excessus tempusculi in quo b describitur in medio resistente juxta quadrata velocitatum supra tempus quo idem arcus in medio non resistente percurritur, erit tempus T + x ad tempus T + y reciproce sicut velocitas v B — m A B quæ supponebatur, ad velocitatem v B — m B B, eritque ideò v B — m B B ad v B — m A B = T + x, ad T + y, cum ergo subtractio quantitatum m B B, m A B ex velocitate v B producat excessus x et y supra tempus T, oportet ut illæ quantitates m B B, m A B, sint reciprocè ut x et y, sed m A B et m B B sunt ut A ad B, ergo A est ad B, sicut x est ad y, ideóque excessus x temporis arcus A in medio resistente in duplicatâ ratione velocitatis supra tempus in eodem arcu A in medio non resistente, est ad excessum y temporis arcus B in eodem medio supra tempus in eodem arcu B in medio non resistente, ut arcus A ad arcum B, cumque idem ratiocinium in omnibus arcubus quamminimis a et b instituti possit, summæ omnium excessuum tempusculorum in arcu A, erit ad summam omnium excessuum tempusculorum in arcu B ut A ad B. Q. e. d.

* Quod excessus x et y tempusculorum quibus describuntur arcus a et b, in medio resistente juxta rationem duplicatam velocitatum, supra tempus quo describerentur in medio non resistente sint ut A et B, ex superiori demonstratione alio modo erui potest. Nam manentibus quæ illic posueramus est.

v A — m A A : v A = T : T + x est etiam simili ratione v B — m B B : v B = T : T + y et dividendo in utraque proportione fit

v A — m A A : m A A = T : x

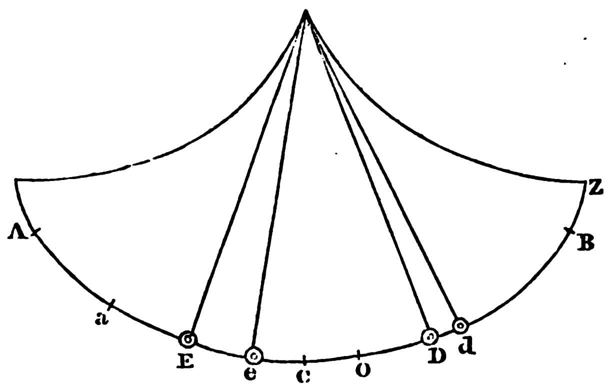
v B — m B B : m B B = T : y.

Sed ob exiguitatem resistentiæ velocitatis respectu assumi potest v A — m A A pro v A, et v B — m B B pro v B, unde est quam proximè

v A : m A A = T : x

v B : m B B = T : y et reducendo pri-

corporis in parte correspondente arcus B, in duplicatâ ratione velocitatum, id est, ut A A ad B B, quam proximè. Si resistentia in arcu B esset ad resistentiam in arcu A ut A B ad A A, tempora in arcubus A et B forent æqualia, per Propositionem superiorem. Ideóque resistentia A A in arcu A, vel A B in arcu B, efficit excessum temporis in arcu A supra




tempus in medio non resistente; et resistentia B B efficit excessum temporis in arcu B supra tempus in medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes A B et B B quam proximè, id est, ut arcus A et B. Q. e. d.

*Corol.* 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in medio resistente, in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente. Nam differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in medio non resistente, ut ([b]) differentia arcuum ad arcum minorem.

*Corol.* 2. ([c]) Oscillationes breviores sunt magis isochronæ, et brevis-

ores rationes utriusque proportionis ad minores terminos.

v : m A = T : x
v : m B = T : y et vicissim
v : T = m A : x
v : T = m B : y, unde est
m A : x = m B : y, ideò vicissim
m A : m B = x : y, sed m A : m B =
A : B, ideóque A : B = x : y. Ideóque excessus temporum in medio resistente in duplicatâ ratione velocitatum, supra tempora in medio non resistente in arcubus inæqualibus sunt ut illi arcus.

([b]) * *Differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in medio non resistente ut differentia arcuum ad arcum minorem* †.

* Tempus per arcum A est T + x, tempus per arcum minorem B, est T + y, ergo differentia temporum T + x — T — y = x — y, et excessus temporis in minore arcu supra tempus in medio non resistente est y juxta denominationes notæ superioris, sed ex Theoremate est x : y = A : B ergo dividendo x — y : y = A — B : B, hoc est *differentia temporum est ad excessum*, &c.

([c]) * *Oscillationes breviores sunt magis isochronæ et brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente quam proximè.* * Brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente quàm proximè; sit A arcus major, B minimus, inventum est (in nota *) quod erat v A — m A A : v A = T : T + x, et etiam quod erat v B — m B B : v B — m A B

simæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente, quàm proximè. Earum verò quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora sunt paulò majora, (d) propterea quòd resistentia in descensu corporis quâ tempus producitur, (e) major sit pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, quàm resistentia in ascensu subsequente quâ tempus contrahitur. Sed et tempus oscillationum tam brevium quàm longarum nonnihil produci videtur per motum medii. (f) Nam corporibus tardescentibus paulò minus resistitur, pro ratione velocitatis, et corporibus acceleratis paulò magis quàm iis quæ uniformiter progrediuntur: idque quia medium, eo quem a corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore casu magis agitatur, in posteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus quàm pro ratione velocitatis, et ex utrâque causâ tempus producitur.

## PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

*Si corpori funependulo in cycloide oscillanti resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus arcûs descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.*

Designet B C arcum descensu descriptum, C a arcum ascensu descriptum; et A a differentiam arcuum: et stantibus quæ in Propositione XXV.

$= T + x : T + y$, unde per compositionem rationum invenitur $v^2 AB - mvAAB - mvABB + m^2AABB$ (sive $\overline{v^2AB - mvA^2B} \times \overline{1 - \frac{mB}{v}}$) ad $v^2AB - mvA^2B = T : T + y$, itaque in primo termino neglecto $- \frac{mB}{v}$ (quod infinitè parvum supponitur ob exiguitatem arcus B ut et quantitatis m respectu v) fiet $v^2AB - mvAAB : v^2AB - mvAAB = T : T + y$; est ergo $T = T + y$, sive tempus in medio non resistente idem ac in medio resistente quàm proximè.

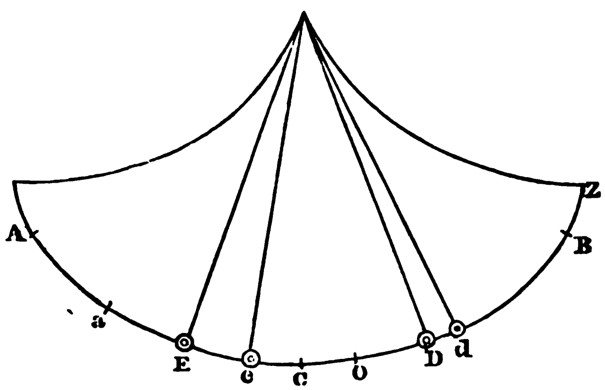
Sed oscillationes in medio non resistente sunt isochronæ, hinc ergo oscillationes breviores in medio resistente ad has quàm proxime accedentes cæteris sunt magis isochronæ. Q. e. d.

(d) * *Propterea quod resistentia in descensu, &c.* Quo major est resistentia, eò minor fit, cæteris paribus, corporis descendentis velocitas, et ideò, manente descensûs longitudine, tempus per resistentiam producitur; et contra, quò major est resistentia, eò citius extinguitur velocitas corpori insita in ascensu.

(e) * *Major sit pro ratione longitudinis.* Longitudo in descensu descripta semper major est quàm longitudo descripta in ascensu subsequente, si medium resistit; cùm longitudines illæ in medio non resistente sint æquales (92. Lib. I.).

(f) * *Nam corporibus tardescentibus,* seu quorum velocitas continuo decrescit, ut fit in corporum ascensu, paulo minus resistitur, pro ratione velocitatis; et corporibus acceleratis, seu descendentibus, paulò magis resistitur quàm iis quæ uniformiter progrediuntur. In priore enim casu, medium eo quem a corporibus accepit motu, quemque aliquandiu ob inertiam materiæ conservat, in eamdem plagam pergit cum corporibus, et ob validiorem ab initio motûs continue decrescentis acceptam impressionem magis agitatur, ac proinde magis conspirat cum corporibus motis, minoremque iis resistentiam objicit. At in secundo casu cùm motus perpetuo acceleretur, medium ex prioribus ictibus non satis velocem motum accepit, et ideò ejus celeritas novis impulsibus continuo augenda est ut possit cum corporibus motis conspirare; hincque corporibus acceleratis resistit magis quàm uniformiter progredientibus. Pendulis igitur in descensu magis

constructa et demonstrata sunt, erit vis, quâ corpus oscillans urgetur in loco quovis D, ad vim resistentiæ ut arcus C D ad arcum C O, (g) qui semissis est differentiæ illius A a. Ideóque vis, quâ corpus oscillans




urgetur in cycloidis principio seu puncto altissimo, (h) id est, vis gravitatis, erit ad resistentiam ut arcus cycloidis inter punctum illud supremum et punctum infimum C ad arcum C O; id est (si arcus duplicentur) ut cycloidis totius arcus, (i) seu dupla penduli longitudo, ad arcum A a. Q. e. d.

## PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

*Posito quod corpori in cycloide oscillanti resistitur in duplicatâ ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.*

Sit B a arcus oscillatione integrâ descriptus, sitque C infimum cycloidis punctum, et C Z semissis arcus cycloidis totius, longitudini penduli æqualis; et quæratur resistentia corporis in loco quovis D. Secetur

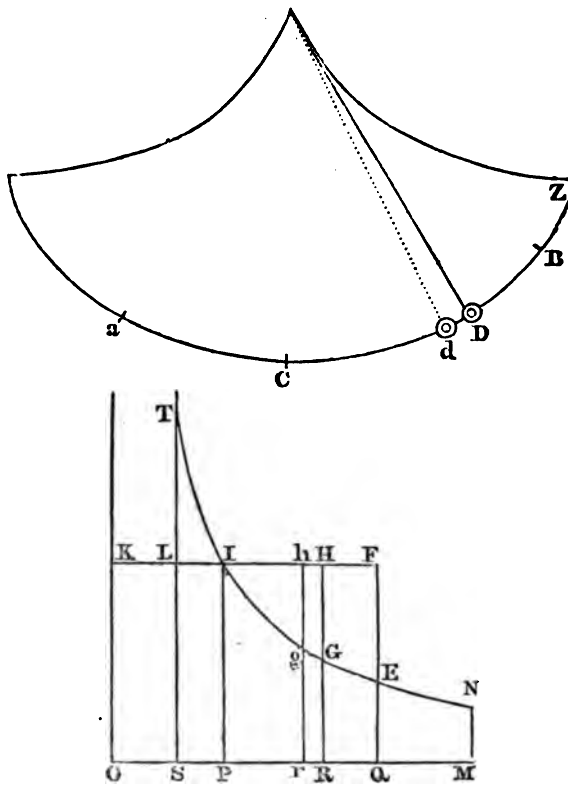
resistit medium, in ascensu minus quàm pro ratione velocitatis, et ex utrâque causâ tempus producitur. Nam quò major est resistentia in descensu, et minor in ascensu, eo magis producitur tempus, ut supra dictum est.

(g) * *Qui semissis est differentiæ illius A a.* Nam (per Hyp.) arcus C A æqualis est arcui C B, et (per Cor. Prop. XXV.) arcus O a æqualis est arcui O B; quare C A — O a, seu A a — C O = C B — O B = C O, et hinc A a = 2 C O, ac C O = $\frac{1}{2}$ A a.

(h) * *Id est, vis gravitatis.* In cycloidis principio sive puncto altissimo tangens cycloidis est in directione gravitatis, et idcirco vis in cycloide æqualis est vi gravitatis in illo puncto, ut patet ex Cor. Prop. LI. Lib. I.

(i) * *Seu dupla penduli longitudo* (462. Lib. I.).

recta infinita O Q in punctis O, S, P, Q, eâ lege, ut (si erigantur perpendicula O K, S T, P I, Q E, centroque O et asymptotis O K, O Q describatur hyperbola T I G E secans perpendicula S T, P I, Q E in T, I et E, et per punctum I agatur K F parallela asymptoto O Q occurrens asymptoto O K in K, et perpendiculis S T et Q E in L et F) fuerit area hyperbolica P I E Q ad aream hyperbolicam P I T S ut arcus B C descensu corporis descriptus ad arcum C a ascensu descriptum, et area I E F ad aream I L T ut O Q ad O S. Dein perpendiculo M N abscindatur area hyperbolica P I N M quæ sit ad aream hyperbolicam P I E Q ut arcus C Z ad arcum B C descensu descriptum. Et si perpendiculo R G abscindatur area hyperbolica P I G R, quæ sit ad aream P I E Q ut arcus quilibet C D ad arcum B C descensu toto descriptum; erit resistentia in loco D ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ} \times$ I E F — I G H ad aream P I N M.




Nam cùm vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis Z, B, D, a urgetur, (k) sint ut arcus C Z, C B, C D, C a, (l) et arcus illi sint ut areæ P I N M, P I E Q, P I G R, P I T S; exponantur tum arcus tum vires per has areas respectivè. Sit insuper D d spatium quàm minimum a corpore descendente descriptum, et exponatur idem per aream quam

(k) * *Sint ut arcus*, &c. per demonstrata in Prop. LI. et Cor. 2. Prop. LII. Lib. I.

(l) * *Et arcus illi sint ut areæ*, per constructionem.

minimam R G g r parallelis R G, r g comprehensam; et producatur r g ad h, ut sint G H h g, et R G g r, contemporanea ([m]) arearum I G H, P I G R decrementa. ([n]) Et areæ $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H incrementum G H h g — $\frac{Rr}{OQ}$ I E F, seu R r × H G — $\frac{Rr}{OQ}$ I E F, erit ad areæ P I G R decrementum R G g r, seu R r × R G, ut H G — $\frac{IEF}{OQ}$ ad R G; ideóque ut O R × H G — $\frac{OR}{OQ}$ I E F ad O R × G R ([o]) seu O P × P I, hoc est ([p]) (ob æqualia O R × H G, O R × H R — O R × G R, O R H K — O P I K, P I H R et P I G R + I G H) ut P I G R + I G H — $\frac{OR}{OQ}$ I E F ad O P I K. Igitur si area $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H dicatur Y, atque areæ P I G R decrementum R G g r detur, ([q]) erit incrementum areæ Y ut P I G R — Y.

Quod si V designet vim a gravitate oriundam, arcui describendo C D proportionalem, quâ corpus urgetur in D, et R pro resistentia ponatur; erit V — R vis tota quâ corpus urgetur in D. ([r]) Est itaque incrementum velocitatis ut V — R et particula illa temporis in quâ factum est conjunctim: ([s]) sed et velocitas ipsa est ut incrementum contemporaneum spatii descripti directè et particula eadem temporis inversè. Unde, cùm resistentia per hypothesin sit ut quadratum velocitatis, incrementum resistentiæ ([t]) (per Lem. II.) erit ut velocitas et incrementum velocitatis conjunctim, ([u]) id est, ut momentum spatii et V — R conjunctim; atque

([m]) * *Arearum I G H, P I G R decrementa.* Cum enim corpus e loco D descendit in arcu D C, decrescit area P I G R huic arcui proportionalis, et cum eà decrescit quoque area I G H.

([n]) * *Et areæ*, &c. Nam, ob datas O Q, et I E F, decrementum areæ $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H, sumptis duorum terminorum fluxionibus, invenitur æquale $\frac{Rr}{OQ}$ I E F — G H h g; et ideò, mutatis signis, ejusdem areæ incrementum est G H h g — $\frac{Rr}{OQ}$ I E F, seu, &c.

([o]) * *Seu O P × P I.* Per Theor. IV. de hyperbolâ.

([p]) * *Ob æqualia*, &c. Cùm sit H G = H R — G R, erit O R × H G = O R × H R — O R × G R; sed O R × H R æquale est rectangulo O R H K, et (per Theor. IV. de Hyp.) O R × G R æquale est rectangulo O P I K. Quare O R × H G = O R H K — O P I K = P I H R = P I G R + I G H.

([q]) * *Erit incrementum areæ Y ut P I G R — Y.* Quoniam enim (Hyp.) est $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H = Y, et (ex demonstratis) incrementum areæ $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H est ad decrementum (ex Hyp.) datum R G g r, ut P I G R + I G H — $\frac{OR}{OQ}$ I E F, seu P I G R — Y, ad datum rectangulum O P I K; manifestum est quod incrementum areæ Y sit ad P I G R — Y in datâ ratione, nimirum in ratione decrementi dati R G g r ad rectangulum datum O P I K.

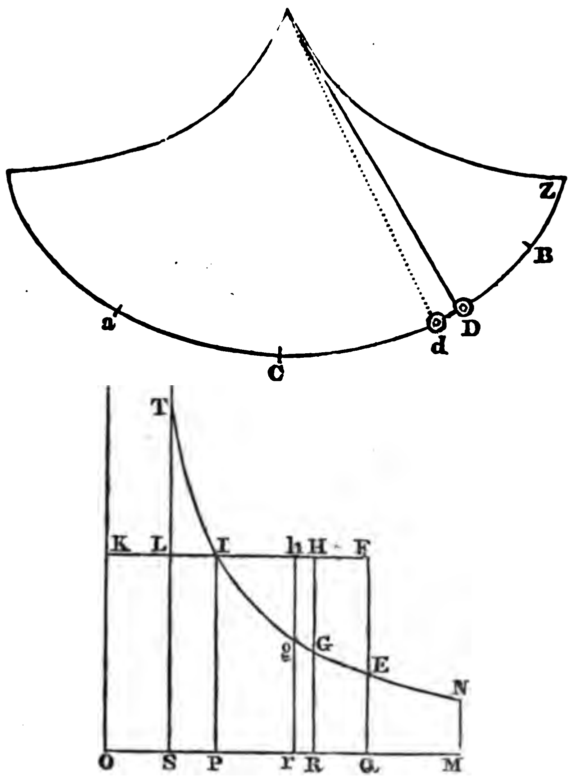
([r]) * *Est itaque incrementum velocitatis, ut*, &c. (18.).

([s]) * *Sed et velocitas ipsa est*, &c. (11.)

([t]) * *Per Lem. II.* Casu 3. idque statim apparet: nam si velocitas dicatur v, cum sit R ut v v, erit d R ut 2 v d v, seu ut v d v.

([u]) * *Id est, ut momentum spatii*, &c. Quia

ideò, si momentum spatii detur, ut V — R; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens P I G R, et resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut P I G R — Z.




Igitur areâ PIGR per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area Y in ratione P I G R — Y, et area Z ratione P I G R — Z. Et propterea si areæ Y et Z simul incipiant et sub initio æquales sint, (x) hæ per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales, et æqualibus itidem momentis subinde decrescentes simul evanescent. Et vicissim, si simul incipiunt et simul evanescunt, æqualia habebunt momenta et semper erunt æquales: id ideò quia si resistentia Z augeatur, velocitas unà cum arcu illo C a, qui in ascensu corporis describitur, diminuetur; et puncto in quo motus omnis unà cum resistentiâ cessat propius accedente ad punctum C, (y) resistentia citius evanescet quàm area Y. Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur.

(ex dem.) velocitatis incrementum est ut V — R et momentum temporis conjunctim, velocitas autem ipsa ut incrementum spatii directe et momentum temporis inversè; erit ex æquo, velocitas in suum incrementum ducta, ut V — R et incrementum spatii conjunctim, in quâ ratione est etiam incrementum resistentiæ (ex dem.).

(x) * *Hæ per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales*, &c. Cùm enim semper crescat area Y in ratione P I G R — Y, et area Z in ratione P I G R — Z; si areæ illæ Y et Z simul incipiant et initio æquales sint, erunt etiam areæ P I G R — Y et P I G R — Z sub initio æquales; et, ob datam incrementorum areæ Y et areæ Z ad P I G R — Y et P I G R — Z rationem, incrementa illa sicut et P I G R — Y ac P I G R — Z manebunt semper æqualia, uti sub initio. Quare etiam areæ Y et Z æqualibus itidem momentis subinde decrescent et simul evanescent.

(y) * *Resistentia citius evanescet quam area Y, et contrarium*, &c. Nam si area Z semper æqua-

Jam verò area Z incipit desinitque ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio motûs ubi arcus C D arcui C B æquatur et recta R G incidit in rectam Q E, et in fine motus ubi arcus C D arcui C a æquatur et R G (*) incidit in rectam S T. Et area Y seu $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H incipit desinitque ubi nulla est, ideóque ubi $\frac{OR}{OQ}$ I E F et I G H æqualia sunt: (a) hoc est (per constructionem) ubi recta R G incidit successivè in rectas Q E et S T. Proindeque areæ illæ simul incipiunt et simul evanescunt, et propterea semper sunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H æqualis est areæ Z, per quam resistentia exponitur, et propterea est ad aream P I N M per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. Q. e. d.

*Corol.* 1. Est igitur resistentia in loco infimo C ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}$ I E F (b) ad aream P I N M.

*Corol.* 2. Fit autem maxima, ubi area P I H R est ad aream I E F ut O R ad O Q. Eo enim in casu momentum ejus (nimirum P I G R — Y) (c) evadit nullum.

*Corol.* 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe

lis sit areæ Y, simul incipient simulque evanescent. Incipit autem area Y (ut infra ostendetur) ubi recta R G incidit in rectam Q E, et desinit ubi recta R G incidit in rectam S T, suntque Q et S puncta fixa per arcuum C B, C a longitudines determinata (per constr.). Quare si resistentia Z augeatur vel minuatur ita ut cesset in puncto arcûs C a infra vel supra a positum, citius vel tardius evanescet area Z quàm area Y, quia hæc non desinit nisi ubi corpus pervenit ad locum a. Resistentia igitur, seu area Z nec major nec minor esse potest quàm area Y, si simul incipiant et simul evanescant.

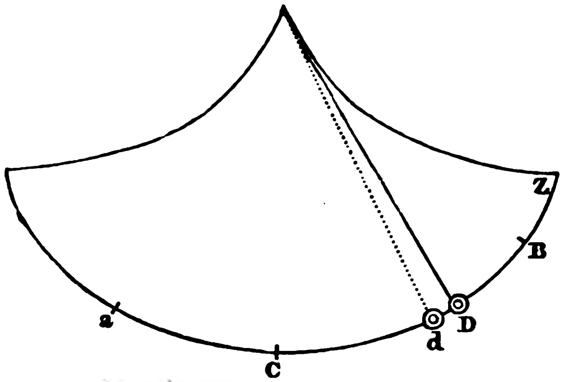
(*) * *Incidit in rectam S T.* Hæc patent per constructionem, quâ areæ P I E Q, P I G R, P I T S factæ sunt arcubus C B, C D, C a proportionales.

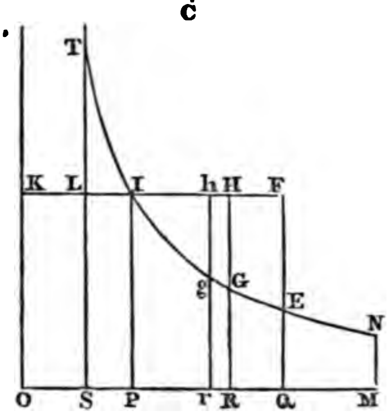
(a) * *Hoc est (per constructionem) ubi, &c.* Ubi enim Y evanescit, fit quoque $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H = o, et ideò $\frac{OR}{OQ}$ I E F = I G H; hoc autem contingit ubi fit I E F : I G H = O Q : O R, quod evenit primo ubi recta R G incidit in rectam Q E et incipit area Y. Tunc enim I E F = I G H et O Q = O R ideóque I E F : I G H = O Q : O R. Est enim $\frac{OR}{OQ}$ I E F = I G H, quando fit O R = O S et I G H = I L T: nam cùm (per constr.) sit area I E F ad aream I L T ut O Q ad O S, si ponatur O R = O S, fiet I L T = I G H, eritque area I E F ad aream I G H ut O Q ad O R, et hinc $\frac{OR}{OQ}$ I E F = I G H. Est autem O R = O S, ubi recta R G incidit in rectam S T, et area Y desinit ibidem.

(b) * *Ad aream P I N·M.* Nam evanescente arcu C D, evanescit ipsi proportionalis area P I G R, et hinc evanescit etiam area I G H, fitque O R = O P, atque proinde $\frac{OR}{OQ}$ I E F = I G H = $\frac{OP}{OQ}$ I E F.

(c) * *Evadit nullum.* Momentum areæ Y est ut P I G R — Y (ex dem.), id est, ut P I G R + I G H — $\frac{OR}{OQ}$ I E F = P I H R = $\frac{OR}{OQ}$ I E F. Quâ propter momentum areæ Y nullum fit; et ideò resistentia (cui area Y proportionalis est) maxima evadit (48), ubi est P I H R — $\frac{OR}{OQ}$ I E F = o, seu ubi P I H R = $\frac{OR}{OQ}$ I E F, ac proinde ubi area P I H R est ad aream I E F ut O R ad O Q.

quæ est in subduplicatâ ratione resistentiæ, et ipso motûs initio æquatur velocitati corporis in eâdem cycloide (d) sine omni resistentiâ oscillantis.




(d) * *Sine omni resistentiâ oscillantis.* Quoniam velocitatis quadratum in loco quovis D est ut resistentia, seu ut area Y in medio resistente; et ut $CB^2 - CD^2$ (per Prop. LII. Lib. I.) seu ut $\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2$ in medio non resistente; si velocitates illæ dicantur v, V, sintque C et E quantitates constantes, erit $vv = C \times Y$, et $VV = E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$. Et quia initio motûs, dum corpus est in B, velocitates illæ æquales sunt, ob resistentiam respectu vis a gravitate oriundæ evanescentem; erit initio motûs $C \times Y = E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$; sed initio motûs est Y, seu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH = \frac{OR}{OQ} IEF - IEF + QR \times FE = \frac{OR \times IEF - OQ \times IEF + OQ \times QR \times FE}{OQ} = \frac{QR}{OQ} \times \overline{OQ \times FE - IEF}$, coincidente nimirum GH cum EF, et QR seu HF evanescente. Et similiter initio motus est $\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2 = \overline{PIEQ + PIGR} \times \overline{PIEQ - PIGR} = \overline{2PIEQ - QR \times QE} \times \overline{QR \times QE} = 2PIEQ \times QR \times QE$, neglecto termino evanescente $QR^2 \times QE^2$. Quare erit initio motus $\frac{C \times QR}{OQ} \times \overline{OQ \times FE - IEF} = E \times QR \times QE \times 2PIEQ$, et ideò $C : E = 2PIEQ \times QE : \frac{OQ \times FE - IEF}{OQ}$; unde, cum sit semper $vv : VV = C \times Y : E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$, erit quoque $vv : VV = 2PIEQ \times QE \times \left(\frac{OR}{OQ} IEF - IGH\right) : \frac{OQ \times FE - IEF}{OQ} \times \overline{\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2}$. Innotescet igitur velocitas in medio resistente per inventam ipsius rationem ad velocitatem in medio non resistente in singulis locis.

([e]) Cæterùm ob difficilem calculum quo resistentia et velocitas per hanc Propositionem inveniendæ sunt, visum est Propositionem sequentem subjungere.

## PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

*Si recta* a B *æqualis sit cycloidis arcui quem corpus oscillando describit, et ad singula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* D K, *quæ sint ad longitudinem penduli ut resistentia corporis in arcus punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum et arcum ascensu toto subsequente descriptum ducta in arcuum eorundem semisummam, æqualis erit areæ* B K a *a perpendiculis omnibus* D K *occupatæ.*

Exponatur enim tum cycloidis arcus, oscillatione integrâ descriptus, per rectam illam sibi æqualem a B, tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem A B. Bisecetur A B in C, ([f]) et punctum C repræsentabit

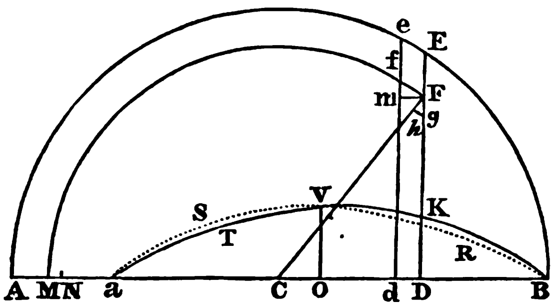
([e]) * *Cæterùm ob difficilem calculum,* &c. Sit O P = a, P I = F Q = b, O S = x, et ideò S T = $\frac{ba}{x}$, S P = L I = a − x, et L T = $\frac{ba}{x} - b$. Deinde O Q = z, et hinc Q E = $\frac{ba}{z}$, P Q = F I = z − a, et F E = $b - \frac{ba}{z}$. Et erit areæ P I E Q elementum = $\frac{ba\,dz}{z}$, areæ P I T S elementum = $-\frac{ba\,dx}{x}$; et inde area P I E Q = b a L. z + Q const.; et quia area illa evanescit ubi est P Q = z − a = o, seu ubi z = a, invenitur constans Q = − b a L. a, atque adeò area P I E Q = b a L. z − b a L. a = b a L. $\frac{z}{a}$. Simili modo reperitur area P I T S = b a L. $\frac{a}{x}$. Sit jam arcus B C ad arcum C a, ut m ad 1; et erit (per constr.) m : 1 = b a L. $\frac{z}{a}$ : b a L. $\frac{a}{x}$ = L. $\frac{z}{a}$ : L. $\frac{a}{x}$, ac proinde L. $\frac{z}{a}$ = m L. $\frac{a}{x}$ = L. $\frac{a^m}{x^m}$, atque $\frac{z}{a} = \frac{a^m}{x^m}$, et z = $\frac{a^{m+1}}{x^m}$.

Porro ex superioribus denominationibus invenitur areæ I E F elementum = $b\,dz - \frac{ba\,dz}{z}$, et inde area ipsa I E F = b z − b a L. z + Q const. quæ cùm sit o ubi F I = z − a evanescit fitque z = a, est Q = − b a + b a L. a, ideóque I E F = b a L. $\frac{a}{z}$ + b z − b a; et similiter habetur area I L T = b a L. $\frac{a}{x}$ + b x − b a. Sed (per constr.) area I E F est ad aream I L T ut O Q ad O S, seu ut z ad x: quare z : x = b a L. $\frac{a}{z}$ + b z − b a : b a L $\frac{a}{x}$ + b x − b a, et dividendo per b, ac loco z scribendo ipsius valorem $\frac{a^{m+1}}{x^m}$, fit $a^{m+1} : x^{m+1}$ = a L. $\frac{x^m}{a^m} + \frac{a^{m+1}}{x^m}$ − a : a L. $\frac{a}{x}$ + x − a; unde habetur $a^{m+2}$ L. $\frac{a}{x} + a^{m+1}x - a^{m+2}$ = $a x^{m+1}$ L. $\frac{x^m}{a^m} + a^{m+1}x - a x^{m+1}$; et inde eruitur $m x^{m+1}$ L x = $m x^{m+1}$ L a + $a^{m+1}$ L x − $x^{m+1}$ = $a^{m+1}$ L. a − $a^{m+1}$. Si itaque ex hâc æquatione per serierum regressum, vel quâcumque alia methodo, determinetur valor x per arbitrariam lineam a, et deinde per æquationem z = $\frac{a^{m+1}}{x^m}$ inveniatur valor ipsius z; Newtoniana constructio ad calculum logarithmorum revocabitur.

Scholion. Hermannus Prop. LXXIII. et LXXIV. Lib. II. Phoronomiæ geminam constructionem dedit, quâ corporis in curvâ qualibet oscillantis resistentia velocitatis quadrato proportionalis definitur, et Newtonianam pro cycloide constructionem ope logarithmicæ simpliciorem reddidit. Difficile autem non est (44) hanc Newtoni constructionem revocare ad logarithmicam per punctum N et asymptoto K O ad partes O productâ describendam.

([f]) * *Et punctum C repræsentabit infimum cycloidis punctum.* Nam cycloidis punctum in-

infimum cycloidis punctum, (g) et erit C D ut vis a gravitate oriunda, quâ corpus in D secundum tangentem cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem penduli (h) quam habet vis in D ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem C D, et vis gravitatis per longitudinem penduli, et si in D E capiatur D K in eâ ratione ad longitudinem penduli quam habet resistentia ad gravitatem, erit D K exponens resistentiæ. Centro C et intervallo C A vel C B construatur semi-circulus B E e A. Describat autem corpus tempore quàm minimo spatium D d, et erectis perpendiculis D E, d e circumferentiæ occurrentibus in E et e,




erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, descendendo a puncto B, acquireret in locis D et d. Patet hoc (per Prop. LII. Lib. I.). Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa D E, d e; sitque D F velocitas quam acquirit in D cadendo de B in medio resistente. Et si centro C et intervallo C F describatur circulus F f M occurrens rectis d e et A B in f et M, (i) erit M locus ad quem deinceps sine ulteriore resistentiâ ascenderet, et d f velocitas quam acquireret in d. Unde etiam si F g designet velocitatis momentum quod corpus D describendo spatium quam minimum D d, ex resistentiâ medii amittit; et sumatur C N æqualis C g: erit N locus ad quem corpus deinceps sine ulteriore resistentiâ ascenderet, et M N erit decrementum ascensûs ex velocitatis illius amissione oriundum. Ad d f demittatur perpendiculum F m, et velocitatis D F decrementum F g a resistentiâ D K genitum, erit ad velocitatis ejusdem incrementum f m a vi C D genitum, ut vis generans D K (k) ad

simum arcum quem corpus in medio non resistente oscillando describit in duas partes æquales dividit.

(g) * *Et erit C D ut vis a gravitate oriunda,* &c. patet per demonstr. Prop. LI. Lib. I.

(h) * *Quam habet vis in D ad vim gravitatis,* per Cor. 1. Prop. LI. et not. 462. Lib. I.

(i) * *Erit M locus ad quem,* &c. Eamdem enim velocitatem haberet corpus in D, ac si seclusâ omni resistentiâ percurrisset spatium C F — C D, et ideò (per modo demonstrata) in loco d haberet velocitatem d f, et in loco M nullam.

(k) * *Ad vim generantem C D.* Sunt enim velocitatum elementa dato temporis momento genita, ut vires generantes (13. Lib. I.).

vim generantem C D. Sed et (l) ob similia triangula F m f, F g h, F D C, est f m ad F m seu D d ut C D ad D F: et ex æquo F g ad D d ut D K ad D F. Item F h ad F g ut D F ad C F; et ex æquo perturbatè (m) F h seu M N ad D d ut D K ad C F seu C M; (n) ideóque summa omnium M N × C M æqualis erit summæ omnium D d × D K. Ad punctum mobile M erigi semper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ C M, quæ motu continuo ducatur in totam longitudinem A a; et trapezium ex illo motu descriptum sive huic æquale rectangulum A a × ½ a B (o) æquabitur summæ omnium M N × C M, ideóque summæ omnium D d × D K, id est, areæ B K V T a. Q. e. d.

*Corol.* Hinc ex lege resistentiæ et arcuum C a, C B differentia A a colligi potest proportio resistentiæ ad gravitatem quam proximè.

Nam si uniformis sit resistentia D K, figura B K T a rectangulum erit sub B a et D K; et inde rectangulum sub ½ B a et A a erit æquale rectangulo sub B a et D K, et D K æqualis erit ½ A a. Quare cùm D K sit exponens resistentiæ, et longitudo penduli exponens gravitatis, erit resistentia ad gravitatem ut ½ A a ad longitudinem penduli; omninò ut in Prop. XXVIII. demonstratum est.

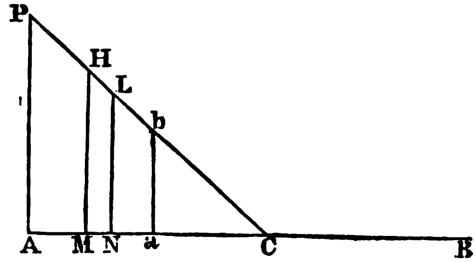
Si resistentia sit ut velocitas, figura B K T a ellipsis erit quàm proximè. Nam si corpus, in medio non resistente, oscillatione integrâ describeret longitudinem B A, velocitas in loco quovis D foret ut circuli diametro A B descripti ordinatim applicata D E. Proinde cùm B a in medio re-

(l) * *Ob similia triangula*, &c. Sunt enim anguli ad m, h, et D recti, angulus C F D duobus triangulis F D C, F h g communis, et angulus f F m æqualis angulo C F D, quia si ex angulis rectis m F D, f F C subducatur communis angulus m F C, remanebunt anguli æquales f F m, C F D. Tria igitur triangula F m f, F h g et F D C æquales angulos habent, suntque proinde similia.

(m) * *F h seu M N.* Cùm sit C M æqualis C F, et C N æqualis C g seu C h, angulo h C g evanescente, est M N = C M — C N = C F — C h = F h.

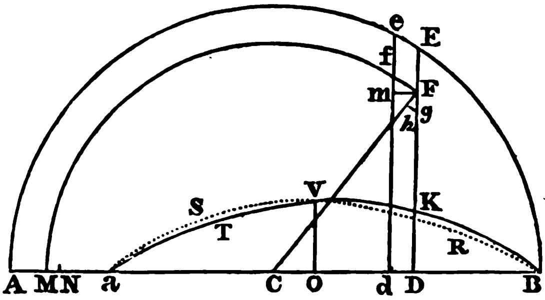
(n) * *Ideóque summa omnium M N × C M*, &c. Quoniam (per modo demonstrata) M N × C M = D d × D K, erit summa omnium M N × C M æqualis summæ omnium D d × D K, modò simul incipiant simulque desinant. Incipit autem summa omnium D d × D K in B et desinit in a, et summa omnium M N × C M incipit in A, et ideò si desinat in a, erunt summæ illæ æquales.

(o) * *Æquabitur summæ*, &c. Erigatur ad punctum A perpendiculum A P = A C, jungatur P C, et ductis per M et N ac a perpendiculis M H, N L, a b; erit semper M N × C M = M N × H M; ideóque si ordinata variabilis



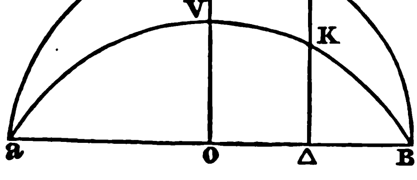

H M ducatur in totam longitudinem A a, erit trapezium A P b a æquale summæ omnium M N × C M ab A ad a; sed trapezium illud est C A P — C a b = ½ C A² — ½ C a² = ½ (C A + C a) × (C A — C a) = ½ a B × A a, ob C B = C A. Ergo, &c.

sistente, et B A in medio non resistente, (p) æqualibus circiter temporibus describantur; ideóque velocitates in singulis ipsius B a punctis, sint quam proximè ad velocitates in punctis correspondentibus longitudinis B A, ut est B a ad B A; erit velocitas in puncto D in medio resistente ut circuli vel ellipseos super diametro B a descripti ordinatim applicata;




(q) ideóque figura B K V T a ellipsis erit quàm proximè. Cùm resistentia velocitati proportionalis supponatur, sit O V exponens resistentiæ in puncto medio O; et ellipsis B R V S a, centro O, semi-axibus O B, O V descripta, figuram B K V T a, eique æquale rectangulum A a × B O, æquabit quamproximè. Est igitur A a × B O ad O V × B O (r) ut area semi-ellipseos hujus ad O V × B O: id est, A a ad O V (s) ut area semi-

(p) * 180. *Æqualibus circiter temporibus describantur.* Quia resistentia minuendo corporis velocitatem tempus producit in descensu a B ad C, illudque contrahit in ascensu a C ad a, longitudines B A in medio non resistente et B a in medio resistente, earumque longitudinum partes proportionales, æqualibus circiter temporibus describuntur. Sunt autem velocitates ut spatia eodem temporis momento descripta (11); quare velocitates in partibus longitudinum B A, B a correspondentibus sunt quàm proximè ut longitudines B A, B a, id est, in ratione datâ. Centro O et diametro A B describatur circulus B E H a, sitque B Δ in hac figurâ ad B D in figurâ textûs, ut B a ad B A, hoc est, ut velocitas in loco Δ in medio resistente ad velocitatem in loco D in medio non resistente; et ductâ ordinatâ Δ E, erit etiam, ob figurarum similitudinem Δ E ad D E ut B a ad B A, ideóque ut velocitas in medio resistente ad velocitatem in medio non resistente. Velocitas igitur in medio resistente erit semper ut ordinata variabilis Δ E.




(q) *Ideóque figura B K V T a ellipsis erit quàm proximè.* Cùm enim (ex modò demonstratis) velocitas in loco quovis Δ sit semper ut ordinata Δ E ad circulum, et (per Hyp.) resistentia Δ K in hac figurâ, vel D K in figurâ textûs, sit semper ut velocitas Δ E, erit Δ K ut Δ E; et quia Δ E² = a Δ × Δ B (ex naturâ circuli), erit etiam Δ K² ut a Δ × Δ B, et ideò figura B K V T a ellipsis, cujus centrum O, semi-axes a O, et O V, si O V exponat resistentiam in puncto medio O axis a B.

(r) * *Ut area semi-ellipseos hujus ad O V × B O.* Est enim area illa = A a × ½ a B (per Prop. hanc), et ½ a B = B O (per constr.).

(s) * *Ut area semi-circuli ad quadratum radii, &c.* Area ellipseos cujuscumque est ad rectangulum sub axibus in ratione datâ, nimirum in ratione areæ circuli ad quadratum diametri (250.

circuli ad quadratum radii, sive ut 11 ad 7 circiter: et propterea $\frac{7}{11}$ A a ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in O ad ejusdem gravitatem.

Quod si resistentia D K sit in duplicatâ ratione velocitatis, figura B K V T a (t) ferè parabola erit verticem habens V et axem O V, (u) ideóque æqualis erit rectangulo sub $\frac{2}{3}$ B a et O V quam proximè. Est igitur rectangulum sub $\frac{1}{2}$ B a et A a æquale rectangulo sub $\frac{2}{3}$ B a et O V, ideóque O V æqualis $\frac{3}{4}$ A a: et propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{3}{4}$ A a ad longitudinem penduli.

Atque has conclusiones in rebus practicis abundè satis accuratas esse censeo. Nam cùm ellipsis vel parabola B R V S a congruat cum figura B K V T a (x) in puncto medio V, hæc si ad partem alterutram B R V vel V S a excedit figuram illam, (y) deficiet

Lib. I.); circulus enim est ellipsis cujus sunt axes æquales; unde area semi-ellipseos B K V T a est ad quartam partem rectanguli sub axibus, seu ad rectangulum sub semi-axibus O V × B O, ut area semi-circuli ad quadratum radii. Sed si circuli radius sit 7, erit semi-peripheria 22 circiter, et area semi-circuli 7 × 11, ideóque areæ semi-circuli ad quadratum radii ut 11 ad 7 circiter. Est igitur A a ad O V ut 11 ad 7, et proinde $O\,V = \frac{7}{11}$ A a. Et propterea (per Prop. hanc) $\frac{7}{11}$ A a est ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in O ad ejusdem pondus.

(t) * *Ferè parabola erit.* Ordinata Δ E ad semi-circulum B E H a est semper ut velocitas in loco Δ in medio resistente, et (ex naturâ circuli) $\Delta E^2 = a\Delta \times \Delta B$, et (ex Hyp.) resistentia Δ K est ut velocitatis quadratum, seu ut $\Delta E^2$, adeóque Δ K est ut rectangulum a Δ × Δ B sive ut $\overline{OB + O\Delta} \times \overline{OB - O\Delta}$ hoc est ut $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$. * Sed in parabolâ cujus vertex foret V et axis V O differentia abscissarum foret semper ad differentiam quadratorum ordinatarum in utriusque abscissæ extremo ductarum, in datâ ratione. Jam verò si ex K ducatur in axem perpendicularis K P, est K Δ = P O et P O est differentia abscissarum V P et V O, est O Δ = P K ordinatæ in P, ideóque est $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$ differentia quadratorum ordinatarum in punctis P et O, cum ergo K D et $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$ sint in datâ ratione figura B K V T a parabola erit verticem habens V et axem O V (per Theor. I. de parab.).

(u) * *Ideóque æqualis erit rectangulo sub $\frac{2}{3}$ B a et O V quam proximè.* Nam [illegible] parabolica B K V O est $\frac{2}{3}$ B O × V O (Theor. IV. de parab.) et ipsius duplum, seu area tota B K V a est $\frac{2}{3}$ a B × O V.

(x) * *In puncto medio V.* Supponitur enim quòd O V accuratè exhibeat resistentiam in puncto medio O, quodque parabola vel ellipsis per punctum V descripta sit.

(y) * *Deficiet ab eâdem ad partem alteram.* Quia duæ ellipseos vel parabolæ partes B R V et a S V similes sunt et æquales, si resistentiæ in descensu a B ad O majores sint quàm pro ratione ordinatarum D K ad ellipsim vel parabolam, ad alteram partem minores erunt; et contra.

181. Sit resistentia in ratione sesquiplicatâ velocitatis, id est, Δ K ut $\Delta E^{\frac{3}{2}}$; et quoniam (ex naturâ circuli) $\Delta E = (BO^2 - \Delta O^2)^{\frac{1}{2}}$, et proinde $\Delta E^{\frac{3}{2}} = (BO^2 - \Delta O^2)^{\frac{3}{4}}$, erit Δ K ut $(BO^2 - \Delta O^2)^{\frac{3}{4}}$, et (in fig. textûs) D K ut $(BO^2 - DO^2)^{\frac{3}{4}}$. Dicantur B O = a, V O = b, D O = x, D K = y, et erit $b : y = a^{\frac{3}{2}} : (aa - xx)^{\frac{3}{4}}$, ideóque $y = \frac{b\,(aa - xx)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}$; et hinc areæ O V K D momentum $y\,dx = b\,dx\,\frac{(aa - xx)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}$. Quantitas $(aa - xx)^{\frac{3}{4}}$ in seriem infinitam resolvatur (551. Lib. I.), et invenietur $dx\,(aa - xx)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}}dx - \frac{3x^2dx}{4a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^4dx}{4\times 8a^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\times 5x^6dx}{4\times 8\times 12a^{\frac{9}{2}}} - \frac{3\times 5\times 9x^8dx}{4\times 8\times 12\times 16a^{\frac{13}{2}}} -$, &c. Et sumptis fluentibus $S.\,dx\,(aa - xx)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}}x - \frac{x^3}{4a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^5}{5\times 4\times 8a^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\times 5x^7}{7\times 4\times 8\times 12a^{\frac{9}{2}}} -$

ab eâdem ad partem alteram, et sic eidem æquabitur (x) quàm proximè.

## PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

*Si corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in datâ ratione; differentia inter arcum descensu descriptum et arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eâdem ratione.*

(a) Oritur enim differentia illa ex retardatione penduli per resistentiam medii, ideóque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia

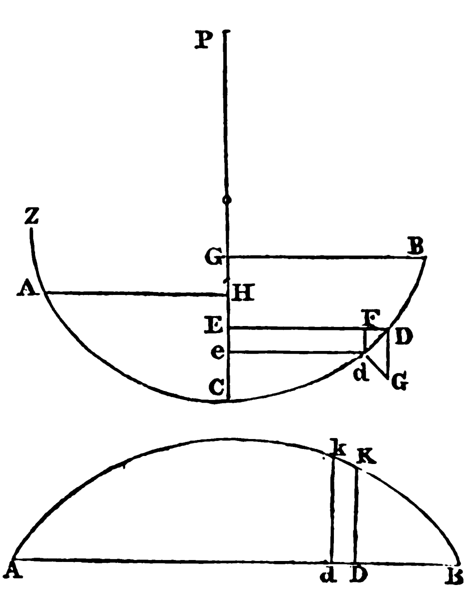
$$\frac{3 \times 5 \times 9 x^9}{9 \times 4 \times 8 \times 12 \times 16 a^{\frac{13}{2}}} -, \&c. = \frac{50841 a^{\frac{5}{2}}}{71680},$$
factâ $x = a$, et neglectis, ob parvitatem, cæteris seriei terminis. Quare cùm sit area O V K D $= \frac{b}{a^{\frac{5}{2}}} \times S.\, d x (a a - x x)^{\frac{3}{4}}$, si ponatur $x = a$ erit area O V K B $= \frac{50841}{71680} \times b a$, et 2 O V K B seu area tota B K V T a $= \frac{50841}{35840} b a = \frac{10}{7} b a$, circiter. Est itaque $\frac{10}{7}$ V O $\times$ B O $=$ A a $\times$ B O, et hinc V O $= \frac{7}{10}$ A a; ac propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{7}{10}$ A a ad longitudinem penduli.

(x) * 182. *Quàm proximè.* Prop. LXXII. Lib. II. Phor. quæ XXX. hujus Libri fere similis est, sed generalis, et demonstratu facilis, hic adjungemus.

Si curvæ cujusvis B C Z arcus totus A B, quem grave descensu per B C et subsequente ascensu per C A in medio resistente describit, extendatur in lineam rectam B A, et ad singula hujus rectæ puncta D erigantur perpendicula D K proportionalia medii resistentiis quas mobile in homologis curvæ B C A punctis D subit, sitque B K A curva quam punctum K perpetuo tangit: area curvilinea B K A B æquabitur rectangulo P C $\times$ G H ex recta P C, quæ gravitatem constantem exponit, in differentiam G H abscissarum G C, H C arcuum B C, C A descensu et subsequente ascensu descriptorum.

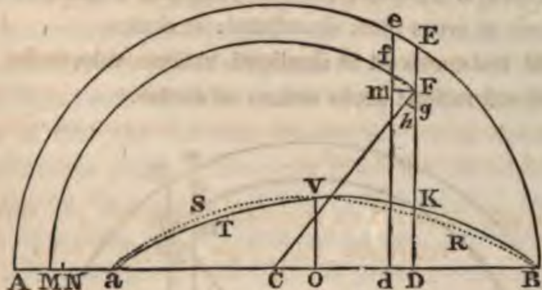
Ex punctis D, d infinitè propinquis demittantur ad P C perpendicula D E, d e, et ex puncto d ad E D perpendiculum d F; et vis gravitatis P C erit ad vim tangentialem in loco D, quâ motus corporis in curvâ acceleratur, ut D d ad F d.

* Nam ducta D G parallela P C et G d in curvam perpendiculari, exprimat D G gravitatis actionem, exprimet D d vim tangentialem, sed




ob similitudinem triangulorum D d G, D d F est D G : D d = D d : F d, erit ergo D d ad F d ut vis gravitatis ad vim tangentialem, quâpropter cum D d sumatur ubique æqualis ut est actio gravitatis, ubique F d exprimet vim tangentialem; est F d = E e, si itaque P C repræsentet vim gravitatis erit D d : E e = P C ad vim tangentialem, † ideóque vis illa tangentialis $= \frac{P C \times E e}{D d}$. Sed corporis descendentis vis acceleratrix æqualis est excessui vis tan-

retardans. In superiore Propositione rectangulum sub rectâ $\frac{1}{2}$ a B et arcuum illorum C B, C a differentia A a æqualis erat areæ B K T a.




Et area illa, si maneat longitudo a B, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum D K; hoc est, in ratione resistentiæ, ([b]) ideóque est ut longitudo a B et resistentia conjunctim. Proindeque

gentialis supra resistentiam; erit igitur vis acceleratrix in loco $D = \frac{PC \times Ee}{Dd} - DK$. Ducatur hæc vis in elementum spatii D d, et fiet $PC \times Ee - DK \times Dd = v\,dv$, si velocitas in loco D sit v (18, 19); et hinc, sumptis fluentibus, habetur $PC \times GE - BKD = \frac{1}{2} vv$. Fiat $BD = BA$, et ideò $v = o$, atque $GE = GC - CH = GH$, et erit $PC \times GH - BKAB = o$, ac proinde $PC \times GH = BKAB$. Q. e. d.

([a]) * *Oritur enim differentia illa ex retardatione penduli per resistentiam medii.* * Dividantur arcus a duobus pendulis descripti in partes proportionales infinitè parvas, et totum illud quod deest singulo arcui, poterit concipi ut effectus retardationum quas corpora passa sunt singularum illarum particularum initio, spatium verò quod propter singulam retardationem deficit, est ut illa retardatio et tempus per quod corpus motum fuit post illam retardationem receptam usque ad finem oscillationis; sed quoniam in oscillationibus utut inæqualibus tempora quibus similes arcuum partes describuntur sunt æqualia, in medio non resistente, et in medio resistente saltem quàm proximè, (180) spatia quæ deficiunt propter retardationes in proportionalibus arcuum partibus receptas, sunt ut illæ retardationes.

* *Ideò differentia arcuum est ut retardatio tota, eique proportionalis resistentia retardans,* si quantitates materiæ corporum pendulorum sint æquales, retardatio in singulis arcuum descriptorum partibus est ut resistentia in iisdem locis, sed ut resistentiæ sunt in datâ quâdam lege velocitatem ex hypothesi et velocitates in arcuum partibus proportionalibus sunt in ratione datâ, ideò resistentiæ in singulis arcuum partibus proportionalibus sunt in ratione datâ, ac per consequens omnes retardationes, sunt in eâdem ratione, summæ ergo retardationum erunt in eâdem ratione datâ, ergo tota spatia deficientia illis retardationibus proportionalia erunt in eâdem ratione, *differentiæ ergo inter arcum descensu descriptum et arcum ascensu subsequente descriptum* in variis arcubus ab eodem corpore descriptis, *sunt in datâ lege resistentiæ.*

183. * *Corol.* 1. Differentiæ arcuum, respectu arcuum descensu descriptorum eamdem sequuntur legem quam resistentiæ sequuntur respectu velocitatum. Nam cùm tempora quibus correspondentes et proportionales arcuum partes describuntur sint æqualia, velocitates erunt semper ut illæ arcuum partes, sive ut arcus toti, (180.) quam proximè, ergo resistentiæ, retardationes et differentiæ arcuum eamdem legem sequuntur respectu arcuum ac respectu velocitatum.

Cor. 2. * *Si corpora pendula differant quantitate materiæ, differentiæ arcuum sunt directè in lege datâ arcuum et inversè ut quantitates materiæ:* nam eo in casu retardationes in singulis arcuum partibus sunt directè ut resistentiæ et inversè ut quantitates materiæ; nam resistentia motus jacturam producit, quæ motus jactura est factum ex retardatione et massâ retardatâ (per Def. 2. Lib. I.).

([b]) * *Ideóque est ut longitudo a B et resistentia conjunctim.* Area illa si maneat longitudo a B, augetur vel diminuitur in ratione resistentiæ D K; si verò constans maneat resistentia seu ordinata D K, sed augeatur a B omnesque ejus partes d D in ratione totius a B augeantur, area illa augetur vel diminuitur in ratione longitudinis a B; unde si longitudo a B variabilis sit et resistentia seu ordinata D K in singulis longitudinum a B locis correspondentibus au-

bus sunt in duplicatâ ratione arcuum descriptorum quàm proximè, in minoribus verò paulò majores quàm in eâ ratione; et propterea (per Corol. 2. Prop. XXXI. Libri hujus) resistentia globi, ubi celerius movetur, est in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè; ubi tardiùs, paulò major quàm in eâ ratione.

(g) Designet jam V velocitatem maximam in oscillatione quâvis, sintque A, B, C quantitates datæ, et fingamus quod differentia arcuum sit $A V + B V^{\frac{3}{2}} + C V^{2}$. (h) Cùm velocitates maximæ sint in cycloide ut semisses

oscillatione mediocri per primam, omnes illæ differentiæ erunt ut 1.; 2.7107; 9.5072, 36.9577; 141.8378; 542.8965.

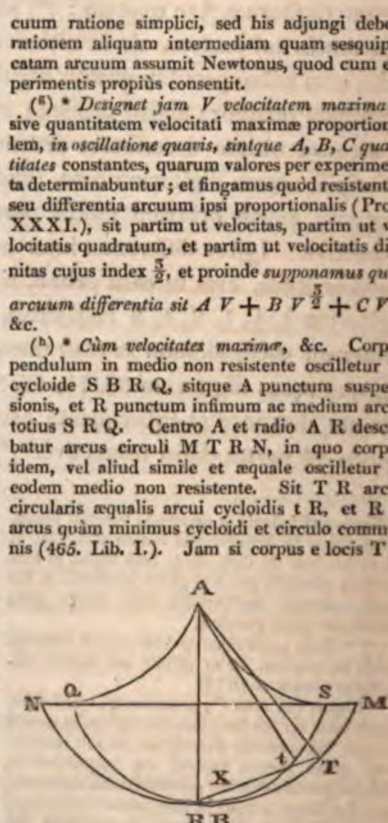
Quadrata verò arcuum sunt ut 1, 4, 16, 64, 256, 1024. unde ex eorum numerorum inspectione liquet differentias quæ in minoribus oscillationibus observatæ sunt esse ad eas quæ in majoribus arcubus observantur in majore ratione quàm duplicatâ arcuum; in majoribus verò oscillationibus rationes illarum differentiarum ad rationem duplicatam arcuum magis accedunt, ut enim arcus in progressione duplâ fuere sumpti, ratio duplicata arcuum proximorum est ratio 1 ad 4. jam verò 9.5072 est non multo major 4. parte numeri 36.9577, iste autem ad 4. partem numeri 141.8378, magis accedit, propius adhuc iste accedit ad quartam partem numeri 542.8965. Unde inter arcus magnos, motus amissos in duplicatâ fere ratione arcuum sive velocitatum sumi posse deducitur.

Idem manifestius patebit si dividantur hi numeri qui arcuum differentias exprimunt per ipsorum arcuum rationes, habebuntur enim 1.; 1.3553; 2.3788; 4.6197; 8.8648; 16.9655, qui si resistentiæ forent ut quadrata velocitatum, deberent esse ut ipsi arcus $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16. Sed ex ipsâ inspectione liquet minores differentias majoribus numeris exprimi quam ipsi arcus, majores verò ferè iisdem. Si verò supponeretur resistentiam non tantùm esse in ratione duplicatâ velocitatum, sed etiam partem aliquam aliunde quàm ex merâ inertiâ materiæ oriundam, esse ut velocitas, ideóque cùm hæ quantitates mox inventæ sint quotientes differentiarum arcuum per velocitates divisarum, hæ quantitates constarent parte constante et aliâ parte velocitati sive arcui proportionatâ.

Sumatur itaque prima quantitas 1, et ordine conferatur cum secundâ, tum cum tertiâ, cum quartâ, &c. supponaturque illas constare duabus partibus altera velocitati proportionata altera constanti, v. gr. sit prima quantitas $1 = a + x$ secunda $1.3553 = 2a + x$, iis ita binatim calculatis ut eruatur valor a et x, quantitas constans x, in singulo calculo eadem non invenietur, sed varii isti obtinebuntur valores hoc ordine .6447; .5404; .4829; .4757; .4849, qui decrescunt ordine quodam regulari (ultimo excepto ob aliqualem exiguum errorem), unde liquet, rationem differentiarum arcuum, non esse partim in ratione duplicatâ ipsorum arcuum, et partim in eorum arcuum ratione simplici, sed his adjungi debere rationem aliquam intermediam quam sesquiplicatam arcuum assumit Newtonus, quod cum experimentis propiùs consentit.

(g) * *Designet jam V velocitatem maximam*, sive quantitatem velocitati maximæ proportionalem, *in oscillatione quavis, sintque A, B, C quantitates* constantes, quarum valores per experimenta determinabuntur; et fingamus quòd resistentia, seu differentia arcuum ipsi proportionalis (Prop. XXXI.), sit partim ut velocitas, partim ut velocitatis quadratum, et partim ut velocitatis dignitas cujus index $\frac{3}{2}$, et proinde *supponamus quod arcuum differentia sit* $A V + B V^{\frac{3}{2}} + C V^{2}$, &c.

(h) * *Cùm velocitates maximæ*, &c. Corpus pendulum in medio non resistente oscilletur in cycloide S B R Q, sitque A punctum suspensionis, et R punctum infimum ac medium arcûs totius S R Q. Centro A et radio A R describatur arcus circuli M T R N, in quo corpus idem, vel aliud simile et æquale oscilletur in eodem medio non resistente. Sit T R arcus circularis æqualis arcui cycloidis t R, et R B arcus quàm minimus cycloidi et circulo communis (465. Lib. I.). Jam si corpus e locis T et




B successivè cadat in circulo, erit ipsius velocitas maxima in R descensu per arcum T R acquisita, ad velocitatem descensu per arcum B R acquisitam, ut chorda T X R ad chordam arcûs R B (88. Lib. I.), aut, quod idem est (per Lemma VII. Lib. I.), ut chorda T X R ad arcum cycloidis B R; et velocitas descensu per arcum B R acquisita in R est ad velocitatem maximam descensu per arcum cycloidis t B R acquisitam, ut arcus B R ad arcum t B R seu arcum circuli

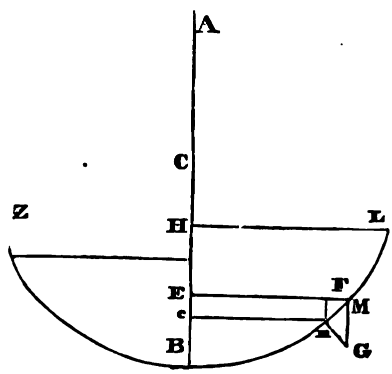
arcuum oscillando descriptorum, in circulo verò ut semissium arcuum illorum chordæ; ideóque paribus arcubus majores sint in cycloide quam in circulo, in ratione semissium arcuum ad eorundem chordas; ([1]) tempora

æqualem T B R (per demonstr. Prop. LI. Lib. I.). Quare, ex æquo, velocitas maxima in R descensu per arcum circularem T B R acquisita est ad velocitatem maximam in R descensu per cycloidis arcum t B R acquisitam, ut chorda R T ad arcum t B R vel T B R. Sunt autem velocitates maximæ in medio resistente velocitatibus maximis in medio non resistente proportionales quàm proximè, et in puncto medio arcuum qui oscillatione integrâ describuntur, ferè contingunt (180). Paribus igitur arcubus, velocitates maximæ in cycloide sunt ad velocitates maximas in circulo, ut semisses arcuum oscillando descriptorum ad eorumdem arcuum circularium chordas, quam proximè; et ideò, paribus arcubus majores sunt in cycloide quàm in circulo in ratione semissium arcuum ad eorumdem chordas in circulo ductas.

([1]) • *Tempora autem in circulo sunt majora quam in cycloide in velocitatis ratione reciprocâ.* • Id est, tempora in circulo sunt ad tempus in arcu quovis cycloidis, ut semissis arcus circuli oscillando descripti ad ejusdem semissis chordam, sive invertendo et temporum dimidia sumendo, tempus semi-oscillationis in cycloide est ad tempus semi-oscillationis in circulo (pendulis existentibus ejusdem longitudinis) ut chorda arcus descripti ad ipsum arcum, quæ quidem proportio proximè tantùm obtinet.

• Est enim tempus oscillationis integræ cujusvis in cycloide ad tempus descensûs per dimidiam penduli longitudinem ut semi-peripheria ad radium (vide not. 470. ad Prop. LII. Lib. I.) ideóque etiam tempus semi-oscillationis in cycloide ad tempus illud descensûs per dimidiam penduli longitudinem ut quadrans circuli ad radium, sed tempus descensus per quadruplum dimidiæ longitudinis penduli, sive tempus descensûs per diametrum circuli cujus pendulum est radius, est duplum temporis descensus per dimidiam penduli longitudinem, ideóque tempus semi-oscillationis in cycloide est ad tempus descensûs per diametrum circuli cujus longitudo penduli est radius, ut circuli quadrans ad diametrum. Sed, ratio temporis lapsûs per diametrum circuli ad tempus semi-oscillationis in arcu ejusdem circuli est (ut mox liquebit) composita ex ratione diametri ad quadrantem circuli et chordæ ad arcum, quàm proximè, unde ex æquo erit tempus in cycloide ad tempus in circulo ut chorda circuli ad ejus arcum oscillando descriptum. Rationem autem temporis descensus per diametrum circuli ad tempus semi-oscillationis in arcu ejus circuli esse compositam ex ratione diametri ad quadrantem circuli et ex ratione chordæ ad arcum oscillando descriptum, saltem quam proximè, sequenti calculo constabit.

Descendat itaque corpus per arcum L B centro C descriptum et diametro A B, sit t tempus quæsitum quo corpus descendit per eum arcum L B, fitque b tempus datum quo corpus labitur per diametrum A B, et quo velocitate per eum lapsum in B acquisitâ posset describere uniformiter duplum A B sive 2 A B, sumatur in arcu L B portiuncula infinitè parva M m quam corpus descendens uniformiter describere censeatur tempore infinitè parvò d t, ducanturque ex punctis L et M lineæ L H, M E in




diametrum perpendiculares; cùm tempora quibus spatia data uniformiter describuntur sint ut illa spatia directè et velocitates quibus percurruntur inversè, sitque velocitas quæ in B acquisita est per lapsum ex A B ad velocitatem per lapsum ex L in M, sive ex H in E acquisitam, ut $\sqrt{AB}$ ad $\sqrt{HE}$, erit $b : dt = \frac{2AB}{\sqrt{AB}} : \frac{Mm}{\sqrt{HE}}$; dicatur ergo $AB = 1$; $HB = h$, $BE = x$, $EM = y$; $HE = h - x$ erit $b : dt = 2 : \frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$, est autem $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ et ex naturâ circuli (cùm fit $yy = x - xx$, et $2y\,dy = dx - 2x\,dx$, sive $dy = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-xx}}$) $dx$ invenietur $\sqrt{dx^2+dy^2} = \pm\frac{dx}{2\sqrt{x-xx}}$, et quoniam dum crescit B E decrescit L M est $Mm = \frac{-dx}{2\sqrt{x-xx}}$, resolvatur ergo $\frac{1}{\sqrt{x-xx}}$ in seriem per formulam Newtonianam invenietur $\frac{1}{\sqrt{x-xx}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2 \times 4}$, &c. ideóque M m sive

autem in circulo sint majora quàm in cycloide in velocitatis ratione reciprocâ; patet arcuum differentias ([k]) (quæ sunt ut resistentia et quadratum

$$\frac{-dx}{2\sqrt{x-xx}} = \tfrac{1}{2} \times -\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4}, \text{ \&c.}$$

Pariter resolvatur $\frac{1}{\sqrt{h-x}}$ in seriem per eamdem formulam erit $\frac{1}{\sqrt{h-x}}$

$$= \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{2h^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{2\times 4h^{\frac{5}{2}}}, \text{ \&c.} = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} \times 1 + \frac{x}{2h} + \frac{3x^2}{2\times 4h^2}, \text{ \&c.}$$

Ductis ergo per se mutuo his seriebus $\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times -\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$

$$-\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4}, \text{ \&c.}$$

$$-\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2h} - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 2h} - \frac{3x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times 4\times 2h}, \text{ \&c.}$$

$$-\frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4h^2} - \frac{3x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times 2\times 4h^2} - \frac{3\times 3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times 4\times 2\times 4h^2}, \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

ideóque integralis

$$S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times -2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times 3} - \frac{2\times 3x^{\frac{5}{2}}}{2\times 4\times 5}, \text{ \&c.}$$

$$-\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times 3h} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{2\times 2\times 5h} - \frac{2\times 3x^{\frac{7}{2}}}{2\times 4\times 2\times 7h}, \text{ \&c.}$$

$$-\frac{2\times 3x^{\frac{5}{2}}}{2\times 4\times 5h^2} - \frac{2\times 3x^{\frac{7}{2}}}{2\times 2\times 4\times 7h^2} - \frac{2\times 3\times 3x^{\frac{9}{2}}}{2\times 4\times 2\times 4\times 9h^2}, \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

Cùm ergo sit $b : dt = 2 : \frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$ erit $b : t = 2 : S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$, sed quando t fit o, tunc est $h = x$ ideóque integralis quæsita in hanc mutatur, (posito ubique h pro x)

$$S.\frac{Mm}{h-x} = -1 - \frac{h}{2\times 3} - \frac{3h^2}{2\times 4\times 5}, \text{ \&c.}$$

$$-\frac{1}{2\times 3} - \frac{h}{2\times 2\times 5} - \frac{3h^2}{2\times 4\times 2\times 7}, \text{ \&c.}$$

$$-\frac{3}{2\times 4\times 5} - \frac{3h}{2\times 2\times 4\times 7} - \frac{2\times 3\times 3h^2}{2\times 4\times 2\times 4\times 9}, \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

Ideóque hæc est quantitas illa constans quæ debet tolli ex valore integralis quæ in proportione $b : t = 2 : S.\frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$ pro $S.\frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$ adhibetur, quæcumque assumatur valor indeterminatæ x, sed ubi totus arcus L B est descriptus, tunc x fit o, et evanescit prior series $\frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times -2x^{\frac{1}{2}}$, &c. ergo in eo casu integralis $S.\frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$ est æqualis soli quantitati illi constanti adsumptæ cum signis mutatis, ideóque est

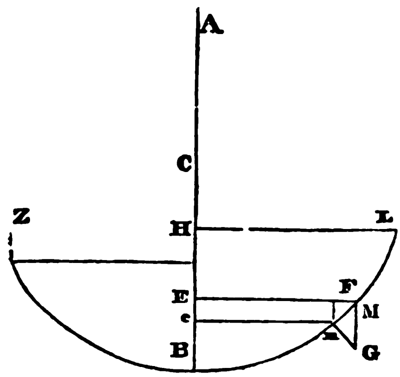
$$b : t = 2 : \quad 1 + \frac{h}{2\times 3} + \frac{3h^2}{2\times 4\times 5}, \text{ \&c.}$$

$$+ \frac{1}{2\times 3} + \frac{h}{2\times 2\times 5}, \text{ \&c.}$$

$$+ \frac{3}{2\times 4\times 5}, \text{ \&c.}$$

&c.

Jam autem cùm M m, sit æqualis seriei $\frac{1}{2} \times \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4}$, &c. ejus integralis est $\frac{1}{2} \times 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times 3} + \frac{2\times 3x^{\frac{5}{2}}}{2\times 4\times 5}$, &c. $= \sqrt{x} \times 1 + \frac{1x}{2\times 3} + \frac{3x^2}{2\times 4\times 5}$, &c. in quâ si fiat $x = 1$ habebitur semi-peripheria circuli, et si fiat $x = h$ habebitur arcus




L B, tumque illæ duæ series in has abibunt

$$1 + \frac{1}{2\times 3} + \frac{3}{2\times 4\times 5}, \text{ \&c.}$$

$$\text{et } \sqrt{h} \times 1 + \frac{h}{2\times 3} + \frac{3h^2}{2\times 4\times 5}, \text{ \&c.}$$

Quæ si per se mutuo ducantur, earum factum erit

$$\sqrt{h} \times 1 + \frac{h}{2\times 3} + \frac{3h^2}{2\times 4\times 5}, \text{ \&c.}$$

$$\frac{1}{2\times 3} + \frac{h}{2\times 3\times 2\times 3}, \text{ \&c.}$$

$$\frac{3}{2\times 4\times 5}, \text{ \&c.}$$

&c.

Sed termini hujus seriei saltem primi, iidem sunt cum terminis seriei superius inventæ pro

temporis conjunctim) easdem fore, quamproximè, in utrâque curvâ: (†) deberent enim differentiæ illæ in cycloide augeri, unà cum resistentia, in duplicatâ circiter ratione arcûs ad chordam, ob velocitatem in ratione illâ simplici auctam; et diminui, unà cum quadrato temporis, in eâdem duplicatâ ratione. Itaque ut reductio fiat ad cycloidem, eædem sumendæ sunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in circulo observatæ, velocitates verò maximæ ponendæ sunt arcubus vel dimidiatis vel integris, hoc est, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in casu secundo, quarto et sexto, numeros, 1, 4 et 16 pro V; et prodibit arcuum differentia $\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$ in casu secundo; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4\,A + 8\,B + 16\,C$ in casu quarto; et $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16\,A + 64\,B + 256\,C$ in casu sexto. Et ex his æquationibus, (l) per debitam collationem et reductionem analyticam, fit $A = 0,\,0000916$, $B = 0,\,0010847$, et $C = 0,\,0029558$. Est igitur differentia arcuum ut $0,\,0000916\,V + 0,\,0010847\,V^{\frac{3}{2}} + 0,\,0029558\,V^2$: et propterea cum (per Corollarium Propositionis XXX. applicatum ad hunc casum) resistentia globi in medio arcus oscillando descripti, ubi velocitas est V, (m) sit ad ipsius pondus A ut $\frac{7}{11}\,A\,V + \frac{7}{10}\,B\,V^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}\,C\,V^2$ ad

valore $S.\,\frac{M\,m}{\sqrt{h - n}}$, sit ergo arcus $L\,B = a$, peripheria circuli cujus diameter est 1 sit p, erit $\sqrt{h} \times S.\,\frac{M\,m}{\sqrt{h - x}} = \frac{a\,p}{2}$, sive $S.\,\frac{M\,m}{\sqrt{h - x}} = \frac{a\,p}{2\sqrt{h}}$, sed $\sqrt{h}$ est æqualis chordæ L B, ex naturâ circuli, quæ si dicatur c, erit $S.\,\frac{M\,m}{\sqrt{h - x}} = \frac{a\,p}{2\,c}$. Unde tandem est $b : t = 2 : \frac{a\,p}{2\,c} = 1 : \frac{a\,p}{4\,c} = 1 \times c : a \times \frac{p}{4}$ sive est b tempus descensus per diametrum vel per chordam quamlibet ad t tempus descensus per arcum in ratione compositâ ex ratione diametri 1 ad $\frac{p}{4}$ sive quadrantem peripheriæ, et ex ratione chordæ c ad arcum a. Q. e. d.

(k) * *Quæ sunt ut resistentia et quadratum temporis conjunctim* (per Cor. 3. Lem. X.). Resistentia enim considerari potest ut vis quæ retardationem producit, et differentia arcuum ut spatium quod corpus vi illâ mediocri ac constante sollicitatum describeret. Hinc arcuum differentiæ erunt quam proxime ut *resistentia directè et quadratum temporis conjunctim.*

(†) * *Deberent differentiæ in cycloide augeri unà cum resistentiâ in duplicatâ circiter ratione, arcus ad chordam ob velocitatem in ratione illâ simplici auctam,* quia scilicet pars maxima resistentiæ est ut quadrata velocitatum.

(l) * *Per debitam collationem.* Prima æquatio est $\frac{\frac{1}{2}}{121} = \frac{1}{2 \times 121} = A + B + C$, secunda divisa per 4. est $\frac{1}{71} = A + 2\,B + 4\,C$, et tertia divisa per 16. est $\frac{3}{58} = A + 4\,B + 16\,C$. Ex his autem æquationibus facile eruuntur valores litterarum A, B, C, si fractiones $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{71}$, et $\frac{3}{58}$ ad decimales reducantur.

(m) * *Sit ad ipsius pondus.* A V est pars differentiæ arcuum genita per resistentiæ partem illam quæ est ut velocitas $B\,V^{\frac{3}{2}}$, pars differentiæ arcuum genita per resistentiæ partem quæ est in sesquiplicatâ ratione velocitatis; et $C\,V^2$ pars differentiæ arcuum producta per resistentiæ totius partem quadrato velocitatis proportionalem (per Cor. 4. Prop. XXXI.). Sed (per Cor. Prop. XXX.) si resistentia sit ut velocitas, est $\frac{7}{11}\,A\,V$ ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in puncto medio arcûs descripti ad ejusdem pondus; si resistentia sit ut velocitatis quadratum, resistentia illa in puncto

longitudinem penduli; si pro A, B et C scribantur numeri inventi, fiet resistentia globi ad ejus pondus, ut 0, 0000583 V + 0, 0007593 $V^{\frac{3}{2}}$ + 0, 0022169 $V^2$ ad longitudinem penduli inter centrum suspensionis et regulam, id est, ad 121 digitos. Unde cùm V in casu secundo designet 1, in quarto 4, in sexto 16: erit resistentia ad pondus globi in casu secundo ut 0, 0030345 ad 121, in quarto ut 0, 041748 ad 121, in sexto ut 0, 61705 ad 121.

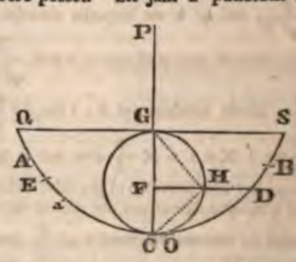
Arcus quem punctum in filo notatum in casu sexto descripsit, erat $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ seu $119\frac{5}{29}$ digitorum. Et propterea cùm radius esset 121 digitorum, et longitudo penduli inter punctum suspensionis et centrum globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum globi descripsit (n) erat $124\frac{3}{31}$ digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima, ob resistentiam aëris, non incidit in punctum infimum arcus descripti, (o) sed in medio ferè loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter ac si globus descensu suo toto in medio non resistente (p) describeret arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{62}$, idque in cycloide, ad quam motum penduli supra reduximus: et propterea velocitas illa æqualis erit ve-

medio arcûs descripti est ad corporis pondus ut $\frac{3}{4}$ C $V^2$ ad longitudinem penduli, et (181) si resistentia sit in ratione sesquiplicatâ velocitatis, est illa ad corporis pondus ut $\frac{7}{10}$ B $V^{\frac{3}{2}}$ ad longitudinem penduli. Quarè cum hic supponatur resistentia partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione sesquiplicatâ et partim in duplicatâ, resistentia globi in medio arcûs oscillando descripti, ubi velocitas est V, erit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11}$ A V + $\frac{7}{10}$ B $V^{\frac{3}{2}}$ + $\frac{3}{4}$ C $V^2$, ad longitudinem penduli.

(n) * *Erat* $124\frac{3}{31}$ *digit.* Sunt enim radii ut similes circulorum arcus, et ideò radius 121, est ad suum arcum $119\frac{5}{29}$ ut radius 126, ad arcum correspondentem 124 $\frac{3}{31}$ quamproximè.

(o) * *Sed in medio ferè loco.* Patet per not. 180.

(p) * *Describeret arcûs illius partem dimidiam.* Corpus oscillando describat arcum B a in medio resistente et arcum B A in medio non resistente; sit C punctum cycloidis infimum; O, punctum medium arcûs B a, et arcus C D sit æqualis arcui B O, velocitas maxima descensu corporis per arcum B O acquisita in medio resistente est ad velocitatem maximam per arcum B C acquisitam in medio resistente ut arcus B O, ad arcum B C (180). Sed si corpus e loco D in medio non resistente cadendo describat arcum D C, erit etiam velocitas ipsius in C descensu per arcum D C acquisita ad velocitatem acquisitam ibidem descensu per arcum B C ut arcus C D, vel æqualis B O, ad arcum B C, (Prop. LI. Lib. I.). Ergò velocitas in medio resistente per arcum B O acquisita in O æqualis est velocitati quam corpus in medio non resistente cadendo per arcum D C = B O haberet in C; et propterea (85. Lib. I.) velocitas illa æqualis est velocitati quam corpus perpendiculariter cadendo in medio non resistente, et casu suo describendo altitudinem F C æqualem sinui verso arcûs C H, acquirere posset. Sit jam P punctum suspen-




sionis, P C longitudo penduli S D C semicyclois, S G et D F ad P C normales, et C H G C circulus diametro G C descriptus secans D F in H. Jungatur chorda C H, et erit arcus cycloidis S D = 2 G C — 2 C H, et arcus S C = 2 G C (462. Lib. I.) ideóque arcus D C = 2 C H. Est autem (ex naturâ circuli) C F ad C H ut C H ad C G, et hinc C F ad 2 C H seu D C, ut 2 C H ad 4 C G, sivè ut D C ad 2 P C; hoc est, sinus versus C F, ad arcum C D, ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam.

locitati quam globus, perpendiculariter cadendo et casu suo describendo altitudinem arcus illius sinui verso æqualem, acquirere posset. Est autem sinus ille versus in cycloide ad arcum istum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, et propterea æqualis digitis 15, 278. Quare velocitas ea ipsa est quam corpus cadendo et casu suo spatium 15, 278 digitorum describendo acquirere posset. Tali igitur cum velocitate globus resistentiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut 0, 61705 ad 121, vel ([q]) (si resistentiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicatâ) ut 0, 56752 ad 121.

([r]) Experimento autem hydrostatico inveni quod pondus globi hujus lignei esset ad pondus globi aquei magnitudinis ejusdem ut 55 ad 97: et propterea cum 121 sit ad 213, 4 in eâdem ratione, erit resistentia globi aquei præfatâ cum velocitate progredientis ([s]) ad ipsius pondus ut 0, 56752 ad 213, 4, id est, ut 1 ad $376\frac{1}{50}$. Unde cùm pondus globi aquei, quo tempore globus cum velocitate uniformiter continuatâ ([t]) describat longitudinem digitorum 30, 556, velocitatem illam omnem in globo cadente generare posset; ([u]) manifestum est quod vis resistentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere posset velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{50}$, hoc est, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$. Et propterea quo tempore globus, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ, longitudinem semidiametri suæ, seu digitorum $3\frac{1}{16}$, describere posset, ([x]) eodem amitteret motûs sui partem $\frac{1}{3342}$.

([q]) * *Si resistentiæ pars illa sola*, &c. Si enim in quantitate, 0, 0022169 $V^2$ quæ est ad longitudinem penduli ut resistentiæ pars velocitatis quadrato proportionalis ad corporis pondus loco V scribatur 16, et loco $V^2$ scribatur 256, fiet 0, 0022169 $V^2$ = 0, 56752, quamproximè.

([r]) * *Experimento autem hydrostatico.* Experimentum facile est. Cùm enim corpus fluido immersum, eâdem vi sursum urgeatur quâ par fluidi volumen sustinetur, id est, vi quæ æqualis est ponderi fluidi ejusdem magnitudinis (Cor. 5. et 6. Prop. XX. Lib. hujus) corpus fluido specificè leviori immersum ponderis sui partem amittet æqualem ponderi fluidi ejusdem voluminis; et propterea si corpus illud fluido immersum ponderetur, cognoscetur pondus fluidi ejusdem magnitudinis cum corpore. Si fluidum corpore immergendo specificè gravius sit, corpori illi adjungi potest aliud corpus majoris gravitatis specificæ ut eorum summa fluido specificè gravior fiat.

([s]) *Ad ipsius pondus.* Resistentia globi solidi æqualis est resistentiæ globi aquei ejusdem magnitudinis et cum eâdem velocitate in eodem medio progredientis, sed resistentia globi solidi est ad ejusdem pondus ut 0, 56752 ad 121, et pondus globi solidi ad pondus globi aquei ut 121 ad 213.4, seu ut 1 ad $376\frac{1}{50}$ quamproximè.

([t]) * *Describat longitudinem digit.* 30, 556, duplam nimirum longitudinis digitorum 15. 278, quæ velocitatem illam omnem in globo cadente generare posset (29. Lib. I.).

([u]) * *Manifestum est.* Sunt enim velocitates dato tempore genitæ vel extinctæ, ut vires quibus generantur vel extinguuntur (13. Lib. I.).

([x]) * *Eodem amitteret motûs sui partem.* Nam velocitates eâdem vi constante vel extinctæ sunt ut tempora quibus generantur vel extinguuntur (13. Lib. I.), sed tempora quibus corpora duo eâdem velocitate uniformi percurrunt longitudines digit. 30, 556, et digit. $3\frac{7}{16}$, sunt ut hæ longitudines (5. Lib. I.). Quarè velocitates amissæ sunt ut eædem longitudines, et ideò 30, 556 ad $3\frac{7}{16}$, ut $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$ ad velocitatem amissam eo tempore quo globus longitudinem semi-diametri suæ seu digit. $3\frac{7}{16}$, percurrit; undè invenitur velocitas illa amissa = $\frac{1}{3342}$, quamproximè.

Numerabam etiam oscillationes quibus pendulum quartam motûs sui partem amisit. In sequente tabulâ numeri supremi denotant longitudinem arcûs descensu primo descripti, in digitis et partibus digiti expressam: numeri medii significant longitudinem arcûs ascensu ultimo descripti; et loco infimo stant numeri oscillationum. Experimentum descripsi tanquam magis accuratum quàm cùm motûs pars tantùm octava amitteretur. (y) Calculum tentet qui volet.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Descensus primus* | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| *Ascensus ultimus* | $1\frac{1}{2}$ | 3 | 6 | 12 | 24 | 48 |
| *Numerus oscillat.* | 374 | 272 | $162\frac{1}{2}$ | $83\frac{1}{3}$ | $41\frac{2}{3}$ | $22\frac{2}{3}$ |

Postea globum plumbeum diametro digitorum 2, et pondere unciarum Romanarum $26\frac{1}{4}$ suspendi filo eodem, sic ut inter centrum globi et punctum suspensionis intervallum esset pedum $10\frac{1}{2}$, et numerabam oscillationes

(y) * *Calculum tentet.* Quoniam experimentum magis accuratum est, calculum tentabimus. Erunt igitur differentiæ arcuum primo descensu et ultimo ascensu descriptorum.

$\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16.

Arcus in unâ mediocri oscillatione descripti, sunt

$3\frac{1}{2}$, 7, 14, 28, 56, 112.

Differentiæ arcuum descensu et subsequente ascensu in unâ mediocri oscillatione descriptorum, sunt

$$\frac{\frac{1}{2}}{374},\ \frac{1}{272},\ \frac{2}{162\frac{1}{2}},\ \frac{4}{83\frac{1}{3}},\ \frac{8}{41\frac{2}{3}},\ \frac{16}{22\frac{2}{3}}$$

sive ut 1. 2.7500; 9.2061; 35.5040; 143.7760; 528.5882.

Hæ autem differentiæ in majoribus oscillationibus sunt in duplicatâ ratione arcuum descriptorum satis proximè; nam $\frac{8}{41\frac{2}{3}} : \frac{16}{22\frac{2}{3}} = 34 : 125$, et $34 : 126 = 1 : 4$; hoc est, in duplicatâ ratione arcuum descriptorum. Et similiter $\frac{4}{83\frac{1}{3}} : \frac{8}{41\frac{2}{3}} = 1 : 4$, accuratè; in minoribus verò oscillationibus, differentiæ illæ sunt in ratione paulò majore quam duplicatâ arcuum descriptorum. Est enim $\frac{1}{272} : \frac{1}{162\frac{1}{2}} = 325 : 1088$ et hæc ratio major est ratione 1 ad 4. Designet jam V, ut supra, velocitatem maximam in oscillatione quâvis, et $A\,V + B\,V^{\frac{3}{2}} + C\,V^2$, differentiam arcuum; et quoniam velocitates ponendæ sunt arcubus descriptis scil. numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, analogæ, scribamus in cas. 2. 4. et 6. numeros 1, 4, 16, pro V, et prodibit arcuum differentia $\frac{1}{272} = A + B + C$ in cas. 2. $\frac{4}{83\frac{1}{3}} = 4\,A + 8\,B + 16\,C$ in cas. 4 et $\frac{16}{22\frac{2}{3}} = 16\,A + 64\,B + 256\,C$ in cas. 6. Ex his æquationibus habetur $A = 0{,}0005096$, $B = 0{,}0005884$, et $C = 0{,}0025784$. Est igitur differentia arcuum ut $0{,}0005096\,V + 0{,}0005884 \times V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0025784\,V^2$, et propterea cùm resistentia globi in medio arcûs oscillando descripti ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11}\,A\,V + \frac{7}{10}\,B\,V^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}\,C\,V^2$ ad longitudinem penduli, fiet resistentia globi ad ejus pondus ut $0{,}0003243\,V + 0{,}0004119\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0019338\,V^2$, ad longitudinem penduli inter centrum suspensionis et regulam, id est, ad 121 digit. Unde cùm V in cas. 2. designet 1; in 4. 4, in 6. 16; erit resistentia ad pondus globi in cas. 2. ut 0,0267 ad 121; in 4. ut 0,0355332 ad 121; in 6. ut 0,5266032 ad 121.

Ponatur resistentia in tardioribus motibus partim uniformis et partim velocitati, partim velocitatis quadrato proportionalis, ideóque arcuum differentia sit $A + B\,V + C\,V^2$, et scribamus in cas. 1. 2. et 3. numeros 1, 2, 4, pro V, prodibunt æquationes $A + B + C = \frac{1}{748}$, $A + 2\,B + 4\,C = \frac{1}{272}$, et $A + 4\,B + 16\,C = \frac{4}{323}$, ex quibus eruitur $A = 0{,}00034$, $B = 0{,}0003255$, et $C = 0{,}0006714$; et proptereà cùm (per Cor. Prop. XXX.) resistentia globi in medio arcûs oscillando descripti, ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut $\frac{1}{2}\,A + \frac{7}{11}\,B\,V + \frac{3}{4}\,C\,V^2$ ad longitudinem penduli; si pro A, B, et C, scribantur numeri inventi, sint resistentia globi ad ejus pondus ut $0{,}00017 + 0{,}0002071\,V + 0{,}0005035\,V^2$ ad 121, id est, in cas. 1. ut 0,0008806 ad 121; in 2. cas. ut 0,0025982 ad 121; in 3. cas. ut 0,0090544, ad 121; resistentia verò uniformis erit ad pondus globi ut 0,00017 ad 121, seu ut 1, ad 735294.

quibus data motûs pars amitteretur. Tabularum subsequentium prior exhibet numerum oscillationum quibus pars octava motûs totius cessavit: secunda numerum oscillationum quibus ejusdem pars quarta amissa fuit.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Descensus primus* | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| *Ascensus ultimus* | $\frac{7}{8}$ | $\frac{7}{4}$ | $3\frac{1}{2}$ | 7 | 14 | 28 | 56 |
| *Numerus oscillat.* | 226 | 228 | 193 | 140 | $90\frac{1}{2}$ | 53 | 30 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Descensus primus* | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| *Ascensus ultimus* | $\frac{3}{4}$ | $1\frac{1}{2}$ | 3 | 6 | 12 | 24 | 48 |
| *Numerus oscillat.* | 510 | 518 | 420 | 318 | 204 | 121 | 70 |

In tabulâ priore seligendo ex observationibus tertiam, quintam et septimam, et exponendo velocitates maximas in his observationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 respectivè, et generaliter per quantitatem V ut supra: emerget in observatione tertiâ $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, in quintâ $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, in septimâ $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Hæ verò æquationes reductæ dant $A = 0,001414$, $B = 0,000297$, $C = 0,000879$. Et inde prodit resistentia globi cum velocitate V moti in eâ ratione ad pondus suum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0,0009\,V + 0,000208\,V^{\frac{3}{2}} + 0,000659\,V^2$ ad penduli longitudinem 121 digitorum. Et si spectemus eam solummodo resistentiæ partem quæ est in duplicatâ ratione velocitatis, hæc erit ad pondus globi ut $0,000659\,V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars resistentiæ in experimento primo ad pondus globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$ ut $0,002217\,V^2$ ad 121: (z) et inde fit resistentia globi lignei ad resistentiam globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in 0, 002217 ad $26\frac{1}{4}$ in 0, 000659, id est, ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ et 2 digitorum, et harum quadrata sunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ et 4, seu $11\frac{13}{16}$ et 1 quamproximè. Ergo resistentiæ globorum æquivelocium erant in minore ratione quàm duplicatâ diametrorum. (a) At nondum consideravimus resistentiam fili, quæ certè per-

(z) *Et indè fit resistentia.* Est enim (ex dem.) resistentia globi lignei $57\frac{7}{22} \times \frac{0,002217}{121}$; et resistentia globi plumbei $26\frac{1}{4} \times \frac{0,000659}{121}$, ideóque resistentia globi lignei ad resistentiam globi plumbei ut $57\frac{7}{22} \times 0,002217$ ad $26\frac{1}{4} \times 0,000659$ id est, $7\frac{1}{3}$ ad 1.

(a) 184. *At nondum consideravimus, &c.*

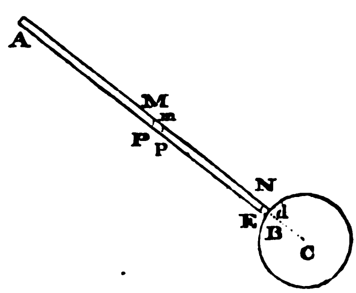
PROBLEMA.

Fili tensi oscillantis resistentiam invenire in medio cujus resistentia est ut velocitatis et diametri globi quadrata conjunctim.

Filum cylindricum homogeneum A B, circà punctum A, oscilletur, sitque ejus longitudo

magna erat, ac de pendulorum inventâ resistentiâ subduci debet. Hanc accuratè definire non potui, sed majorem tamen inveni quàm partem ter-

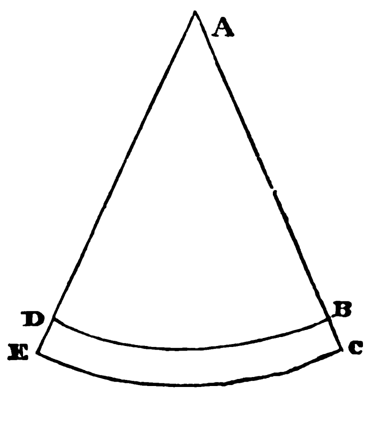
A B = a, diameter E N = 2 b, globi C, diameter = 2 r, longitudo variabilis A P = x, P p = d x; et cylindruli evanescentis P M, velocitas erit ut distantia A P, ejusque proindè resistentia ut x x d x, sive ut altitudo cylindruli P p et quadratum velocitatis conjunctim; et hinc, sumptâ fluente, resistentia fili A P, fit ut $\frac{1}{3}x^3$, et totius fili A B resistentia ut $\frac{1}{3}a^3$. Capiatur in B, cylindrulus B N, cujus altitudo B E sit æqualis diametro fili E N, seu 2 b, et resistentia fili A E, erit ut $\frac{1}{3}(a-2b)^3$, ideóque cylindri B N resistentia ut $\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}(a-2b)^3$. Est igitur resistentia fili totius A B, ad resistentiam cylindri B N, ut $a^3$ ad $a^3 - (a-2b)^3$; sed ut infra Prop. XXXIV. demonstrabitur, cylindri B N resistentia est ad resistentiam globuli huic cylindro inscripti ut 2 ad 1, et resistentia globuli hujus est ad resistentiam globi C, in ratione quamproximè compositâ ex ratione quadrati diametri E N, ad quadratum diametri 2 B C, et ratione quadrati velocitatis globuli ad quadratum velocitatis globi C hoc est, ut $bb(a-b)^2$ ad $rr(a+r)^2$. Quarè (per compositionem rationum et ex æquo) resistentia fili A B, est ad resistentiam globi C, ut $2a^3bb(a-b)^2$, ad




$a^3rr(a+r)^2 - rr(a+r)^2 \times (a-2b)^3$, seu ponendo $a + r = c$, ut $a^3b(a-b)^2$ ad $3a^2rrcc - 6abrrcc + 4bbrrcc$, et hinc resistentia fili ad resistentiam totius penduli ut $a^3b(a-b)^2$, ad $a^3b(a-b)^2 + rrcc(3aa - 6ab + 4bb)$. Q. e. i.

185. *Corol.* Si fili semi-diameter b, sit admodum exigua respectu longitudinis ejusdem a, erit ferè $3aa - 6ab + 4bb = 3aa - 6ab + 3bb = 3(a-b)^2$. Quare fili resistentia erit ad resistentiam globi ut $a^3b$ ad $3rrcc$, et ad resistentiam totius penduli ut $a^3b$ ad $a^3b + 3rrcc$. Exempli causâ. Sit c = 126. digit. r = 1 digit. a = 125 digit. $b = \frac{1}{100}$ digit. et resistentia fili erit ad resistentiam totius penduli ut 1953125 ad 4762800, seu ut 1 ad 2, 438 quamproximè.

186. Inveniri etiam potest pars illa resistentiæ fili quæ uniformis est, quæque in tardioribus motibus observatur; posito quod uniformis illa resistentia fili sit ad uniformem resistentiam globi, ut spatium solidum quod filum oscillando describit ad spatium solidum quod describit globus. Filum cylindricum A B oscillatione unâ




describat spatium solidum seu prisma cujus basis est sector circularis A B D, et altitudo diameter fili, interea dum globi centrum C, describit arcum C E, diameter fili dicatur 2 R, et spatium a filo descriptum erit R × A B × B D; spatium verò a globo descriptum est factum ex area circuli cujus radius B C, in arcuum C E quem centrum C describit; seu est $\frac{22}{7} BC^2 \times CE$. Quarè uniformis resistentia fili est ad uniformem resistentiam globi ut R × A B × B D ad $\frac{22}{7} BC^2 \times CE$, hoc est, ob rectas A B, A C arcubus B D, C E proportionales, ut $R \times AB^2$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times AC$, totaque uniformis resistentia penduli ad uniformem resistentiam globi ut $R \times AB^2 + \frac{22}{7} BC^2 \times AC$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times AC$.

*Exempli causâ.* Sit $R = \frac{1}{100}$ digit. A C = 126 digit. B C = $3\frac{7}{16}$, A B = $122\frac{9}{16}$ ut in experimentis primo ac secundo, et invenietur uniformis resistentia fili ad uniformem resistentiam globi ut 1 ad 31. circiter, et ideò resistentia fili est resistentiæ totius penduli pars $\frac{1}{32}$. Cùm igitur

tiam resistentiæ totius minoris penduli; et inde didici quod resistentiæ globorum, demptâ fili resistentiâ, sunt quam proximè in duplicatâ ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, seu $10\frac{1}{2}$ ad 1 non longe abest a diametrorum ratione duplicata $11\frac{13}{16}$ ad 1.

Cùm resistentia fili in globis majoribus minoris sit momenti, tentavi etiam experimentum in globo cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum suspensionis et centrum oscillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$, inter punctum suspensionis et nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli descensu a nodo descriptus 32 dig. Arcus ascensu ultimo post oscillationes quinque ab eodem nodo descriptus 28 dig. Summa arcuum seu arcus totus oscillatione mediocri descriptus 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. (b) Ejus pars decima seu differentia inter descensum et ascensum in oscillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oscillatione mediocri a nodo descriptus ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oscillatione mediocri a centro globi descriptum; et ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0, 4475. (c) Si longitudo penduli,

supra inventa sit resistentia uniformis ad pondus globi lignei ut 1 ad 735294, subductâ resistentiâ fili, erit uniformis resistentia globi lignei ad ejusdem pondus unciar. Rom. $57\frac{7}{22}$ ut 1 ad 760000 circiter. Quæramus nunc resistentiam uniformem globi plumbei in ultimo experimento. Mediocres arcuum differentiæ in primâ tabulâ sumptæ sunt in cas. 1. 2. et 3. $\frac{1}{1808}$, $\frac{1}{912}$ et, $\frac{1}{386}$, respectivè. Loco V, in quantitate $A + B V + C V^2$, scribantur successivè numeri 1, 2, et 4, et prodibunt æquationes $A + B + C = \frac{1}{1808}$, $A + 2 B + 4 C = \frac{1}{912}$, et $A + 4 B + 16 C = \frac{1}{386}$, ex quibus habetur $A = 0,0001455$, $B = 0,0004076$, et $C = 0,0000679$. Unde resistentia uniformis est ad pondus globi unciar. Rom. $26\frac{1}{4}$ ut $\frac{1}{2}$ A seu 0, 0000728 ad 121, id est, ut 1 ad 1662088. Jam verò cùm in hoc experimento sit A C = 126 digit. B C = 1, A B = 125, si ponatur $R = \frac{1}{100}$ digit. invenitur uniformis resistentia fili ad resistentiam uniformem globi ut 15625 ad 39600, sivè ferè ut 2 ad 5; et ideò fili resistentia totius resistentiæ uniformis partes continet $\frac{2}{7}$. Quarè uniformis resistentia globi plumbei est ad ejus pondus unciar. Rom. $26\frac{1}{4}$ ut 1 ad 2326923 circiter; et hinc uniformis resistentia globi plumbei cujus diameter est digit. 2, est ad resistentiam globi lignei uniformem cujus diameter est digit. $6\frac{7}{8}$ ut $26\frac{1}{4} \times 760000$ ad $57\frac{7}{22} \times 2326923$, hoc est, ut 19950000 ad 133374995 sivè ut 1 ad 6, 685.

Verùm si ponatur resistentia partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis, resistentia globi lignei invenitur esse ad ejusdem pondus $57\frac{7}{22}$ unciar. Rom. in ratione 1 ad 450000 circiter, et resistentia uniformis globi plumbei ad ejus pondus $26\frac{1}{4}$ unciar. in ratione 1, ad 910900 per tabulam primam; et in ratione 1, ad 1021097 per tabulam secundam ultimi experimenti; undè sumptâ mediocri ratione, resistentia uniformis globi plumbei est ad pondus $26\frac{1}{4}$ unciar. ut 1 ad 966000 circiter. Et ideò, in hâc resistentiæ hypothesi, uniformis resistentia globi plumbei cujus est diameter digit. 2, est ad resistentiam uniformem globi lignei cujus diameter est digit. $6\frac{1}{8}$, ut $26\frac{1}{4} \times 450000$ ad $57\frac{7}{22} \times 966000$ seu ut 1, ad 4,687, circiter.

(b) * *Ejus pars decima.* Si oscillatio ex itu et reditu penduli, seu ex bino descensu binoque ascensu componatur, quinque oscillationes sic acceptæ æquivalent oscillationibus decem quarum singulæ ex uno tantùm descensu unoque ascensu constant. Priore significatione Newtonus oscillationes quinque, de quibus hic loquitur, accepisse videtur, ut potè qui differentiam 4 digit. per num. 10 dividit ut differentiam inveniat inter arcus descensu uno et subsequente ascensu descriptos in unâ mediocri oscillatione ex descensu uno unoque ascensu compositâ.

(c) * *Si longitudo penduli*, in medio non resistente *augeretur in ratione* 126 *ad* $122\frac{1}{2}$, *tempus oscillationis*, ob datam globi funependuli massam et pondus, *augeretur in ratione illâ subduplicatâ* (per Cor. 6. Prop. XXIV.) quod etiam in medio resistente verum est quam proximè (180).

* Mutatâ longitudine penduli et manente longitudine arcûs descripti, velocitas penduli diminuetur in ratione subduplicatâ longitudinis

manente longitudine arcûs descripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$ tempus oscillationis augeretur, et velocitas penduli diminueretur in ratione illâ subduplicatâ, maneret verò arcuum descensu et subsequente ascensu descriptorum differentia 0, 4475. Deinde si arcus descriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{31}$ ad $67\frac{1}{8}$, differentia ista 0, 4475 ([d]) augeretur in duplicatâ illa ratione, ideóque evaderet 1, 5295. Hæc ita se haberent, ex hypothesi quod resistentia penduli esset in duplicatâ ratione velocitatis. Ergo si pendulum describeret arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, et longitudo ejus inter punctum suspensionis et centrum oscillationis esset 126 digitorum, differentia arcuum descensu et subsequente ascensu descriptorum foret 1, 5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318, 136. Rursus ubi pendulum superius ex globo ligneo constructum centro oscillationis, quod a puncto suspensionis digitos 126 distabat, describebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum descensu et ascensu descriptum ([e]) fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, quæ ducta in pondus globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49, 396. Duxi autem differentias hasce in pondera globorum, ut invenirem eorum resistentias. Nam differentiæ oriuntur ex resistentiis, ([f]) suntque ut resistentiæ directè et pondera inversè. Sunt igitur resistentiæ ut numeri 318, 136 et 49, 396. Pars autem resistentiæ globi minoris, quæ est in duplicatâ ratione velocitatis, erat ad resistentiam totam ut 0, 56752 ad 0, 61675, id est, ut 45, 453 ad 49, 396; et pars resistentiæ globi majoris

penduli, (ideóque inversè ut tempus); nam velocitates descensu per arcus quosvis acquisitæ sunt in ratione subduplicatâ abscissarum illis arcubus correspondentium; chordæ verò pro quibus arcus sumere hic liceat, sunt mediæ proportionales inter abscissas suas et circulorum diametros, si ergo sumantur arcus æquales in circulis inæqualibus, abscissæ eorum arcuum erunt inversè ut diametri circulorum sive inversè ut eorum radii, hoc est inversè ut longitudines pendulorum, ergo velocitates quæ sunt in ratione subduplicatâ abscissarum, erunt in ratione subduplicatâ inversâ longitudinum pendulorum; cùm ergo arcuum differentiæ sint ut resistentia et quadratum temporis conjunctim, resistentiaque sit ut quadratum velocitatis, sitque quadratum velocitatis inversè ut longitudo pendulorum; et quadratum temporis directè ut longitudo pendulorum, compensatis rationibus manebunt eædem arcuum differentiæ, si mutatâ pendulorum longitudine arcus æquales describantur.

([d]) * *Augeretur in duplicatâ illâ ratione* (per Cor. 2. Prop. XXXI.).

([e]) * *Fuit* $\frac{126}{121}$ *in* $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$. Cùm enim in cas. 6. experimenti primi penduli seu fili ad nodum usquè longitudo esset 121 digit. arcus descriptus erat $119\frac{5}{29}$ digit. et arcuum differentia $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ digit. Et mutatâ penduli longitudine in ratione 126 ad 121, arcus descriptus et differentia mutantur in eâdem ratione, fiebatque proindè arcus $\frac{126}{121} \times 119\frac{5}{29}$, seu $124\frac{3}{31}$ digit. et differentia $\frac{126}{121} \times \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ digit.

([f]) * *Suntque ut resistentiæ directè et pondera inversè.* Nam (per Cor. Prop. XXX.) differentiæ illæ in datos numeros ductæ sunt ad penduli longitudinem, ut resistentia ad gravitatem seu pondus globi penduli; data igitur penduli longitudine, differentiæ illæ sunt ut resistentiæ directe et pondera inversè.

propemodum æquatur ipsius resistentiæ toti; ideóque partes illæ sunt ut 318, 136 et 45,453 quamproximè, id est, ut 7 et 1. Sunt autem globorum diametri $18\frac{3}{4}$ et $6\frac{7}{8}$; et harum quadrata $351\frac{9}{16}$ et $47\frac{17}{64}$ sunt ut 7,438 et 1, id est, ut globorum resistentiæ 7 et 1 quamproximè. Differentia rationum haud major est, quam quæ ex fili resistentiâ oriri potuit. Igitur resistentiarum partes illæ quæ sunt, paribus globis, ut quadrata velocitatum, sunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum globorum.

Cæterum globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfectè sphæricus, et propterea in calculo hic allato minutias quasdam brevitatis gratiâ neglexi; de calculo accurato in experimento non satis accurato minimè sollicitus. Optarim itaque, (g) cùm demonstratio

(g) 187. * *Cùm demonstratio vacui*, &c. Utrum resistentia quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externâ superficie, an verò partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, experimentis globorum in medio resistente oscillantium inveniri potest. Nam si, exempli causâ, globorum in dato medio paribus velocitatibus motorum resistentiæ semper essent in duplicatâ diametrorum ratione, insensibilis foret in partibus internis resistentia; cum enim resistentia illa interna a numero, magnitudine, figurà et texturâ internarum partium penderet, non posset eadem constanter manere in globis æqualibus et heterogeneis, ligneis v. g. et plumbeis, nec in globis inæqualibus externarum superficierum, sed potiùs solidorum rationem sequeretur. Porrò superioribus experimentis jam probatum est in velocioribus globorum motibus, resistentias quadratis diametrorum proportionales esse quam proxime, concludendum igitur est nullam esse notabilem in partibus corporum internis resistentiam, quod tamen deinceps pluribus aliis argumentis demonstrabit Newtonus. Verum si medium quoddam æthereum vel longe subtilissimum omnes omnium corporum poros et meatus repleret, propter medii illius ætherei summam densitatem atque inertiam omni materiæ propriam, partes internæ corporum per magnam resistentiam sentirent. At qui Cartesianum mundi pleni systema emendarunt novisque inventis ornarunt eruditissimi sagacissimique mathematici, ii, repudiatis veteribus effugiis, quibus Cartesianorum vulgus utitur, ex subtilitate ac mobilitate ætheris et pororum quibus corpora omnia pertusa sunt dispositione petitis, hoc unum responsum proferunt, ætheream materiam corporum gravium motibus minime resistere, quod sit omni gravitate destituta. Duplicis itaque generis materiam in universo distinguunt, gravem alteram cujus partes in vorticulos divisæ non sunt, alteram non gravem, omnis tamen gravitatis causam, cujus partes ex tenuissimis variorum ordinum vorticulis elasticis constant. Cùm autem vis motrix ad datum corpus grave datâ celeritate movendum adhibenda, decrescente corporis hujus gravitate, in eâdem ratione decrescat, nullaque sit ætheris gravitas, consequens esse aiunt ut corpus grave quod in æthere datâ celeritate fertur, nonnisi infinitesimam motûs sui partem ex resistentia ætheris finito quovis tempore deperdat. Verùm præterquam quod totum hoc systema, ut elegans ac venustum, fictis fere ad arbitrium hypothesibus, quas Newtonus e physicâ experimentali vellet eliminari, nititur, plurimisque et gravissimis aliis ex mechanica atque astronomiâ difficultatibus premitur, adductum modò responsum his etiam laborat incommodis. Primum quidem evidens est, vim illam quæ ad corpus grave contrà gravitatis directionem sustinendum necessaria est, cum corporis pondere decrescere debere; sed non ità manifestum est vim motricem ad datum corpus grave datâ celeritate movendum adhibendam, in ratione ponderis decrescere oportere, ubi vis illius motricis directio gravitatis directioni opposita non est, sed illi perpendicularis aut cum illâ conspirans. Præterea materia omnis ætherea circa Solem, stellas, atque planetas singulos pernicissimo motu in orbem acta vi centrifugâ pollet quâ a centris magnorum vorticum, atque etiam a centris singulorum vorticulorum propriis recedere nititur, undè cæterorum corporum gravitas ortum habet; at vis illa centrifuga quæ cum vi centripetâ seu gravitate conferri potest, idem præstare in æthere debet ratione motûs in datâ materiæ quantitate datâ vi motrice imprimendi, quod in cæteris corporibus gravitas præstat. Nulla igitur esse ratio videtur cur corpus grave datâ celeritate motum nonnisi infinitesimam suæ celeritatis particulam ex ætheris non gravis resistentiâ amittat, siquidem illud vi centrifugâ pollet; et, si materia ætherea suâ vi centrifugâ vel certè vi indè ortâ corporum gravitatem producat, eorumque motum finitum acceleret et extinguat finito tempore, multò magis eadem materia corpus grave movere, aut motum ejus finito tempore extinguere debet, si finitâ velocitate in illud incurrat ac continuò urgeat, cum vis cen-

vacui ex his dependeat, ut experimenta cum globis et pluribus et majoribus et magis accuratis tentarentur. Si globi sumantur in proportione geometricâ, putà quorum diametri sint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progressione experimentorum colligetur quid in globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam verò conferendo resistentias diversorum fluidorum inter se, tentavi sequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine et altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aquâ fontanâ, fecique ut immersa pendula in medio aquæ oscillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum movebatur ut in tabulâ sequente descripsimus, existente videlicet longitudine penduli a puncto suspensionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oscillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Arcus descensu primo a puncto in filo notato descriptus, digitorum* | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| *Arcus ascensu ultimo descriptus, digitorum* | 48 | 24 | 12 | 6 | 3 | $1\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{16}$ |
| *Arcuum differentia motui amisso proportionalis, digitorum* | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
| *Numerus oscillationum in aqua* | | | $\frac{29}{60}$ | $1\frac{1}{5}$ | 3 | 7 | $11\frac{1}{4}$ | $12\frac{2}{3}$ | $13\frac{1}{3}$ |
| *Numerus oscillationum in aëre* | | $85\frac{1}{2}$ | 287 | 535 | | | | | |

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in aëre, et $1\frac{1}{5}$ in aquâ amissi sunt. Erant quidem oscillationes in aëre paulo celeriores quàm in aquâ. At si oscillationes in aquâ in eâ ratione accelerarentur ut motus pendulorum in medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oscillationum $1\frac{1}{5}$ in aquâ, quibus ([h]) motus idem ac

trifuga infinitesima sit, si cum vi quâ corpus spatium finitum tempore infinito describit, conferatur.

* Et quidem resistentia ex gravitate materiæ occurrentis non pendet, sed ex ejus inertiâ, quâ fit ut nullum corpus ab alio motum suscipiat quin tantumdem motus in eo destruat, idque mechanici communiter statuunt tam ex consensu omnium quorumcumque phænomenorum, ubi (remotâ gravitatis consideratione) nullus motus motum producendo non consumitur, quam ex principiis metaphysicis quâ liquet quod si res ita se non haberet, vel minimus motus infinitum motum produceret, totaque universi moles ex atomi progressione dimoveretur, quod absurdum. Unde si æther non resisteret, hoc est vi inertiæ careret, fingendæ forent duæ materiæ species, quarum altera vi inertiæ prædita foret, altera vero non, ita ut quamvis ab occurrente materia dimoveatur, nihil tollat de ejus motu; simul autem statuitur quod id æther corporum motum sistere potest aut mutare quomodocumque, nam si æther sit gravitatis causa oportet ut illa ipsa materia ætherea quæ corporis moti actione movetur, dum tamen nihil quicquam de illius motu tollit, possit illud idem corpus si sursum feratur sistere, in adversum ejus directionem mutare, &c. Quæ metaphysicè etiam inter se repugnare videntur, nec satis fuisse perpensa ab ingeniosissimis Cartesianismi restauratoribus.

([h]) * *Motus idem ac prius amitteretur.* Differentia arcuum motui amisso proportionalis, est ut resistentia et quadratum temporis conjunctim (per Cor. 5. Lem. X.); sed aucta paululum velocitate, resistentia quamproximè augetur in ejus ratione duplicatâ (per Hyp.) et simul qua-

prius amitteretur; ob resistentiam auctam et simul quadratum temporis diminutum in eâdem ratione illâ duplicatâ. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aëre oscillationibus 535 et in aquâ oscillationibus $1\frac{1}{5}$ amissi sunt; (i) ideóque resistentia penduli in aquâ est ad ejus resistentiam in aëre ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc est proportio resistentiarum totarum in casu columnæ quartæ.

Designet jam A V + C V $^2$ differentiam arcuum in descensu et subsequente ascensu descriptorum a globo in aëre cum velocitate maximâ V moto; et cum velocitas maxima in casu columnæ quartæ sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ, ut 1 ad 8; et differentia illa arcuum in casu columnæ quartæ ad differentiam in casu columnæ primæ (k) ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: scribamus in his casibus 1 et 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ et 4280 pro differentiis arcuum, et fiet A + C = $85\frac{1}{2}$ et 8 A + 64 C = 4280 seu A + 8 C = 535; indeque per reductionem æquationum proveniet 7 C = $449\frac{1}{2}$ et C = $64\frac{3}{14}$ et A = $21\frac{2}{7}$: atque ideò resistentia, (l) cùm sit ut $\frac{7}{11}$ A V + $\frac{3}{4}$ C V $^2$, erit ut $13\frac{6}{11}$ V + $48\frac{9}{56}$ V $^2$. Quare in casu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, resistentia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11}$ + $48\frac{9}{56}$ seu $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$; et idcirco resistentia penduli in aquâ est ad resistentiæ partem illam in aëre, quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus consideranda venit, (m) ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ et 535 ad $1\frac{1}{5}$ conjunctim, id est, ut 571 ad 1. Si penduli in aquâ oscillantis filum totum fuisset immersum, resistentia ejus fuisset adhuc major; adeò ut penduli in aquâ oscillantis resistentia illa, quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consi-

dratum temporis minuitur in eâdem ratione illâ duplicatâ, quia totus arcus descriptus numero oscillationum $1\frac{1}{5}$ idem quam proximè manet. Quarè motus amissus numero oscillationum $1\frac{1}{5}$ idem manet, si oscillationes in aquâ accelerentur ut dictum est (vid. not. (c) pag. 181.)

(i) * *Ideóque resistentia penduli.* Nam motus in aëre amissus unâ mediocri oscillatione, quâ arcus digit. 14 describitur, est pars $\frac{1}{535}$ motûs totius oscillationibus 535, amissi; et similiter motus in aquâ amissus æquali oscillatione quâ arcus digit. 14 pari velocitate describeretur est quam proximè pars $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ ejusdem motûs totius amissi oscillationibus $1\frac{1}{5}$ in aquâ et oscillationibus 535 in aëre. Quarè cùm resistentiæ totæ unâ oscillatione mediocri sint ut partes illæ motûs amissæ, est resistentia penduli in aquâ ad ejus resistentiam in aere ut $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ ad $\frac{1}{535}$, id est, ut 535 ad $1\frac{1}{5}$.

(k) * *Ut* $\frac{2}{535}$ *ad* $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$. Dividendo nimirum arcuum differentias per numerum oscillationum ut differentia in unâ mediocri oscillatione habeatur, quemadmodum suprà factum est.

(l) * *Cùm sit ut* $\frac{7}{11}$ *A V* + $\frac{3}{4}$ *C V* $^2$ (per Cor. Prop XXX.).

(m) * *Ut* $61\frac{12}{17}$ *ad*, &c. Est enim, ex suprà dictis, resistentia in aquâ ad resistentiam totam in aëre ut 535 ad $1\frac{1}{5}$ et resistentia tota in aëre ad resistentiæ partem illam in aëre quæ velocitatis quadrato proportionalis est ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$, et idcircò (ex æquo et per compositionem rationum) *resistentia penduli in aquâ est ad resistentiæ partem illam in aëre*, &c.

deranda venit, sit ad resistentiam ejusdem penduli totius, eadem cum velocitate in aëre oscillantis, (n) ut 850 ad 1 circiter, hoc est, ut densitas aquæ ad densitatem aëris quamproximè.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistentiæ penduli in aquâ, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum forte videatur) resistentia in aqua augebatur in ratione velocitatis plusquam duplicatâ. Ejus rei causam investigando, in hanc incidi, quod arca nimis angusta esset pro magnitudine globi penduli, et motum aquæ cedentis præ angustiâ suâ nimis impediebat. Nam si globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; resistentia augebatur, in duplicatâ ratione velocitatis quam proximè. Id tentabam construendo pendulum ex globis duobus, quorum inferior et minor oscillaretur in aquâ, superior et major proximè supra aquam filo affixus esset, et in aëre oscillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut (o) in tabulâ sequente describitur.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Arcus descensu primo descriptus* | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| *Arcus ascensu ultimo descriptus* | 12 | 6 | 3 | $1\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{16}$ |
| *Arcuum diff. motui amisso proport.* | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
| *Numerus oscillationum* | $3\frac{3}{8}$ | $6\frac{1}{2}$ | $12\frac{1}{12}$ | $21\frac{1}{5}$ | 34 | 53 | $62\frac{1}{5}$ |

Conferendo resistentias mediorum inter se, effeci etiam ut pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quasi trium, et diameter globi penduli quasi tertia pars digiti. Ad filum autem proximè supra mercurium affixus erat globus alius plumbeus satis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vasculum, quod capiebat quasi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo et aquâ communi, ut pendulo in fluido utroque successivè oscillante, invenirem proportionem resistentiarum; et prodiit resistentia argenti vivi ad resistentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id est, ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Ubi globum pendulum paulo majorem adhibebam, putà cujus diameter esset quasi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat resistentia argenti vivi in eâ ratione ad resistentiam aquæ, quam habet numerus 12

(n) * *Ut 850. ad 1 circiter.* Si enim resistentia fili ponatur ut suprà factum est, æqualis tertiæ parti resistentiæ totius in aëre, erit fere resistentia penduli in aquâ ad ejus resistentiam totam in aëre ut $535 - \frac{6}{13}$ ad $1\frac{1}{3} - \frac{6}{13}$, seu ut 2673 ad 4, et $2673 \times 61\frac{19}{17}$ ad $4 \times 48\frac{9}{56}$, ut 850 ad 1 circiter.

(o) * *In tabulâ sequente.* Arcuum differentiæ dividantur per numerum oscillationum in casu unoquoque, et prodibunt differentiæ in oscillatione unâ mediocri 1.1851; 0.3076; .0827; .0235; .0073; .0023; .0010 quæ sunt quam proximè ut quadrata velocitatum, sive ut 16; 4; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{64}$ $\frac{1}{256}$ in majoribus oscillationibus priores enim termini sunt proximè sequentium fere quadrupli, in minoribus verò oscillationibus præcedentes termini sunt in minore ratione ad sequentes.

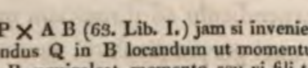
vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum est, propterea quod in his ultimis vas nimis angustum fuit pro magnitudine globi immersi. Ampliato globo, deberet etiam vas ampliari. Constitueram quidem hujusmodi experimenta in vasis majoribus et in liquoribus tum metallorum fusorum, tum aliis quibusdam tam calidis quam frigidis repetere: sed omnia experiri non vacat, et ex jam descriptis satis liquet resistentiam corporum celeriter motorum densitati fluidorum in quibus moventur proportionalem esse quam proximè. Non dico accuratè. Nam fluida tenaciora, pari densitate, proculdubio magis resistunt quàm liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quàm aqua pluvialis, aqua quàm spiritus vini. Verum in liquoribus, qui ad sensum satis fluidi sunt, ut in aëre, in aquâ seu dulci seu salsâ, in spiritibus vini, terebinthi et salium, in oleo a fæcibus per distillationem liberato et calefacto, oleoque vitrioli et mercurio, ac metallis liquefactis, et si qui sint alii, qui tam fluidi sunt ut in vasis agitati motum impressum diutius conservent, effusique liberrimè in guttas decurrendo resolvantur, nullus dubito quin regula allata satis accuratè obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis et majoribus et velocius motis instituantur.

Denique cùm nonnullorum opinio sit, medium quoddam æthereum et longè subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros et meatus liberrimè permeet; a tali autem medio per corporum poros fluente resistentia oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externâ superficie, an vero partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis ab unco chalybeo satis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad constituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concavâ, ut annulus arcu suo superiore aciei annixus liberrimè moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita constitutum deducebam a perpendiculo ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oscillante pendulo, supra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum suspensionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accuratè notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demisso notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpius, ut loca illa quam potui accuratissimè invenirem. Tum pyxidem plumbo et gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, unà cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio

partis reliquæ quæ inter uncum et pyxidem pendulam tendebatur. Nam filum tensum [p] dimidio ponderis sui pendulum a perpendiculo digressum semper urget. Huic ponderi addebam pondus aëris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quasi pars septuagesima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum plena, pondere suo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oscillantis eadem esset longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimisso, numerabam oscillationes quasi septuaginta et septem, donec pyxis ad locum secundo notatum rediret, totidemque subinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rursus totidem donec pyxis reditu suo attingeret locum quartum. Unde concludo quod resistentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad resistentiam pyxidis vacuæ quàm 78 ad 77. Nam si æquales essent ambarum resistentiæ, pyxis plena ob vim suam insitam septuagies et octies majorem vi insitâ pyxidis vacuæ, motum suum oscillatorium tanto diutius conservare deberet, atque ideò completis semper oscillationibus 78 [q] ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oscillationibus 77.

Designet igitur A resistentiam pyxidis in ipsius superficie externâ, et B resistentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; et si resistentiæ corporum æquivelocium in partibus internis sint ut materia, seu numerus particularum quibus resistitur: erit 78 B resistentia pyxidis plenæ in ipsius partibus internis: ideóque pyxidis vacuæ resistentia tota A + B erit ad

[p] * *Dimidio ponderis sui.* Fili tensi A B homogenei et æqualis ubique crassitiei centrum gravitatis est in loco medio C, (59. Lib. I.) ideóque vis quâ filum pondere suo toto P, ad rotandum circà A, urgetur, est ut A C $\times$ P, seu




ut $\frac{1}{2}$ P $\times$ A B (63. Lib. I.) jam si inveniendum sit pondus Q in B locandum ut momentum Q $\times$ A B æquivaleat momento seu vi fili totius; erit Q $\times$ A B $= \frac{1}{2}$ P $\times$ A B, ideóque Q $= \frac{1}{2}$ P. Quarè filum tensum dimidio ponderis sui P pendulum a perpendiculo digressum semper urget.

[q] * *Ad loca illa notata redire.* Si resistentiæ in singulis oscillationibus essent æquales, motus amissi, ut potè resistentiis proportionales, essent quoque æquales; sed motus amissi, paribus oscillationum temporibus, sunt ut massæ seu pondera corporum et spatia motibus amissis describenda conjunctim; ideóque spatia illa essent ut pondera inversè; hoc est, spatium motu pixidis vacuæ amisso in unâ oscillatione describendum, esset ad spatium motu pixidis plenæ oscillatione unâ amisso percurrendum ut 78 ad 1, et propterea spatia illa, completâ unicâ pixidis vacuæ oscillatione, et pixidis plenæ oscillationibus 78 absolutis, forent æqualia quamproximè, atquè ideò pixis plena, completis semper oscillationibus 78, ad loca notata rediret.

Cùm in hâc Sectione VI. Newtonus de solo corporum in cycloide oscillantium motu egerit, multa verò a recentioribus authoribus inventa sint, quibus generalis motuum in curvis quibuslibet theoria longe promota est, principia quibus usi sunt sequenti Problemate breviter exponemus.

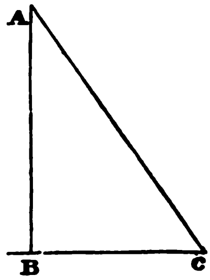
## PROBLEMATA.

188. Tendente vi gravitatis uniformi ubique perpendiculariter ad planum horizontis, definire motum corporis per curvam quamlibet ascendentis vel descendentis in medio uniformi cujus resistentia est ut velocitatis functio quælibet.

De corporum ascensu ac descensu in lineis rectis ad horizontem quomodocumque inclinatis

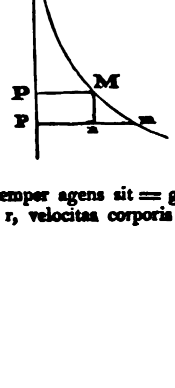
pyxidis plenæ resistentiam totam A + 78 B ut 77 ad 78, et divisim A + B ad 77 B, ut 77 ad 1, indeque A + B ad B ut 77 × 77 ad 1,

agere hic necessum non est; si enim corpus in lineâ rectâ A C ad horizontem B C utcumque inclinatâ ascendat vel descendat, resistentia et

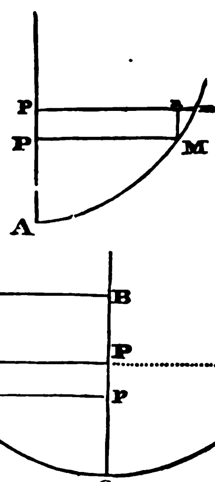


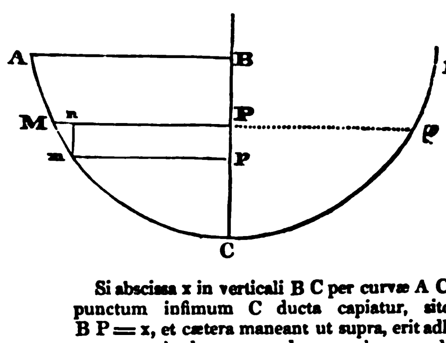

celeritas in quibuscumque locis et spatium descriptum ac tempus quo descriptum est, definiuntur per Prop. III. Sect. I., 8. et 9. Sect. II., 13. et 14. Sect. III. ac per notas iisdem locis adjunctas. Cum enim vis gravitatis secundum directionem A B urgentis sit ad ipsius partem quæ agit juxtà directionem A C, in datâ ratione lineæ A C ad A B, seu in datâ ratione sinûs totius ad sinum anguli inclinationis A C B; si loco vis gravitatis horizonti perpendicularis adhibeatur in calculis et constructionibus pars illius data quæ secundum directionem A C agit, constructiones calculique in citatis locis non mutantur. Superest igitur ut corporis in curvâ lineâ ascendentis aut descendentis motum definiamus.

Descendat primùm corpus e loco dato A per curvam A M, ducatur verticalis A P, ad quam ex punctis M, et m, infinitè propinquis demittantur perpendicula M P, m p, et ex M ad p m perpendiculum M n. Gravitas constans secundùm directionem verticali A P




parallelam semper agens sit = g, resistentia in loco M = r, velocitas corporis ibidem = v; tempus quo describitur A M = t, A P = x, A M = s, P p = M n = d x, et M m = d s. Jam verò M m, est ad M n, seu d s ad d x, ut vis gravitatis g ad ipsius partem in directione M m agentem quæ ideò erit $= \frac{g\,d\,x}{d\,s}$; subducatur vis resistentiæ r, et vis residua quâ corpus in loco M, juxtà directionem M m urgetur, erit $= \frac{g\,d\,x}{d\,s} - r$. Undè (18) fit $g\,d\,x - r\,d\,s = v\,d\,v$. Hujus autem æquationis fluens ità sumi debet ut evanescentibus x et s evanescat quoque v si velocitas corporis in loco A nulla sit, et fiat v = c, si velocitas corporis in A, sit = c. Simili modo si corpus e loco dato A per arcum A M ascendat, et omnia ut modò supposuimus maneant, erit (18) $g\,d\,x + r\,d\,s = - v\,d\,v$, cujus æquationis fluentem ità sumi oportet ut positis x et s = o, fiat v, æqualis velocitati in loco A datæ.




Si abscissa x in verticali B C per curvæ A C D punctum infimum C ducta capiatur, sitque B P = x, et cætera maneant ut supra, erit adhuc pro corporis descensu $g\,d\,x - r\,d\,s = v\,d\,v$; at pro ascensu per arcum C μ si data sint puncta A et B, dicaturque C μ vel A C μ = s, erit $- g\,d\,x + r\,d\,s = - v\,d\,v$, seu adhuc $g\,d\,x - r\,d\,s = v\,d\,v$, quia crescente s decrescit x et contrà. Si vero dicatur C P = x et C M = s, quia hæ quantitates respectu aliarum B P, et A M negativæ sunt, fiet pro descensu $- g\,d\,x + r\,d\,s = v\,d\,v$, seu $g\,d\,x - r\,d\,s = - v\,d\,v$, et pro ascensu si dicatur C μ = s erit $g\,d\,x + r\,d\,s = - v\,d\,v$ quarum æquationum altera in

et divisim A ad B ut 5928 ad 1. Est igitur resistentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejusdem resistentia in externâ superficie, et amplius. Sic verò disputamus ex hypothesi quod major illa resistentia pyxidis plenæ, non ab aliâ aliquâ causâ latente oriatur, sed ab actione solâ fluidi alicujus subtilis in metallum inclusum.

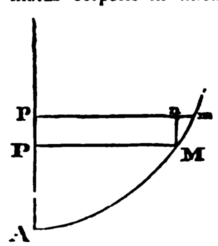
Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in quâ illud aliquando descripseram, intercidit. Unde fractas quasdam numerorum partes, quæ memoriâ exciderunt, omittere compulsus sum.

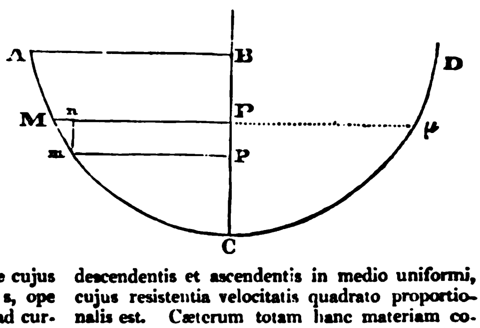
Nam omnia denuò tentare non vacat. Primâ vice, cùm unco infirmo usus essem, pyxis plena citius retardabatur. Causam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, et ejus oscillationibus obsequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum suspensionis immotum maneret, et tunc omnia ita evenerunt uti supra descripsimus.

alteram abit, mutato signo quantitati r, præfixo. Ex datâ igitur lege resistentiæ, loco r scribatur ipsius valor per v et datas quantitates, et ex datâ æquatione ad curvam A M, loco d x scribatur valor ejus per d s, s et datas quantitates in superioribus formulis seu æquationibus; et deinde per curvarum quadraturas vel per series, capiantur, ut oportet, formularum fluentes, obtinebitur v per s et contrà, atque etiam r per s, et quia tempus t, quo arcus s describitur est S. $\frac{d\,s}{v}$, dabitur quoque tempus. Q. e. i.

*Exempli causâ.* Sit resistentia partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis, quæ est hypothesis naturæ, seu sit $r = \frac{a\,a + v\,v}{b}$, dicanturque B P = x, A M = s et æquatio $g\,d\,x - r\,d\,s = v\,d\,v$ in hanc migrabit $g\,d\,x - \frac{a\,a\,d\,s}{b} = v\,d\,v + \frac{v\,v\,d\,s}{b}$; ut hoc secundum æquationis membrum debitam formam acquirat, ponatur $d\,s = \frac{\frac{1}{2}\,b\,d\,z}{z}$, seu $s = \frac{1}{2}\,b\,L.\,z$, æquatio evadet $g\,z\,d\,x - \frac{1}{2}\,a\,a\,d\,z = z\,v\,d\,v + \frac{1}{2}\,v\,v\,d\,z$, sumptis fluentibus, sit $g\,S.\,z\,d\,x - \frac{1}{2}\,a\,a\,z = \frac{1}{2}\,z\,v\,v$. Undè invenietur $v\,v = \frac{2\,g\,S.\,z\,d\,x}{z} - a\,a$. Est autem S. z d x, area curvæ cujus abscissa x et ordinata z; et z datur per s, ope logarithmicæ, et x per s ope æquationis ad curvam A M. Sit h numerus cujus logarithmus est unitas, seu L. h = 1, erit $s\,L.\,h = \frac{1}{2}\,b\,L.\,z$, et $\frac{2\,s}{b}\,L.\,h = L.\,h^{\frac{2s}{b}} = L.\,z$, atquè $h^{\frac{2s}{b}} = z$, undè habetur $v\,v = \frac{2\,g\,S.\,h^{\frac{2s}{b}}\,d\,x}{h^{\frac{2s}{b}}} - a\,a$.

Si in his æquationibus ponatur a = o, definietur motus corporis in lineâ qualibet curvâ descendentis et ascendentis in medio uniformi, cujus resistentia velocitatis quadrato proportionalis est. Cæterum totam hanc materiam copiosissimè et accuratissimè tractavit clariss. Eulerus Tom. II. Mechan.



## SECTIO VII.

### *De motu fluidorum et resistentiâ projectilium.*

### PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

*Si corporum systemata duo similia ex æquali particularum numero constent, et particulæ correspondentes similes sint et proportionales, singulæ in uno systemate singulis in altero, et similiter sitæ inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, et inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant (eæ inter se quæ in uno sunt systemate et eæ inter se quæ sunt in altero) et si non tangant se mutuo quæ in eodem sunt systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant, vel fugent se mutuò, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inversè et quadrata velocitatum directè: dico quod systematum particulæ illæ pergent inter se temporibus proportionalibus* (r) *similiter moveri.*

Corpora similia et similiter sita temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: putà si particulæ unius systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes et proportionales figurarum similium partes a particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi systemata, particulæ correspondentes, ob similitudinem incœptorum motuum, pergent similiter moveri, usque donec sibi mutuo occurrant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter (s) in lineis rectis per motûs leg. 1. Si viribus aliquibus se mutuo agitant, et vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inversè et quadrata velocitatum directè;

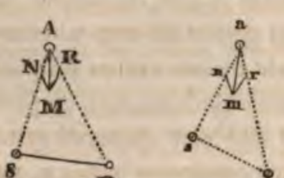
(r) * *Similiter moveri.* Sunto A et a, P et p, S et s, &c. particulæ in duobus systematibus sibi mutuò correspondentes. Particula A in suo systemate tempore T, describat spatium quam minimum A B, et particula correspondens a, in altero systemate tempore t, describat spatium a b, priori A B, simile similiterque situm, ità ut sit A B, ad a b, ut diameter particulæ A, ad diametrum particulæ a, sivè ut A S ad a s, vel P S ad p s, et angulus A S B æqualis angulo a s b, atque S A B æqualis s a b. Et aliæ sibi mutuò correspondentes particulæ quiescant vel simili modo moveantur. His positis, demonstrandum est, quod si sumantur tempora alia quæ sint ut T et t, particulæ correspondentes erunt utrinque similiter positæ.

(s) * *In lineis rectis per motûs leg.* 1. Ideóque ob velocitates uniformes et similes motuum directiones pergent similiter moveri temporibus proportionalibus, usque ad occursus suos primos.

quoniam particularum situs sunt similes et vires proportionales, (t) vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur, ex viribus singulis agitantibus (per legum Corollarium secundum) compositæ, similes habebunt determinationes, perinde ac si centra inter particulas similiter sita respicerent; et erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires singulæ componentes, hoc est, ut correspondentium particularum diametri inversè, et quadrata velocitatum directè: et propterea efficient ut correspondentes particulæ figuras similes describere pergant. (u) Hæc ita se habebunt (per Corol.

(t) * *Vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur similes habebunt determinationes, et erunt ad invicem ut correspondentium particularum diametri inversè et quadrata velocitatum directè.*

* Particula A inter duas S et P, et particula a inter duas s et p sint similiter sitæ, et quâcumque celeritate in directione similiter positâ particulæ illæ A et a ferantur, trahanturque vel fugentur illæ particulæ A et a à particulis S et P, s et p per vires quæ sint ut diametri particularum correspondentium inversè sive ut lineæ homologæ inversè, et quadrata velocitatum directè, dico primò quod directio vis compositæ trahentis particulas A et a similiter posita erit in utroque systemate, nam anguli S A P et s a p, quos faciunt vires agentes, ex hypothesi æquales sunt, vis autem composita sequetur diagonalem quæ faciat angulos cum directione utriusque vis componentis quorum sinus sint reciprocè ut vires agentes, per naturam virium compositarum, sit ea diagonalis hic A M, illic a m, erit ergo sinus anguli S A M,




ad sinum anguli P A M, inversè ut vis particulæ S ad vim particulæ P sive directè ut lineæ homologæ S A et P A (nam quoniam de unico corpore A nunc agitur ratio quadratorum velocitatum hic nihil mutat) pariter sinus anguli s a m est ad sinum anguli p a m ut s a ad p a; sed est S A ad P A sicut s a ad p a ex hypothesi, ergo anguli æquales S A P et s a p in eadem ratione secantur per lineas A M, a m, ideóque anguli S A M et s a m, M A P et m a p sunt æquales, ergo directio vis compositæ trahentis particulas A et a in singulo systemate similiter est posita. Q. erat 1.

2. Vires illæ compositæ erunt ut particularum diametri inversè et quadrata velocitatum directè.

Secetur utcumque in directione A S lineola A N quæ vim particulæ S exprimat, ducaturque N M, parallela A P, et ex M ducatur M R parallela A S, fiet parallelogrammum A N M R, in quo M R = A N, et angulus A M R = ang. M A N, ideóque A N ad A R ut sinus anguli M A R ad sinum ang. M A N, sive ut P A ad S A, hoc est ut vires particularum S et P, ideóque A R exprimet vim particulæ P, et A M exprimet vim compositam ex viribus S et P. Sumatur in a s lineola a n, quæ sit ad A N, ut a s ad A S inversè, et ut quadratum velocitatis in a ad quadratum velocitatis in A directè, ductisque n m et m r parallelis lineis a p, a s erunt a n et a r ut vires particularum s et p, et a m exprimet vim ex iis compositam.

Sed ob similitudinem triangulorum A N M, a n m est A N ad A M sicut a n ad a m, sive vis particulæ A, ad vim compositam ex particulis S et P, ut vis particulæ a ad vim compositam ex particulis s et p, ideóque vicissim, vis particulæ A ad vim particulæ a ut, vis composita ex vi particularum S et P, ad vim compositam ex viribus particularum s et p; sed vis particulæ A est ad vim particulæ a, inversè ut particularum diametri, et directè ut velocitatum quadrata ex hypothesi, ergo vires compositæ sunt in eâdem ratione. Q. e. d.

Idem ratiocinium ad vires compositas ex pluribus particulis extendetur. Unde *vires totæ*, &c.

(u) * *Hæc ita se habebunt* (per Cor. 1. et 8. Prop. IV. Lib. I.). Aut quod idem est per hoc Lemma.

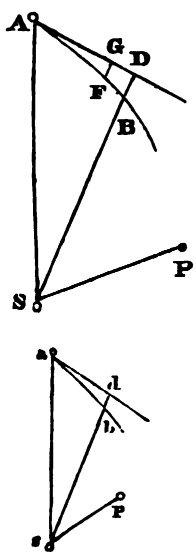
189. *Lemma.* Si corpora duo A, a, circà centra immota S, s, projiciantur secundum directiones A D, a d, quæ cum distantiis A S et a s æquales angulos D A S, d a s constituunt, et urgeantur viribus acceleratricibus centra illa S, s respicientibus, quæ semper sint inter se ut quadrata velocitatum corporum directè et distantiæ a centris inversè, corpora illa figuras similes circà centra S et s describent, similesque et proportionales figurarum illarum partes temporibus proportionalibus percurrent.

In projectilium directionibus capiantur partes quam minimæ A D, a d distantiis A S, a s proportionales. Jungantur S D, s d et corpora A, a temporibus quibusvis T, t describant arcus A B, a b qui lineas S D, s d attingunt. Sumantur arcus A F, a b qui eodem tempusculo descripti sint, et ductâ F G parallelâ S D, erit

1. et 8. Prop. IV. Lib. I.) si modò centra illa quiescant. Sin moveantur, quoniam (x) ob translationum similitudinem, similes manent eorum situs inter systematum particulas; similes inducentur mutationes in figuris quas particulæ describunt. Similes igitur erunt correspondentium et similium particularum motus (y) usque ad occursus suos primos, et propterea similes occursus, et similes reflexiones, et subinde (per jam ostensa) similes motus inter se donec iterum in se mutuo inciderint, et sic deinceps in infinitum. Q. e. d.

*Corol.* 1. Hinc si corpora duo quævis, quæ similia sint et ad systematum particulas correspondentes similiter sita, inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, sintque eorum magnitudines ac densitates ad invicem ut magnitudines ac densitates correspondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus similiter moveri.

(4. Lib. I.) F G ad b d ut vis centralis quâ corpus A urgetur ad vim centralem quâ urgetur corpus a; et quia vires illæ (per Hyp.) sunt ut quadratum velocitatum directè et distantiæ A S, a s, inversè, velocitates autem sunt ut spatia quæ




simul descripta fuissent in tangente A G, a d, erit F G ad b d, ut A G $^2$ × a s ad a d $^2$ × A S. Sed (per Cor. 1. Lem. XI.) B D : F G = A D $^2$ : A G $^2$; quarè (per compositionem rationum et ex æquo) B D : b d = A D $^2$ × a s : a d $^2$ × A S. Cùm igitur ob triangulorum A S D, a s d, similitudinem (ex Hyp.) sit A D : a d = A S : a s et ideò A D $^2$ × a s : a d $^2$ × A S = A S : a s; erit B D : b d = A S : a s, et ob similitudinem figurarum, ut A D ad a d, ideóque ob æquales angulos D et d, triangula A D B, a d b erunt similia, et propterea arcus A B, a b, similes et similiter siti. Simili modo demonstrabitur quod corpora e locis B et b progressa similes arcus ac similiter positos describant, atque ità deinceps. Describent ergò figuras similes circà centra S et s. His verò demonstratis patet (196. Lib. I.) quod describent similes et proportionales figurarum similium partes temporibus proportionalibus, seu quæ semper sint ut tempora T et t.

(x) * *Ob translationum similitudinem*. Oriuntur enim centrorum illorum translationes ex causis proportionalibus et similiter agentibus, videlicet ex similibus particularum similium et correspondentium motibus, adeò ut quemadmodum initio motûs centra similiter moveri cœperunt, similiter quoque deinceps moveri pergant.

(y) * *Usque ad occursus suos primos*, &c. Nam cùm particularum correspondentium distantiæ, post quævis tempora proportionalia, sint semper in datâ diametrorum ratione in duobus systematibus (ex dem.), necesse est ut distantiæ temporibus proportionalibus evanescant, et proindè ut particularum occursus primi contingant, ubi particulæ illæ figurarum similium partes similes descripserunt. Ex quo sequitur particularum illarum occursus primos similes fore, tum ratione directionum, quod jam demonstratum est, tum etiam ratione velocitatum et quantitatum motûs. Siquidem spatia percursa temporibus proportionalibus sunt semper in datâ ratione, ideóque velocitates in locis similibus sunt semper in datâ ratione, et indè ob particularum correspondentium similitudinem et datam densitatum rationem, quantitates motûs quæ sunt ut velocitates et densitates et volumina conjunctim, in locis similibus manent in datâ ratione. Reflexiones igitur quæ ex ejusmodi motibus atque occursibus similibus nascuntur; similes erunt.

Est enim eadem ratio partium majorum systematis utriusque atque particularum.

*Corol.* 2. Et similes et similiter positæ systematum partes omnes quiescant inter se: et earum duæ, quæ cæteris majores sint, et sibi mutuo in utroque systemate correspondeant, secundum lineas similiter sitas simili cum motu utcumque moveri incipiant: hæ similes in reliquis systematum partibus excitabunt motus, et pergent inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri; atque ideò spatia diametris suis proportionalia describere.

## PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

*Iisdem positis, dico quod systematum partes majores resistuntur in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum suarum et duplicatâ ratione diametrorum et ratione densitatis partium systematum.*

Nam resistentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ systematum se mutuo agitant, partim ex occursibus et reflexionibus particularum et partium majorum. Prioris autem generis resistentiæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, [z] id est, ut vires totæ acceleratrices et quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (per Hypothesin) ut quadrata velocitatum directè et distantiæ particularum correspondentium inversè et quantitates materiæ in partibus correspondentibus directè: ideóque cum distantiæ particularum systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in systemate priore ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, [a] et quantitates materiæ sint ut densitates partium et cubi diametrorum; resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum et quadrata diametrorum et densitates partium systematum. Q. e. d. [b] Posterioris generis resistentiæ sunt

[z] * *Id est, ut vires totæ acceleratrices et quantitates materiæ* (per Def. 8. Lib. I.).

[a] * *Et quantitates materiæ sint*, &c. Quantitates materiæ sunt ut densitates et volumina partium conjunctim (2. Lib. I.), et ob partium similitudinem, volumina sunt ut cubi laterum homologorum, seu diametrorum, ideóque quantitates materiæ sunt ut densitates partium et cubi diametrorum.

[b] * *Posterioris generis resistentiæ*, &c. Si enim vires reflexionum supponantur æquales, resistentiæ sunt ut numeri reflexionum seu occursuum; et si numeri reflexionum æquentur, resistentiæ sunt ut vires reflexionum correspondentium; undè, conjunctis his rationibus, resistentiæ quæ ex particularum et partium majorum occursibus et reflexionibus oriuntur, sunt semper ut reflexionum correspondentium numeri et vires conjunctim. Numeri autem reflexionum, cæteris paribus, sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directè, et, cæteris paribus, sunt inversè ut spatia inter particularum et partium correspondentium occursus seu reflexiones intercepta, id est, inversè ut partium correspondentium diametri, ideóque *numeri reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directè* et earumdem diametri inversè. *Et vires reflexionum sunt ut* motûs quantitates

ut reflexionum correspondentium numeri et vires conjunctim. Numeri autem reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directè, et spatia inter earum reflexiones inversè. Et vires reflexionum sunt ut velocitates et magnitudines et densitates partium correspondentium conjunctim; id est, ut velocitates et diametrorum cubi et densitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, resistentiæ partium correspondentium sunt ad invicem ut quadrata velocitatum et quadrata diametrorum et densitates partium conjunctim. Q. e. d.

*Corol.* 1. Igitur si systemata illa sint fluida duo elastica ad modum aëris, et partes eorum quiescant inter se: corpora autem duo similia et partibus fluidorum quoad magnitudinem et densitatem proportionalia, et inter partes illas similiter posita, secundum lineas similiter positas, utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ fluidorum se mutuo agitant, sint ut corporum projectorum diametri inversè, et quadrata velocitatum directè: corpora illa temporibus proportionalibus similes excitabunt motus in fluidis, et spatia similia ac diametris suis [c] proportionalia describent.

*Corol.* 2. Proinde in eodem fluido projectile velox resistentiam patitur, quæ est in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè. Nam si vires, quibus particulæ distantes se mutuo agitant, augerentur in duplicatâ ratione velocitatis, [d] resistentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè; [e] ideóque in medio, cujus partes ab invicem distantes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicatâ ratione velocitatis accuratè. Sunto igitur media tria A, B, C ex partibus similibus et æqualibus et secundum distantias æquales regulariter dispositis constantia. Partes mediorum A et B fugiant se mutuo viribus quæ sint ad invicem ut T et V, illæ medii C ejusmodi viribus omninò destituantur. Et si corpora quatuor æqualia D, E, F, G in his mediis moveantur, priora duo D et E in prioribus

in occursibus *id est, ut velocitates et diametrorum cubi et densitates partium correspondentium. Et conjunctis his omnibus rationibus,* &c.

[c] * *Proportionalia describent.* Probatur enim ut in dem. Prop. XXXII. Lemmate (189) similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus a corporibus illis semper describi. Undè Corollarium hoc patet (per Cor. 1. et 2. Prop. XXXII.).

[d] * *Resistentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè.* Nam si idem corpus variâ cum velocitate in uno eodemque fluido similiter projiciatur, eædem sunt resistentiæ, ac si corpora duo similia et æqualia similiter projicerentur in duobus fluidis priori omnino paribus; sed in hoc casu, ob æquales inter se partium correspondentium diametros et densitates, resistentiæ sunt in duplicatâ ratione velocitatum accuratè (per Prop. XXXIII. et ejus Corol. 1.). Ergò, &c.

[e] * *Ideòque in medio,* &c. In medio cujus partes ab invicem distantes sese viribus quibuscumque in ratione velocitatis duplicatâ crescentibus agitant, resistentia (ex modò dem.) est semper in eâdem ratione duplicatâ; quarè si vires illæ quibus particulæ sese agitant, supponantur quàm minimæ, manebit semper resistentia in ratione velocitatis duplicatâ accuratè; evanescant tandem illæ vires, manet resistentia in ratione velocitatis duplicata; sed idem melius patet per secundam partem demonstrationis Propositionis hujus XXXIII.

duobus A et B, et altera duo F et G in tertio C; sitque velocitas corporis D ad velocitatem corporis E, et velocitas corporis F ad velocitatem corporis G in subduplicatâ ratione virium T ad vires V: resistentia corporis D erit ad resistentiam corporis E, et resistentia corporis F ad resistentiam corporis G, [f] in velocitatum ratione duplicatâ; et propterea resistentia corporis D erit ad resistentiam corporis F ut resistentia corporis E ad resistentiam corporis G. Sunto corpora D et F æquivelocia ut et corpora E et G; et augendo velocitates corporum D et F in ratione quâcunque, ac diminuendo vires particularum medii B in eâdem ratione duplicatâ, [g] accedet medium B ad formam et conditionem medii C pro lubitu, et idcirco resistentiæ corporum æqualium et æquivelocium E et G in his mediis, perpetuò accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cùm resistentiæ corporum D et F sint ad invicem ut resistentiæ corporum E et G, accedent etiam hæ similiter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur D et F, ubi velocissimè moventur, resistentiæ sunt æquales quam proximè: et propterea cùm resistentia corporis F sit in duplicatâ ratione velocitatis, erit resistentia corporis D in eâdem ratione quàm proximè.

[h] *Corol.* 3. Corporis in fluido quovis elastico velocissimè moti eadem ferè est resistentia ac si partes fluidi viribus suis centrifugis destituerentur, seque mutuo non fugerent: si modo fluidi vis elastica ex particularum viribus centrifugis oriatur, et velocitas adeò magna sit ut vires non habeant satis temporis ad agendum.

*Corol.* 4. Proinde cùm resistentiæ similium et æquivelocium corporum, in medio cujus partes distantes se mutuo non fugiunt, [i] sint ut quadrata diametrorum; sunt etiam æquivelocium et celerrimè motorum corporum resistentiæ in fluido elastico ut quadrata diametrorum quàm proximè.

*Corol.* 5. Et cùm corpora similia, æqualia et æquivelocia, in mediis ejusdem densitatis, quorum particulæ se mutuo non fugiunt, sive particulæ illæ sint plures et minores, sive pauciores et majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus

[f] * *In velocitatum ratione duplicatâ.* (Ex demonstratis initio Corol. hujus.)

[g] * *Accedet medium B,* &c. Si enim velocitates corporum D et F, quam maximè augerentur vires particularum medii B, manentibus viribus medii A et velocitate corporis E quam maximè decrescerent, quia est semper vis medii A ad vim medii B ut quadratum velocitatis corporis D ad quadratum velocitatis corporis E.

[h] * *Corollarium 3.* Patet per Cor. 2. in quo vis T, quâ particulæ medii A in quo corpus D movetur se fugiunt, qualiscumque supponitur; corporum D et F ubi velocissimè moventur, resistentiis manentibus æqualibus quam proximè, licet medii C in quo corpus F movetur, particulæ viribus centrifugis prorsus destituantur. Patet etiam ex eo quod supponatur vires non habere satis temporis ad agendum, unde casus redit ad eum in quo vires illæ nullæ sunt.

[i] * *Sint ut quadrata diametrorum.* Per 2. partem dem. Prop. hujus, ob datas corporum velocitates et medii densitatem datam.

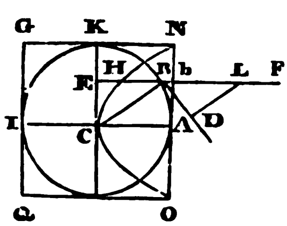
quantitatem imprimant, et vicissim (per motûs legem tertiam) æqualem ab eâdem reactionem patiantur, hoc est, æqualiter resistantur: manifestum est etiam quod in ejusdem densitatis fluidis elasticis, ubi velocissimè moventur, æquales sint eorum resistentiæ quam proximè; sive fluida illa ex particulis crassioribus constent, sive ex omnium subtilissimis constituantur. Ex medii subtilitate resistentia projectilium celerrimè motorum non multum diminuitur.

*Corol.* 6. Hæc omnia ita se habent in fluidis, quorum vis elastica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod si vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expansione ad instar lanæ vel ramorum arborum, aut ex aliâ quâvis causâ, quâ motus particularum inter se redduntur minus liberi: resistentia, ob minorem medii fluiditatem, erit major quàm in superioribus Corollariis.

## PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII.

*Si globus et cylindrus æqualibus diametris descripti, in medio raro ex particulis æqualibus et ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constante, secundùm plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit resistentia globi duplo minor quàm resistentia cylindri.*

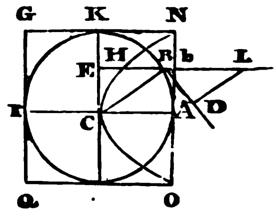
Nam quoniam actio medii in corpus eadem est (per legum Corol. 5.) sive corpus in medio quiescente moveatur, sive medii particulæ eâdem cum velocitate (k) impingant in corpus quiescens: consideremus corpus tanquam quiescens, et videamus quo impetu urgebitur a medio movente. Designet igitur A B K I corpus sphæricum centro C semi-diametro C A descriptum, et incidant particulæ medii datâ cum velocitate in corpus illud sphæricum, secundum rectas ipsi A C parallelas: sitque F B ejusmodi recta.




In eâ capiatur L B semi-diametro C B æqualis, et ducatur B D quæ sphæram tangat in B. In K C et B D demittantur perpendiculares B E, L D, et vis quâ particula medii, secundùm rectam F B obliquè incidendo, globum ferit in B, erit ad vim quâ particula eadem cylindrum O N G Q axe A C I circa globum descriptum perpendicula-

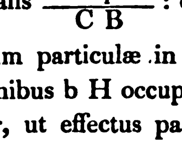
(k) * *Impingant in corpus quiescens.* Eadem enim est in utroque casu velocitas respectiva, eademque proindè vis percussionis (per dem. in Cor. 5. leg. mot.) idem quoque manifestum est per motûs leg. 3. quia fluidum et corpus ob reactionem actioni æqualem et contrariam, in utroque casu in se mutuò agunt.

riter feriret in b, (l) ut L D ad L B vel B E ad B C. Rursus efficacia hujus vis ad movendum globum secundum incidentiæ suæ plagam F B vel A C, est ad ejusdem efficaciam ad movendum globum secundùm plagam determinationis suæ, id est, secundùm plagam rectæ B C quâ globum directè urget (m) ut B E ad B C. Et (n) conjunctis rationibus, efficacia particulæ in globum secundum rectam F B obliquè incidentis, ad movendum eundem secundùm plagam incidentiæ suæ, est ad efficaciam particulæ ejusdem secundum eandem rectam in cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipsum movendum in plagam eandem, ut B E quadratum ad B C quadratum. Quare si in b E, quæ perpendicularis est ad cylindri basem circularem N A O et æqualis radio A C, sumatur b H æqualis $\frac{\text{B E quad.}}{\text{C B}}$: erit b H ad b E ut effectus particulæ in globum ad effectum particulæ in cylindrum. (o) Et propterea solidum quod a rectis omnibus b H occupatur erit ad solidum quod a rectis omnibus b E occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in cylindrum. (p) Sed solidum prius est parabolois




(l) * *Ut L D ad L B vel B E ad B C.* Si enim recta data L B exponat vim quâ particula medii circularem basim cylindri perpendiculariter ferit in b, et vis illa (per leg. Cor. 2.) resolvatur in vires B D, L D, vis B D juxtà directionem tangentis in B agens nullam efficaciam habet ad globum promovendum et recta L D vim exponet quâ particula medii globulum perpendiculariter ferit in B. Quia verò radius C B, tangenti perpendicularis est, et ideò (per constr.) D L parallela C B, triangula rectangula C E B, B D L, similia sunt, imo ob B L = C B (per constr.) æqualia; est igitur L D ad L B ut B E ad B C.

(m) 190. * *Ut B E ad B C.* Vis L D ductâ ex puncto D ad L B perpendiculari D M, iterum resolvatur in vires L M et M D, et ob




triangulorum L M D, L D B, similitudinem, erit vis L M ad vim L D, ut L D ad L B, seu ut B E ad B C; nulla verò ratio habenda est vis M D, cujus directio perpendicularis est ad axem A I, quia simili constructione factâ ad alteram hujus axis partem in puncto sphæræ quod puncto B directè oppositum est, vis M D, vi æquali et directè oppositâ eliditur. Unde sola consideranda est vis L M, quæ secundùm directionem axi A I parallelam agit. Est autem vis L M ad vim L B quâ particula medii circularem basim cylindri perpendiculariter ferit in b, ut $\text{L D}^2$ ad $\text{L B}^2$, ob continuè proportionales L M, L D, L B.

(n) * *Conjunctis rationibus.* Et ex æquo.

(o) * *Et propterea solidum.* Si in omnibus rectæ N A punctis erigantur perpendicula ut b H et b E, sitque N H C curva quam punctum H perpetuò tangit, et recta K C locus omnium punctorum E; solidum quod perpendiculis omnibus b H, per totam basim cylindri ductis occupatur, æquale erit conoidi seu figuræ solidæ quæ ex rotatione figuræ planæ N H C A circà axem C A factâ generatur, et solidum quod a rectis omnibus b E occupatur erit cylindrus ex rotatione rectanguli A K circà eundem axem C A factâ descriptus.

(p) * *Sed solidum prius.* Cùm (per constr.) sit $\text{b H} = \frac{\text{B E}^2}{\text{C B}}$ ideóque $\text{b H} \times \text{C B} = \overline{\text{B E}}^2 = \overline{\text{B C}}^2 - \overline{\text{C E}}^2$ et (ex naturâ circuli) B C = C A = K C, ideóque $\text{B E}^2 = \text{K C}^2 - \text{C E}^2$ et $\text{b H} \times \text{C B}$, seu $\overline{\text{K C} - \text{E H}} \times \text{K C}$, seu $\text{K C}^2 - \text{K C} \times \text{E H} = \text{K C}^2$

vertice C, axe C A et latere recto C A descriptum, et solidum posterius est cylindrus paraboloidi circumscriptus, (†) et notum est quod parabolois sit semissis cylindri circumscripti. Ergo vis tota medii in globum est duplo minor quam ejusdem vis tota in cylindrum. Et propterea si particulæ medii quiescerent, et cylindrus ac globus æquali cum velocitate moverentur, foret resistentia globi duplo minor quàm resistentia cylindri. Q. e. d.

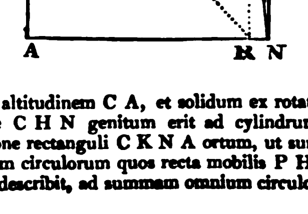
*Scholium.*

(q) Eâdem methodo figuræ illæ inter se quoad resistentiam comparari possunt, eæque inveniri quæ ad motus suos in mediis resistentibus conti-

— C E², ideóque K C × E H = C E²; sed si ex puncto H duceretur ad C A, ordinata perpendicularis, hæc esset æqualis C E, et abscinderet a C A, partem æqualem E H. Quarè rectangulum sub abscissâ et datâ lineâ K C sive C A, æquale est quadrato ordinatæ ad C A perpendicularis; unde curva C H N, (per Theor. I. de parab.) est parabola cujus vertex C, axis C A, et latus rectum C A.

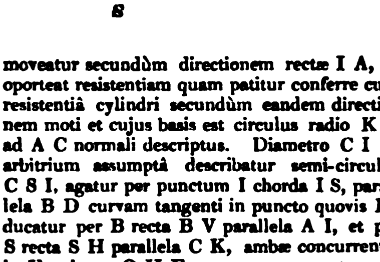
(†) * *Et notum est quod*, &c.

191. *Lemma.* Parabolois seu solidum ex rotatione parabolæ C H N, circà axem C A genitum est semissis cylindri circumscripti, qui producitur ex rotatione rectanguli A K circà latus C A. Per punctum mobile P, erigatur ad axem C A normalis P M, parabolam secans in H, et rectam K N in M; et in rotatione figuræ totius circà axem C A, lineæ P H et P M circulos describent, qui erunt inter se ut radiorum P H, I M quadrata, seu (ex naturâ parabolæ) et ob P M = A N, ut abscissæ C P, C A. Ducatur jam punctum P cum verticali P H M per



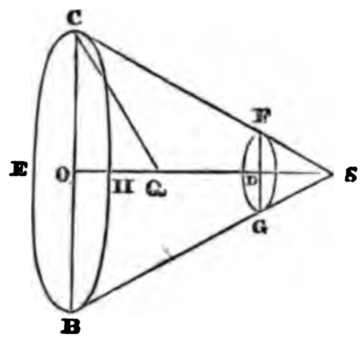

totam altitudinem C A, et solidum ex rotatione figuræ C H N genitum erit ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K N A ortum, ut summa omnium circulorum quos recta mobilis P H rotando describit, ad summam omnium circulorum quos describit recta P M, hoc est, ut summa omnium C P, ad summam omnium C A. In lineâ A N capiatur A R æqualis A C, jungatur C R secans P H in L, et erigatur ad A R, perpendicularis R Q, secans P M in V; cum sit semper P L = C P, et P V = C A, summa omnium C P, seu P L, per totam altitudinem C A, est triangulum isoscele C R A, et summa omnium C A, seu P V, per eandem altitudinem C A, est quadratum C A R Q; cum igitur triangulum C R A, sit semissis quadrati C A R Q, parabolois est etiam semissis cylindri circumscripti. Q. e. d.

(q) 192. *Eâdem methodo*, &c. Solidum ex rotatione curvæ cujusvis K B A, circà rectam A I positione datam genitum in medio resistente




moveatur secundùm directionem rectæ I A, et oporteat resistentiam quam patitur conferre cum resistentiâ cylindri secundùm eandem directionem moti et cujus basis est circulus radio K C ad A C normali descriptus. Diametro C I ad arbitrium assumptâ describatur semi-circulus C S I, agatur per punctum I chorda I S, parallela B D curvam tangenti in puncto quovis B; ducatur per B recta B V parallela A I, et per S recta S H parallela C K, ambæ concurrentes in H, sitque Q H E curva quam punctum H perpetuò tangit; et completo rectangulo C K G I, resistentia solidi rotundi per conversionem cur-

nuandos aptiores sunt. Ut si base circulari C E B H, quæ centro O, radio O C describitur, et altitudine O D, construendum sit frustum coni




C B G F, quod omnium eâdem basi et altitudine constructorum et secundùm plagam axis sui versus D progredientium frustorum minimè

væ K B A circà C A geniti erit ad resistentiam basis ipsius, seu circuli centro C et radio C K descripti, ut solidum ex rotatione figuræ K Q H E circà C I genitum, ad cylindrum rotatione rectanguli C K G I circà eandem C I factâ descriptum. Producatur enim H B ad L, ut sit B L = C I; ex puncto L demittatur ad B D perpendicularis L D, et ex D ad B L perpendicularis D M; et eodem modo quo suprà (190) patet efficaciam particulæ medii ad movendum solidum totum K B A secundùm plagam incidentiæ suæ L B esse ad efficaciam particulæ ejusdem secundum eandem rectam in basim circularem K C, perpendiculariter in P ad cylindrum qui rotatione rectanguli C K G I describitur movendum




in plagam eandem, ut est $L D^2$ ad $L B^2$, seu etiam ut est L M ad L B; sed (per constr.) C I = L B, et ob angulum S I C = D B L et angulum I S C = B D L, est etiam C T seu P H = L M; quarè solidum quod a rectis omnibus P H, occupatur, erit ad solidum quod a rectis omnibus P V = C I, occupatur, aut quod idem est, solidum ex rotatione figuræ C K Q H E circà C I, erit ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K G I genitum, ut resistentia solidi quod figura C K B A circà C A, rotata describit, ad resistentiam baseos circularis quam describit recta C K quæ eadem est cum resistentiâ cylindri cujuslibet ejusdem basis, quia superficies cylindri quam recta K G rotando circà A I describit, nullam resistentiam patitur, secundùm directionem motûs ipsi K G parallelam. Q. e. d.

193. Ex constructione liquet, si recta quæ curvam K B A tangit in A sit ad axem C A normalis, punctum E coincidere cum puncto I, et si recta tangens curvam K B A, in K perpendicularis sit ad K C, punctum Q in quo curva E H secat latus K G coincidere cum puncto K.

194. Ex puncto B demittatur ad C A perpendicularis B R, dicaturque C I = a, A R = x, B R = H T = C P = y, H P = C T = z, B N = d x, N n perpendicularis ad B L curvæque occurrens in n = d y, ac proindè $B n^2 = d x^2 + d y^2$. Et quoniam triangula B n N, I C S, similia sunt (per constr.) erit $B n^2 : N n^2 = C I^2 : C S^2 = C I : C T$, hoc est, $d x^2 + d y^2 : d y^2 = a : z$. Et propterea $a\, d y^2 = z\, d x^2 + z\, d y^2$, formula per quam ex datâ æquatione ad curvam K B A, inveniri potest æquatio ad curvam alteram E H Q et contrà; nam quoniam C P = y, si loco d x eruatur ex æquatione curvæ K B A ejus valor in y et d y habebitur æquatio quæ continebit z, y et d y sive C P, P H et fluxionem P C, cum constantibus.

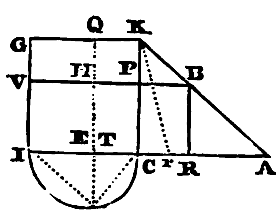
195. Ducta sit ordinata p h alteri P H infinitè propinqua, et si radius sit ad peripheriam circuli ut unitas ad numerum p, erit p y peripheria circuli quem linea P C circà axem C I, rotando describit, ideóque annulus cylindricus quem arcus P H h p in eâdem convolutione

resistatur: (r) biseca altitudinem O D in Q et produc O Q ad S ut sit Q S æqualis Q C, et erit S vertex coni cujus frustum quæritur.

describit, erit $p\,z\,y\,d\,y$, et inde solidum ex rotatione figuræ C P H E, genitum, erit $S.\,p\,z\,y\,d\,y$, fluente hâc itâ sumptâ ut factâ $y = o$ ea evanescat. Quare cùm cylindrus convolutione rectanguli C P V I, descriptus sit $\frac{1}{2}\,p\,a\,y\,y$, resistentia solidi ex revolutione figuræ A B R geniti, erit ad resistentiam baseos ipsius circuli radio B R descripti ut $S.\,p\,z\,y\,d\,y$ ad $\frac{1}{2}\,p\,a\,y\,y$, seu ut $S.\,z\,y\,d\,y$ ad $\frac{1}{2}\,a\,y\,y$.

196. Sit K B A ellipsis vel hyperbola cujus vertex A axis principalis A I. Sit semi-axis principalis $= b$, semi-latus rectum $= c$, A R $= x$, R B $= y$, et erit $b\,y\,y = 2\,b\,c\,x - c\,x\,x$ æquatio ad ellipsim; et $b\,y\,y = 2\,b\,c\,x + c\,x\,x$, æquatio ad hyperbolam. Prioris æquationis fluxio $b\,y\,d\,y = b\,c\,d\,x - c\,x\,d\,x$, ex quâ habetur $d\,x^2 = \frac{b^2 y^2 d y^2}{(b c - c x)^2} = \frac{b^2 y^2 d y^2}{b^2 c c - 2 b c c x + c c x x} = \frac{b y^2 d y^2}{b c c - c y y}$. Hinc æquatio (194) $a\,d\,y^2 = z\,d\,x^2 + z\,d\,y^2$, in hanc abit $a\,d\,y^2 = \frac{z b y^2 d y^2}{- c y^2 + b c c} + z\,d\,y^2$ sive dividendo per $d\,y^2$ et ad communem denominatorem revocando utrumque æquationis membrum fit $- a c y^2 + a b c c = b y^2 z - c y^2 z + b c c z$ ergo est $z = \frac{- a c y^2 + a b c c}{\overline{b - c} \times y^2 + b c c}$ et factâ divisione $z = \frac{- a c}{b - c} + \frac{a b^2 c^2}{(b - c) \times (\overline{b - c} \times y^2 + b c c)}$ unde erit $z\,y\,d\,y = \frac{- a c y d y}{b - c} + \frac{a b^2 c^2 y d y}{(b - c) \times (\overline{b - c} \times y^2 + b c c)}$ sumptisque fluentibus est $S.\,z\,y\,d\,y = \frac{- a c y^2}{2 (b - c)} + \frac{a b^2 c^2}{2 (b - c)^2} L.\,\overline{\overline{b - c} \times y^2 + b c c} + Q$ const. (ut patebit si hujus quantitatis fluxio sumatur): facta autem $y = o$ erit $o = \frac{a b^2 c^2}{2 (b - c)^2} L.\, b c c + Q$ const. ideóque Q const. $= - \frac{a b^2 c^2}{2 (b - c)^2} L.\, b c c$, unde tandem habetur $S.\,z\,y\,d\,y = - \frac{a c y^2}{2 (b - c)} + \frac{a b^2 c^2}{2 (b - c)^2} \times (L.\,\overline{\overline{b - c} \times y^2 + b c c} - L.\, b c c)$ sive $S.\,z\,y\,d\,y = - \frac{a c y^2}{2 (b - c)} + \frac{a b^2 c^2}{2 (b - c)^2} L.\,\frac{\overline{b - c} \times y^2 + b c c}{b c c}$, est ergo resistentia conoidis elliptici A B R ad resistentiam suæ baseos, seu circuli radio B R descripti ut $- \frac{c y^2}{2 (b - c)} + \frac{b^2 c^2}{2 (b - c)^2} \times L.\,\frac{\overline{b - c} \times y^2 + b c c}{b c c}$ ad $y\,y$. Pro conoide hyperbolico, invenietur $a\,d\,y^2 = \frac{z b y^2 d y^2}{c y^2 + b c c} + z\,d\,y^2$ unde eodem iterato calculo prodibit ratio ejus resistentiæ ad resistentiam baseos ut $+ \frac{c y^2}{2 (b + c)} + \frac{b^2 c^2}{2 (b + c)^2} \times L.\,\frac{\overline{b + c} \times y^2 + b c c}{b c c}$ ad $y^2$. Pro conoide parabolico, fiat in formulâ resistentiæ conoidis elliptici axis b infinitus, cæterisque terminis in quibus b non occurrit deletis, erit conoidis parabolici resistentia ad resistentiam suæ baseos ut $\frac{b^2 c^2}{2 b^2} \times L.\,\frac{b y^2 + b c c}{b c c}$ ad $y^2$, sive ut $\frac{c^2}{2} L.\,\frac{y^2 + c c}{c c}$ ad $y^2$.

197. Sit K B A linea recta, et quia chorda I S parallela est rectæ K A, (192) punctum H est semper in lineâ rectâ T H Q, ideóque resistentia coni revolutione trianguli K A C circâ A C geniti erit ad resistentiam circuli radio C K descripti, ut cylindrus ex rotatione rectanguli C K Q T ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K G I circà C I, id est, ob communem utriusque cylindri basim, ut altitudo C T ad altitudinem C I; et est C T ad C I, in ratione duplicatâ C S ad C I vel K C ad K A, seu in



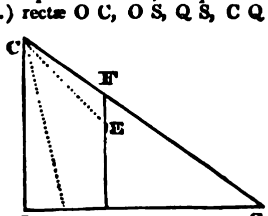

ratione duplicatâ sinûs anguli K A C ad sinum totum. Simili modo resistentia coni quem recta B A rotata describit est ad resistentiam circuli radio B R descripti in eâdem ratione duplicatâ K C ad K A; et (dividendo) resistentia annuli conici quem recta K B, circâ C A rotata describit est ad resistentiam annuli circularis quem in eâdem convolutione describit recta K P in eâdem duplicatâ ratione K C ad K A. Resistentia verò coni truncati convolutione figuræ K B R circâ C R, geniti, est ad resistentiam baseos ipsius sive circuli radio C K, descripti ut solidum quod figura C K Q H V I, circâ C I rotando describit, ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K G I ortum. Est autem solidum prius summa duorum cylindrorum, revolutione rectangulorum C K Q T et T H V I circa C I productorum, hoc est, (ob areas circulorum radiorum quadratis proportionales) ut summa $C K^2 \times C T + C P^2 \times T I$.

(r) 198. * *Biseca altitudinem, &c.* Datis C K et C R invenienda sit positio rectæ K B

(s) Unde obiter, cùm angulus C S B semper sit acutus, (t) consequens est, quod si solidum A D B E, convolutione figuræ ellipticæ vel ovalis

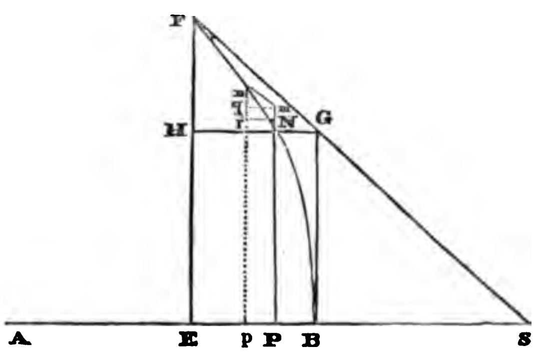
ut resistentia frusti conici quod per revolutionem figuræ K B R circà C A producitur sit omnium minima. Resistentia illa est ut $CK^2 \times CT + CP^2 \times TI$; sed $KA^2 : CK^2 = CI : CT = \frac{CK^2 \times CI}{KA^2}$; et similiter $KA^2 : CA^2 = CI : TI = \frac{CA^2 \times CI}{KA^2}$. Quarè ob datam C I, resistentia coni truncati erit ut $\frac{CK^4 + CP^2 \times CA^2}{KA^2}$. Dicantur $KC = b$, $CR = 2c$, $CA = x$, ideóque $KA^2 = bb + xx$, et quia $CA\,(x) : KC\,(b) = RA\,(x - 2c) : BR$, seu C P, erit $CP = \frac{bx - 2cb}{x}$, et indè resistentia coni truncati erit ut $\frac{b^4 + (bx - 2cb)^2}{bb + xx} = \frac{b^4 + b^2x^2 - 4b^2cx + 4c^2b^2}{bb + xx} = bb + \frac{4bbcc - 4bbcx}{bb + xx}$. Capiatur hujus quantitatis fluxio et (40) ponatur nihilo æqualis, fiet $-\frac{4bbcdx}{bb+xx} - 2xdx\frac{(4bbcc - 4bbcx)}{(bb+xx)^2} = o$, sive $\frac{1}{bb+xx} - \frac{2cx - 2xx}{(bb+xx)^2} = o$, ideóque $-bb - xx - 2cx + 2xx = o$, undè habetur $xx - 2cx = bb$, et indè eruitur $x = c + \sqrt{bb + cc}$. Biseca igitur altitudinem C R in r, ut sit $Cr = c$, et juncta $Kr = \sqrt{bb + cc}$, erit x, seu $CA = Cr + Kr$, sicut Newtonus in constructione posuit.

(s) 199. * *Unde obiter.* Angulus externus (vid. fig. textûs) æqualis est summæ angulorum æqualium Q C S et Q S C, id est, angulo C S B; et quia C O Q rectus est, angulus C Q O ideóque et æqualis C S B, est semper acutus. Altitudo O D quam minima evadat tandemque evanescat; et quoniam (in hâc Hypoth.) rectæ O C, O S, Q S, C Q æquales



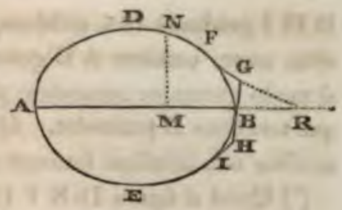

fiunt, angulus C S O, et æqualis D F S fit semirectus, ejusque complementum ad duos rectos D F C grad. 135. Ducatur ad F D recta quælibet C E et evanescente O D resistentia coni truncati quem figura C F D circà O S rotata describit, erit in suo genere minima (198), ideóque minor quam resistentia coni truncati ex revolutione figuræ C E D circà O S geniti; subducatur utrinquè resistentia circuli quem recta D E rotando describit; et resistentia superficiei ex rotatione figuræ C F E circà O S, minor erit quam resistentia annuli conici quem in eâdem revolutione describit recta C E.

(t) 200. *Consequens est.* Ut hæc consequentia pateat, demonstrandum est resistentiam superficiei quæ per rotationem figuræ F G B circà axem A B gignitur, minorem esse resistentiâ superficiei quam in eâdem revolutione arcus F B, describit. Ductis itaquè ad curvam ordinatis verticalibus et infinitè propinquis P N, p n, et ex puncto n ad P N productam rectâ n m, parallelâ F G, atquè ex m et N in p n perpendicularibus m q, N r; dicantur F E ad axem A B normalis $= b$, $GB = c$, $BP = x$, $PN = y$, et quia productâ F G ut axi occurrat in S, est ob angulos E F S, B G S semi-rectos (per Hyp.) $ES = FE = b$, et $BS = GB = c$, erit $EB = b - c$. Est quoquè $Pp = mq = qn = dx$, $rn = dy$, et hinc $qr = dy - dx$, ac proindè $Pm = y + dy - dx$, et




$pn = y + dy$. Vis particulæ fluidi in G B perpendiculariter incidentis sit $= a$, et radius circuli ad peripheriam ut 1 ad p; his positis, resistentia circuli radio P N descripti exponi poterit (195) per $\frac{1}{2}payy$; resistentia circuli radio P m descripti per $\frac{1}{2}pa(y + dy - dx)^2 = \frac{1}{2}payy + paydy - paydx$, neglectis scilicet terminis qui respectu $paydy$ et $paydx$, evanescunt. Hinc resistentia annuli circularis quem recta N m, rotando describit, exponetur per differentiam $paydy - paydx$. Resistentia circuli radio p n descripti erit ut $\frac{1}{2}pa(y + dy)^2 = \frac{1}{2}payy + paydy$, ex quâ si auferatur resistentia circuli radio P m descripti, remanebit resistentia annuli circularis

A D B E circa axem A B factâ generetur, et tangatur figura generans a rectis tribus F G, G H, H I in punctis F, B et I, eâ lege ut G H sit perpendicularis ad axem in puncto contactus B, et F G, H I cum eâdem G H contineant angulos F G B,



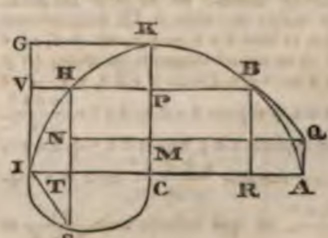

ex rotatione rectæ q n geniti $=$ p a y d x et cum sit (197). n m $^2$ ad n q $^2$, seu F S $^2$ ad F E $^2$, sive 2 ad 1, ut illius annuli resistentia ad resistentiam superficiei ex revolutione rectæ n m genitæ, hæc resistentia erit ut $\frac{1}{2}$ p a y d x. Quare resistentia superficiei quam figura n m N circà E B rotata describit, exponatur per quantitatem p a y d y $-$ $\frac{1}{2}$ p a y d x, et, sumptis fluentibus, harum resistentiarum summa per totum arcum B N exponetur per $\frac{1}{2}$ p a y y $-$ $\frac{1}{2}$ p a $\times$ B N P aream, cui nihil addendum est nec subducendum; cum factâ y $=$ o, hæc fluens evanescat, ut oportet. Si verò loco y scribatur b, seu F E, resistentia omnium superficierum quæ ex rotatione figurarum n m N, per totum arcum F B, descriptarum generarentur, erit ut $\frac{1}{2}$ p a b b $-$ $\frac{1}{2}$ p a $\times$ B N F E aream.

Porrò resistentia circuli radio G B descripti exponenda est per $\frac{1}{2}$ p a c c, et resistentia circuli radio F E descripti per $\frac{1}{2}$ p a b b; ideóque ductâ G H ad F E normali, resistentia annuli circularis ex rotatione rectæ F H, per $\frac{1}{2}$ p a b b $-$ $\frac{1}{2}$ p a c c; undè cum sit F S $^2$ ad F E $^2$, seu 2 ad 1 ut annuli illius resistentia ad resistentiam superficiei ex rotatione rectæ F G, hæc resistentia erit ut $\frac{1}{4}$ p a b b $-$ $\frac{1}{4}$ p a c c, totaque proindè resistentia coni truncati ex rotatione figuræ F G B geniti exponetur per $\frac{1}{4}$ p a b b $+$ $\frac{1}{4}$ p a c c. Quarè resistentia omnium superficierum quas figuræ n m N, per totum arcum B N F distributæ rotando describunt, est ad resistentiam frusti conici ex revolutione figuræ F G B orti ut $\frac{1}{2}$ p a b b $-$ $\frac{1}{2}$ p a $\times$ B N F E, ad $\frac{1}{4}$ p a b b $+$ $\frac{1}{4}$ p a c c; sive dividendo per $\frac{1}{4}$ p a, ut 2 b b $-$ 2 B N F E ad b b $+$ c c. Si area B N F E æqualis esset trapezio B G F E, cùm hoc sit $=$ $\frac{1}{2}$ E B $\times$ $\overline{\text{F E} + \text{B G}}$ $= \frac{\text{b b} - \text{c c}}{2}$, foret 2 b b $-$ 2 B N F E $=$ b b $+$ c c; ideóque prædictæ resistentiæ duæ æquales essent; sed trapezium B G F E majus est areâ B N F E, quæ (per Hyp.) tota in trapezio continetur, et propterea quantitas 2 b b $-$ 2 B N F E, major est quantitate b b $+$ c c; resistentia igitur omnium superficierum ex rotatione figurarum n m M, superat resistentiam coni truncati ex revolutione figuræ F G B producti. Verùm (199) resistentia superficiei quam figura n m N circà E B rotando describit, minor est resistentiâ superficiei quam in eadem rotatione describit n N; ideóque resistentia omnium superficierum quas figuræ n m N, per totum arcum B N F distributæ rotando describunt, minor est resistentiâ totius superficiei ex rotatione arcûs B N F genitæ. Ergò resistentia coni truncati per rotationem figuræ F G B descripti minor quoque est quam resistentia superficiei ex rotatione arcûs B N F productæ. Q. e. d.

201. Quæcumque igitur sit figura (in textu) A N B, regularis vel irregularis, modò arcus F B concavitatem axi A B obvertat, et totus intrâ lineas F G, B G contineatur, per hanc Newtoni Propositionem inveniri semper potest alia figura majoris capacitatis et minoris resistentiæ; quod in construendis navibus usum habere potest. Resistentia adhuc minuitur si loco circuli radio G B descripti adjungatur conus quem recta G R, ad axem productum utcumque ducta rotando describit. In omnibus autem curvis, quæ æquatione inter abscissas x et ordinatas y definiuntur, facillimè invenitur punctum B per quod ducta tangens angulum semi-rectum cum ordinatâ perpendiculari constituit. Quia in illo puncto B, ordinatæ fluxio d y æqualis est fluxioni abscissæ d x ut si æquatio ad curvam sit $a^2 x = y^3$, et sumptis fluxionibus $a^2 dx = 3 y^2 dy$, ponendo $dx = dy$, habetur $a^2 = 3 y^2$, et hinc $y = a \sqrt{\frac{1}{3}}$, undè per æquationem $a^2 x = y^3$, invenitur $x = \frac{1}{3} a \sqrt{\frac{1}{3}}$.

## PROBLEMA.

202. Datâ curvâ K B A quam recta Q A ad axem C A perpendicularis tangit in A, invenire punctum B per quod si ducatur tangens altera B Q priori Q A occurrens in Q, resistentia solidi per convolutionem figuræ K B Q A, circà axem C A descripti sit in suo genere minima.

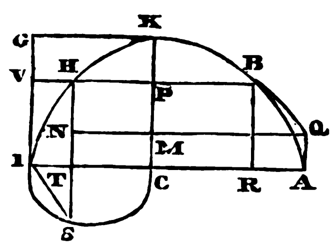



Eâdem constructione quâ suprà (192) factâ; ex puncto Q ducatur ad H T perpendicularis Q N secans K C in M dicanturque C I $=$ a, A R $=$ x, B R seu P C $=$ y, P H seu T C

B H I graduum 135, solidum, quod convolutione figuræ A D F G H I E circa axem eundem A B generatur, minus resistitur quam solidum prius, si modo utrumque secundum plagam axis sui A B progrediatur, et utriusque terminus B præcedat. Quam quidem Propositionem in construendis navibus non inutilem futuram esse censeo.

(u) Quòd si figura D N F G, ejusmodi sit curva, ut, si ab ejus puncto

$= z$, Q A $= v$, et peripheria circuli radio 1 descripti $= p$. His positis resistentia solidi ex revolutione arcûs B A circà axem C A geniti exponi potest per S. $p\,z\,y\,d\,y$, (195); resistentia verò coni truncati ex rotatione figuræ B Q A circà C A, per $\frac{1}{2} p\,a\,v\,v + \frac{1}{2} p\,y\,y\,z - \frac{1}{2} p\,v\,v\,z$. Sit R resistentia data solidi ex rotatione arcûs totius K B A geniti, et resistentia superficiei



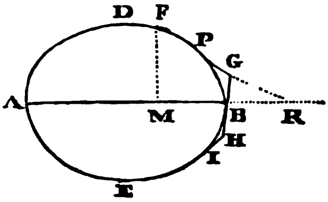

quam in eâdem rotatione describit arcus K B, erit R — S. $p\,z\,y\,d\,y$, ideóque resistentia solidi per rotationem figuræ K B Q A, erit R — S. $p\,z\,y\,d\,y + \frac{1}{2} p\,a\,v\,v + \frac{1}{2} p\,y\,y\,z - \frac{1}{2} p\,v\,v\,z$. Hujus quantitatis fluxio nihilo æqualis fiat (40) et ob datam R, habebitur $- p\,z\,y\,d\,y + p\,a\,v\,d\,v + p\,z\,y\,d\,y + \frac{1}{2} p\,y\,y\,d\,z - p\,z\,v\,d\,v - \frac{1}{2} p\,v\,v\,d\,z = 0$; undè invenitur $(z - a)\, 2\,v\,d\,v = (y\,y - v\,v)\,d\,z$. Cùm igitur sit etiam (194) $a\,d\,y^2 = z\,d\,x^2 + z\,d\,y^2$, ex his æquationibus et ex æquatione ad curvam K B A, invenientur valores litterarum x, y, v, seu R A, R B, et A Q. Q. e. i.

*Exempli causâ.* Sit K B A parabola, cujus vertex A, axis A C, latus rectum $= 4\,c$, et ideò $4\,c\,x = y\,y$, erit A Q $= v = \frac{1}{2} y$, ex naturâ tangentis parabolæ, $\frac{1}{4} y\,y = c\,x = v\,v$, $c\,d\,x = 2\,v\,d\,v$, $y\,y - v\,v = 3\,c\,x$, $y\,d\,y = 2\,c\,d\,x$, $d\,y^2 = \frac{c\,d\,x^2}{x}$. Undè æquatio $a\,d\,y^2 = z\,d\,x^2 + z\,d\,y^2$, in hanc mutatur $\frac{a\,c\,d\,x^2}{x} = z\,d\,x^2 + \frac{c\,z\,d\,x^2}{x}$, ex quâ habetur $z = \frac{a\,c}{c + x}$, et $d\,z = \frac{-a\,c\,d\,x}{(c + x)^2}$. Ex his verò omnibus æquatio $(z - a)\, 2\,v\,d\,v = (y\,y - v\,v)\,d\,z$, in hanc migrat $- \frac{a\,c\,x\,d\,x}{c + x} = - \frac{3\,a\,c\,c\,x\,d\,x}{(c + x)^2}$, sive $1 = \frac{3\,c}{c + x}$ ex quâ eruitur $x = 2\,c$, et hinc $y = 2\,c\sqrt{2}$, et $z = \frac{1}{3} a$. Quarè cùm sit a ad z, in ratione duplicatâ sinûs totius ad sinum anguli B Q M, erit $\sqrt{3}$ ad 1 ut sinus totus ad sinum anguli B Q M, qui proindè est 35°. 16′, angulus Q B R, 54°. 44′ et angulus B Q A 125°. 46′.

(u) 203. *Quòd si figura,* &c. Invenienda sit curva L D, quæ circà axem C B rotata describat superficiem solidi quod in fluido motum secundùm axis directionem a C versus B, minorem patiatur resistentiam quàm solidum quodvis aliud per puncta L et D pari ratione descriptum et similiter motum. Ex punctis curvæ infinitè propinquis N, n, Q, demittantur ad axem C B ordinatæ N M, n m, P Q et ad n m, Q P, perpendicula N r, n s. Sit p peripheria circuli cujus radius est unitas, et data a vim exponat quâ singulæ fluidi particulæ in rectam N M perpendiculariter incurrunt. His positis resistentia annuli circularis quem recta n r, circà axem C B rotata describit, exponi potest, ut suprà, per $\frac{1}{2} p\,a \times (n\,m^2 - N\,M^2)$ seu per $p\,a\,N\,M \times n\,r$, ob $n\,m^2 - N\,M^2 = \overline{n\,m + N\,M} \times (n\,m - N\,M) = 2\,M\,N \times n\,r$. Et quia $n\,N^2$ est ad $n\,r^2$ ut resistentia illa ad resistentiam superficiei quam linea n N circà C B rotata describit (196) hæc resistentia erit ut $\frac{p\,a \times M\,N \times n\,r^3}{n\,N^2}$; eodemque modo patet resistentiam superficiei




ex rotatione lineæ Q n genitæ exponi posse per $\frac{p\,a \times m\,n \times Q\,s^3}{Q\,n^2}$. Fingatur curvam hanc in aliam mutari Q h N inter puncta N, Q ductam et Q s, n r tanquam magnitudine datas as-




quovis N ad axem A B demittatur perpendiculum N M, et a puncto dato G ducatur recta G R quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in N, et axem productum secet in R, fuerit M N ad G R ut G R cub. ad 4 B R × G B q; solidum quod figuræ hujus revolutione circa axem A B factâ describitur, in medio raro prædicto ab A versus B movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eâdem longitudine et latitudine descriptum solidum circulare.

sumi variantibus N r, et n s, dicanturque constantes M N = b, m n = c, n r = f, Q s = g et variabiles N n = v, n Q = z, N r = m, n s = n, et resistentia superficiei quam arculus Q n N circà C B rotando describit, exponetur per $\frac{p\,a\,b\,f^3}{v\,v} + \frac{p\,a\,c\,g^3}{z\,z}$, si curva Q n N sit ea quæ minimam resistentiam patitur, hujus quantitatis fluxio (40 et per Hyp.) nihilo æquanda est, et indè habetur $-\frac{2\,p\,a\,b\,f^3\,v\,d\,v}{v^4} - \frac{2\,p\,a\,c\,g^3\,z\,d\,z}{z^4} = o$. Productâ ergo lineâ s n, usque ad novum punctum h, ad quod ducuntur lineæ N h, Q h, in has cadant perpendicula n e, n t, et evanescente n h, erit t h = d z et e h = — d v. Quia verò, evanescente n h triangula n e h, n r N, et n t h, Q s n, similia sunt; erit N n (v) : N r (m) = n h : e h (— d v), et s n (n v) : Q n (z) = t h (d z) : n h, ideóque ex æquo, n v : m z = d z : — d v = $\frac{m\,z\,d\,z}{n\,v}$. Loco — d v, scribatur hic ipsius valor in æquatione modò inventâ, et illa in hanc migrabit $\frac{2\,p\,a\,b\,f^3\,m\,z\,v\,d\,z}{n\,v^5} = \frac{2\,p\,a\,c\,g^3\,z\,d\,z}{z^4}$, et hinc fit $\frac{2\,p\,a\,b\,f^3\,m}{v^4} = \frac{2\,p\,a\,c\,g^3\,n}{z^4}$ seu $\frac{2\,pa \times MN \times nr^3 \times Nr}{Nn^4} = \frac{2\,pa \times mn \times Qs^3 \times ns}{Qn^4}$. Undè manifestum est quantitatem $\frac{MN \times nr^3 \times Nr}{Nn^4}$ pro quolibet curvæ puncto N, datam seu constantem esse.

* Quæ quidem curva D N F G (vide figuram textûs) talis esse debet, ut angulus quem facit in G cum lineâ B G sit semi-recti complementum per notam 200. illic ergo linea B G data, est ipsa ordinata M N et triangulum n r N est rectangulum æquicrurum, ideóque N r = n r et N n $^2$ = 2 n r $^2$ ergo quantitas constans $\frac{M\,N \times n\,r^3 \times N\,r}{N\,n^4}$ in hanc abit $\frac{G\,B \times n\,r^4}{4\,n\,r^4} = \frac{G\,B}{4}$. Talis ergo est hujus curvæ natura ut quovis in puncto ducatur ordinata M N sit semper $\frac{M\,N \times n\,r^3 \times N\,r}{N\,n^4} = \frac{G\,B}{4}$, sive ponendo pro M N, y; pro n r, d y; pro N r, d x; pro N n $^2$, d x $^2$ + d y $^2$, erit $\frac{y\,d\,y^3\,d\,x}{\overline{d\,x^2 + dy^2}|^2} = \frac{G\,B}{4}$: sive adhibendo cunstructionem Newtoni, si ducatur G R tangenti parallela, ob triangula G B R, n r N ubique similia, erit $\frac{G\,B}{G\,R} = \frac{d\,y}{\sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}}$ et $\frac{B\,R}{G\,R} = \frac{d\,x}{\sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}}$. ideóque $\frac{G\,B^3 \times B\,R}{G\,R^4} = \frac{d\,y^3\,d\,x}{\overline{d\,x^2 + dy^2}|^2}$ et $\frac{M\,N \times G\,B^3 \times B\,R}{G\,R\,4} = \frac{G\,B}{4}$ sive M N × G B $^2$ × 4 B R = G R $^4$ unde est M N : G R = G R $^3$ : G B $^2$ × 4 B R. Q. e. d.

Dicatur G B = a, fiet $\frac{y\,d\,y^3\,d\,x}{(d\,x^2 + dy^2)^2} = \frac{a}{4}$ ideóque 4 y d x d y $^3$ = a (d x $^2$ + dy $^2$) $^2$, ex quâ curvæ L N D per logarithmicam constructio eruitur. Ponatur d x = $\frac{z\,d\,y}{a}$, et hoc valore loco d x in æquatione ad curvam substituto, habetur $\frac{4\,y\,z\,d\,y^4}{a} = \frac{a\,(z\,z + a\,a)^2\,d.y^4}{a^4}$, undè invenitur $y = \frac{(z\,z + a\,a)^2}{4\,a^2\,z} = \frac{z^3}{4\,a\,a} + \frac{1}{2}\,z + \frac{a\,a}{4\,z}$, et (sumptis fluxionibus) $d\,y = \frac{3\,z^2\,d\,z}{4\,a\,a} + \frac{1}{2}\,d\,z - \frac{a\,a\,d\,z}{4\,z\,z}$; loco d y scribatur hic ipsius valor in æquatione assumptâ d x = $\frac{z\,d\,y}{a}$, et sit $d\,x = \frac{3\,z^3\,d\,z}{4\,a^3} + \frac{z\,d\,z}{2\,a} - \frac{a\,d\,z}{4\,z}$, sumptisque fluentibus $x = \frac{3\,z^4}{16\,a^3} + \frac{z\,z}{4\,a} - \frac{1}{4}\,a\,L.z + Q$ const. Porrò si assumatur abcissæ initium in loco B, ubi ordinata B L est omnium minima, id est (40) ubi d y = o quo supposito,

fit $\frac{3zzdz}{4aa} + \frac{1}{2}dz - \frac{aadz}{4zz} = 0$, ideóque $3z^2 + 2aa = \frac{a^4}{z^2}$ et $z^4 + \frac{2}{3}a^2z^2 = \frac{1}{3}a^4$ undè habetur $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ (et $y = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$), substituto hoc valore loco z, in æquatione quæ dat abcissæ x valorem, habebitur ex hypothesi initium axeos eritque $x = 0 = \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a\,L.\,a\sqrt{\frac{1}{3}} + Q.$ const. et ideò $Q = -\frac{5a}{48} + \frac{1}{4}a\,L.\,a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

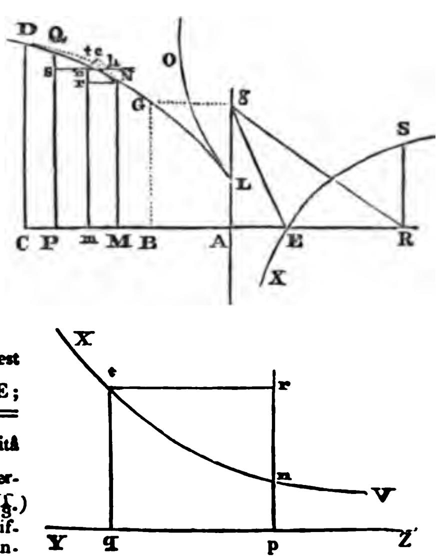
Erit igitur abscissa $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a \times \overline{L.\,z - L.\,a\sqrt{\frac{1}{3}}}$ et ut habeatur origo abcissarum, notandum quod ordinata in B sive G B æqualis sit a, ex suprà demonstratis; cùm itaque sit ubique $y = \frac{(zz+aa)^2}{4a^2z}$ erit in eo puncto $a = \frac{(zz+aa)^2}{4a^2z}$ ex quâ æquatione si eruatur valor z invenietur $z = a$, ac per consequens erit $x = \frac{3a^4}{16a^3} + \frac{aa}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a\,L.\,\frac{a}{a\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{3} - \frac{1}{4}a\,L.\,\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{3} - \frac{1}{4}a \times L.\sqrt{3}$.

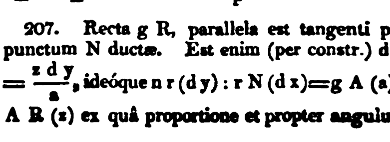
Describatur ergo logarithmica X V, asymptoto Y Z et subtangente æquali $\frac{1}{4}$ G B, sive $\frac{1}{4}$ a, in quâ sumatur ubivis ordinata p m, quæ producatur in r donec p r = 3 p m, ducatur ad logarithmicam r t quæ sit asymptoto parallela, erit $\frac{1}{2}$ r t æqualis logarithmo $\sqrt{3}$ in logarithmica cujus subtangens $\frac{1}{4}$ a, itaque $\frac{GB}{3} - \frac{1}{2}rt = x$, quo valore transiato ex B ad A in axe producto habetur A origo abcissarum: in eo puncto A ductâ perpendiculari A L g, describatur logarithmica S X cujus ea linea A L g sit asymptotus, et $\frac{1}{4}$ G B sive $\frac{1}{4}$ a subtangens, et quæ producto axe in E ut sit $AE = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ transeat per punctum E et sumptâ A R magnitudinis arbitrariæ pro z, ductâque R S parallelâ A L logarithmicæ occurrente in S capiatur abscissa A M, seu $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} \mp$ R S nimirum − R S, cum est A R > A E, et + R S ubi A R < A E; ac denique capiatur ordinata M N, seu $y = \frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$; punctum N erit in curvâ quæsitâ L D. Quod ut pateat, demonstrandum superest, esse $\mp RS = -\frac{1}{4}a(L.\,z - L.\,a\sqrt{\frac{1}{3}}.)$ Hoc autem manifestum est; nam R S, est differentia logarithmorum correspondentium quantitatibus A R et A E, sive z et $a\sqrt{\frac{1}{3}}$) sumptorum in logisticâ cujus subtangens est $\frac{1}{4}$ a, et hæc differentia positiva est, ubi A R (z) > A E ($a\sqrt{\frac{1}{3}}$) negativa ubi A R (z) < A E ($a\sqrt{\frac{1}{3}}$), et nulla, cùm fit A R = A E, seu $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, ut oportet. Quarè cùm A R superat A E, est $-RS = -\frac{1}{4}a \times \overline{L.\,z - L.\,a\sqrt{\frac{1}{3}}}$, et ubi A E superat A R, fit $+RS = -\frac{1}{4}a \times \overline{L.\,z - L.\,a\sqrt{\frac{1}{3}}}$. Est igitur semper $\mp RS = -\frac{1}{4}a \times \overline{L.\,z - L.\,a\sqrt{\frac{1}{3}}}$.

204. Datâ minimâ ordinatâ A L, curva L N D, describi potest. Nam cùm sit (ex dem.) $AL = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}AE$, et G B sive A g = a, datâ A L dantur A g, A E, et subtangens logarithmicæ quæ proindè poterit describi.

205. Datis duabus ordinatis M N et C D magnitudine, curva describi potest. Si enim in æquatione $y = \frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$ loco y scribantur seorsim datæ M N, et C D dabuntur z et a undè dabitur minima ordinata $AL = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

206. Datâ ordinatâ quâlibet C D cum abscissa correspondente C A, curva describi potest. Si enim in æquatione $y = \frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$, loco y scribatur data C D, habebitur z per a et datas quantitates; deindè si in æquatione alterâ $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a \times \overline{L.\,z - L\,a\sqrt{\frac{1}{3}}}$, loco x substituatur data C A et loco z, ejus valor per a et datas inventus, dabitur æquatio inter a et datas quantitates, et ex hâc æquatione invenietur linea a, quâ datâ, datur ordinata minima A L.




207. Recta g R, parallela est tangenti per punctum N ductæ. Est enim (per constr.) $dx = \frac{zdy}{a}$, ideóque n r (d y) : r N (d x) = g A (a) : A R (z) ex quâ proportione et propter angulum

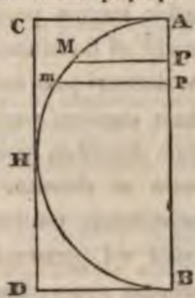
rectum in r, et in A, patet triangula n r N, g A R, similia esse, et propterea g R parallelam n N, seu tangenti per N ductæ. Hinc cum A E sit æqualis $a\sqrt{\frac{1}{3}} = z$ ubi $z = o$ (103) erit g E tangenti per L ductæ parallela, sitque A g = a est $gE^2 = \frac{a^2}{3} + a^2 = \frac{4a^2}{3}$ atquè adeò g E $= 2a\sqrt{\frac{1}{3}} = 2$ A E erit g E ad A E ut 2, ad 1, et ità sinus totus ad sinum anguli A g E, sivè ad sinum anguli quem curva constituit cum minimâ ordinatâ A L, qui proindè est 30°.

208. Quoniam A R, in infinitum crescere ac decrescere potest si capiatur semper B R > B E, describetur curvæ ramus L N D, qui concavitatem axi B C obvertit, et ab utroque axe A C, A g, in infinitum recedit; at si semper sumatur B R < B E, describetur alter curvæ ramus L O, qui priori L D convexitatem offert, et ab utroque axe B C, B G, in infinitum abscedit; curva igitur D L O punctum regressûs habet in L, et solidum minimæ resistentiæ ex ejus circà axem A C revolutione genitum, convexum vel concavum, et partim convexum, partim concavum esse potest.

209. Quoniam $dx = \frac{z\,dy}{a}$, erit areæ curvæ elementum $y\,dx = \frac{zy\,dy}{a}$, elementum arcus curvæ $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy\sqrt{aa+zz}}{a}$, elementum superficiei a curvâ circà axem A C rotatâ genitæ $= \frac{2py\,dy\sqrt{aa+zz}}{a}$ (si p sit semi-peripheria circuli cujus radius est unitas); elementum solidi in eâdem revolutione descripti $= \frac{pzy^2dy}{a}$; et resistentia superficiei $\frac{2py\,dy\sqrt{aa+zz}}{a}$, erit $\frac{a\,dy^2}{dx^2+dy^2}\,y\,dy = \frac{a\,dy^2}{dy^2 \times aa+zz}\,y\,dy$ sive ut $\frac{y\,dy}{aa+zz}$. Porrò si in his fluxionibus loco y, et d y, substituantur ipsarum valores qui ex æquationibus $y = \frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$, et $dy = \frac{3z^2dz}{4aa} + \frac{1}{2}dz - \frac{aa\,dz}{4zz}$ habentur, fluens S. y d x, seu area curvæ inveniri poterit algebraicè, aliæ verò fluentes ab hyperbolæ quadraturâ pendent.

*Schol.* Quæ ad solidum minimæ resistentiæ spectant, ea ferè omnia mutuati sumus ex ill$^{mo}$. Marchione Hospitalio, tum in Act. Lipsiens. an. 1699, tum in Monum. Paris. ejusdem anni. De eodem solido plurima etiam dederunt celeb. viri Joh. Bernoull. in Act. Lips. an. 1699. 1700. Hermannus in Phoronomiâ, et Facio ad calcem Libri de Murorum Inclinatione, &c. Sed qui totam hanc Newtoni Propositionem maximâ universalitate pertractatam habere volunt, legant tractatum a clariss. Bouguero editum, et ab Academiâ Regiâ Parisiensi an. 1727. præmio condecoratum, cui titulus; De la mâture des Vaisseaux, nec non Monum. Paris. an. 1733. in quibus elegantissima et universalissima legitur ultimæ scholii Newtoniani partis solutio. Rem a clariss. autore demonstratam hic observatu dignissimam judicamus, videlicet, solidum rotundum cujus constructionem modò dedimus, in quâlibet hujus solidi directione et juxtà quamlibet fluidi impulsionem, minimam omnium pati resistentiam, exceptis quibusdam casibus qui in navigationis praxi vix unquam occurrunt, cum scilicet directio solidi majores angulos cum axe constituit; et quod mirum est, in his casibus, solidum illud quod erat minimæ resistentiæ et navigationi aptissimum, solidum maximæ resistentiæ et ad usum navigationis omnium minime idoneum evadit. Quæ verò ad universalem solidorum in fluidis resistentiam pertinent, peti possunt ex aureo Joh. Bernoullii Libello qui inscribitur: Essai d'une Nouvelle Theorie de la manœuvre des Vaisseaux, et ex Hermanni Phoronomiâ.

210. Lemma. *Sphæra est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria.* Sphæra generatur per revolutionem semi-circuli A H B circà diametrum A B, et cylindrus sphæræ circumscriptus per revolutionem rectanguli A C D B, cujus latera A C, B D circuli radio sunt æqualia. Ductis ordinatis infinitè propinquis P M, p m,




dicantur A C = r, semi-peripheria A H B = p, A P = x, P p = d x, et quia circulorum areæ sunt in ratione duplicatâ radiorum, erit quadratum radii C A, seu r r, ad aream circuli A H B, nempè r p, ut M P², seu $2rx - xx$ ad aream circuli radio P M descripti, quæ ideò erit $2px - \frac{pxx}{r}$; et hinc solidum ex rotatione elementi P M m p, circà A B genitum, erit $2px\,dx - \frac{pxx\,dx}{r}$, sumptisque fluentibus, solidum ex rotatione segmenti circularis A M P ortum, erit $pxx - \frac{px^3}{3r}$, et factâ A P = A B, seu $x = 2r$, sphæra tota habetur $= 4prr - \frac{8}{3}prr = \frac{4}{3}prr$. Sed cylindrus sphæræ circumscriptus est factum ex areâ circuli radio A C descripti in cylindri altitudinem A B, seu est $2prr$. Quarè sphæra est ad cylindrum circumscriptum ut $\frac{4}{3}prr$ ad $2prr$, id est, ut 4 ad 6, sivè ut 2 ad 3. Q. e. d.

## PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

*Si medium rarum ex particulis quam minimis quiescentibus æqualibus et ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constet: invenire resistentiam globi in hoc medio uniformiter progredientis.*

*Cas.* 1. Cylindrus eâdem diametro et altitudine descriptus progredi intelligatur eâdem velocitate secundum longitudinem axis sui in eodem medio. Et ponamus quòd particulæ medii, in quas globus vel cylindrus incidit, vi reflexionis quam maximâ resiliant. Et cùm resistentia globi (per Propositionem novissimam) sit duplo minor quam resistentia cylindri, et globus sit ad cylindrum ut duo ad tria, et cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas, ipsasque quàm maximè reflectendo, (x) duplam sui ipsius velocitatem ipsis communicet: cylindrus, quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, communicabit motum particulis, (y) qui sit ad totum cylindri motum ut densitas medii ad densitatem cylindri; et globus, quo tempore totam longitudinem diametri suæ uniformiter progrediendo describit, (z) communicabit motum eundem particulis; (a) et quo tempore duas tertias partes diametri suæ describit, communicabit motum particulis, qui sit ad totum globi motum ut densitas medii ad densitatem globi. Et propterea globus resistentiam patitur, quæ sit ad vim quâ totus ejus motus vel auferri possit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri suæ uniformiter progrediendo describit, ut densitas medii ad densitatem globi.

(x) * *Duplam sui ipsius velocitatem*, &c. Cùm singulæ particulæ, cylindri respectu, minimæ sint, si nulla esset particularum medii reflexio, eâdem cum cylindro velocitate moverentur; ac accedente vi reflexionis perfectâ, velocitas illa duplicatur (53. Lib. I.).

(y) * *Qui sit ad totum cylindri motum*, &c. Quantitates motûs sunt ut velocitates et massæ conjunctim; massæ verò sunt ut volumina et densitates; ideóque quantitates motûs ut velocitates et volumina et densitates conjunctim. Cùm igitur cylindrus quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, medii volumen dimidio volumini cylindri æquale duplâ cum velocitate moveat, sitque proindè factum ex volumine cylindri in ipsius velocitatem æquale facto ex volumine medii moto in ejus velocitatem, motus particulis medii communicatus, erit ad totum cylindri motum ut densitas medii ad densitatem cylindri.

(z) * *Communicabit motum eundem particulis*, ob resistentiam globi resistentiâ cylindri duplo minorem (Prop. XXXIV. Lib. II.)

(a) *Et quo tempore duas tertias partes*, &c. * Huc redit compositio rationum a Newtono indicata: totus globi motus est ad cylindri motum, ut 2 ad 3, hæc enim est utriusque massæ ratio; totus cylindri motus est ad motum a cylindro communicatum quo tempore dimidiam suam longitudinem describit ut densitas cylindri (sive globi) ad densitatem medii, motus ille a cylindro communicatus idem est cum motu a globo communicato dum totam suam diametrum percurrit; denique motus ille a globo communicatus dum totam suam diametrum percurrit est ad motum ab eo globo communicatum dum percurrit duas diametri suæ tertias partes ut 3 ad 2, ideóque totus globi motus est ad motum ab eo communicatum dum percurrit duas diametri suæ partes conjunctim ut 2 ad 3, ut densitas globi ad densitatem medii, et ut 3 ad 2, sive primâ ratione et hâc ultimâ sese compensantibus ut densitas globi ad densitatem medii. Q. e. d.

*Cas.* 2. Ponamus quòd particulæ medii in globum vel cylindrum incidentes non reflectantur; et cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas simplicem suam velocitatem ipsis communicabit, ideóque resistentiam patitur duplo minorem quàm in priore casu, et resistentia globi erit etiam duplo minor quàm prius.

*Cas.* 3. Ponamus quòd particulæ medii vi reflexionis neque maximâ neque nullâ, sed mediocri aliquâ resiliant a globo; et resistentia globi erit in eâdem ratione mediocri inter resistentiam in primo casu et resistentiam in secundo. Q. e. i.

*Corol.* 1. Hinc si globus et particulæ sint infinitè dura, et vi omni elasticâ, et propterea etiam vi omni reflexionis destituta: resistentia globi erit ad vim quâ totus ejus motus vel auferri possit vel generari, quo tempore globus quatuor tertias partes diametri suæ describit, ut densitas medii ad densitatem globi.

*Corol.* 2. ([b]) Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione velocitatis.

*Corol.* 3. (†) Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione diametri.

*Corol.* 4. Resistentia globi, cæteris paribus, est ut densitas medii.

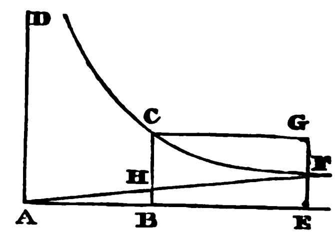
*Corol.* 5. Resistentia globi est in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis et duplicatâ ratione diametri et ratione densitatis medii.

*Corol.* 6. Et motus globi cum ejus resistentia sic exponi potest. Sit A B tempus quo globus per resistentiam suam uniformiter continuatam totum suum motum amittere potest. Ad A B erigantur perpendicula A D, B C. Sitque B C motus ille totus, et per punctum C asymptotis

([b]) * *Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione velocitatis.* * Sint globi æquales in eodem medio moti diversâ cum velocitate; motus totus uniuscujusque est ad motum ab ipso communicatum tempore quo duas tertias suæ diametri percurrit, ut densitates globorum ad densitates mediorum, ideóque ex hypothesi in eâdem ratione, ergo etiam velocitas unius est ad velocitatem alterius ut motus ab illis communicati temporibus quibus duas tertias suarum diametrorum (æquales quippe longitudines) percurrunt. Dividantur illa tempora in partes minimas utrinque æquales, et quia resistentia singulis momentis, ejusdem globi respectu, uniformis censetur, resistentiæ momentaneæ erunt directè ut motus amissi et inversè ut tempora quibus amittuntur, sed motus amissi sunt ut velocitates directè et tempora sunt inversè ut velocitates, quia æquales longitudines percurruntur motibus qui uniformes, saltem quam proximè, censentur, ergo resistentiæ momentaneæ sunt bis ut velocitates, hoc est in ratione duplicatâ velocitatis.

(†) * *Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione diametri.* * Sint globi æquiveloces, æquè densi, in eodem medio moti, sed diversæ sint earum diametri, fingantur duo cylindri ejusdem cum iis diametri, et etiam æquiveloces et æque densi, resistentiæ quas patientur cylindri singulis momentis erunt ut numerus partium in quas incurrunt, illi verò numeri partium sunt ut quadrata diametrorum: sed facile liquet resistentias cylindrorum et globorum æquivelocium, ejusdem diametri, in eodem medio esse in datâ ratione, ergo ut resistentia unius cylindri ad resistentiam alterius, ita resistentia unius globi ad resistentiam alterius, sunt ergo globorum resistentiæ ut quadrata diametrorum.

A D, A B describatur hyperbola C F. Producatur A B ad punctum quodvis E. Erigatur perpendiculum E F hyperbolæ occurrens in F. Compleatur parallelogrammum C B E G, et agatur A F ipsi B C occurrens in H. Et si globus tempore quovis B E, motu suo primo B C uniformiter continuato, in medio non resistente describat spatium C B E G per aream parallelogrammi expositum, idem in medio resistente describet spatium C B E F per aream hyperbolæ expositum, et motus ejus in fine temporis illius exponetur per hyperbolæ ordinatam E F, amissâ motus ejus parte F G. (c) Et resistentia ejus in fine temporis ejusdem exponetur per longitudinem B H, amissâ resistentiæ parte C H. Patent hæc omnia per Corol. 1. et 3. Prop. V. Lib. II.




*Corol.* 7. Hinc si globus tempore T per resistentiam R uniformiter continuatam amittat motum suum totum M: idem globus tempore t in medio resistente per resistentiam R in duplicatâ velocitatis ratione decrescentem, (d) amittet motûs sui M partem $\frac{t M}{T + t}$, manente parte $\frac{T M}{T + t}$; et describet spatium quod sit ad spatium motu uniformi M eodem tempore t descriptum, ut logarithmus numeri $\frac{T + t}{T}$ multiplicatus per numerum 2, 302585092994 est ad numerum $\frac{t}{T}$, (e) propterea quod area hyperbolica B C F E est ad rectangulum B C G E in hâc proportione.

(c) *Et resistentia ejus in fine*, &c. Resistentia sub initio ubi velocitas est B C, exponatur per eandem lineam B C, et quia resistentiæ sunt ut velocitatum quadrata, atque B C ad F E, ut velocitas sub initio ad velocitatem in fine temporis B E ad F E², ut B C ad lineam quæ resistentiam exponit in fine temporis B E, ideóque linea hæc $= \frac{F E^2}{B C}$. Sed (per Theor. IV. de Hyp.) et ob similitudinem triangulorum A B H, A E F, est B C : F E = A E : A B = F E : H B, et hinc H B $= \frac{F E^2}{B C}$. Quare recta H B exponet resistentiam in fine temporis B E, et proindè recta C H partem amissam resistentiæ illius quæ sub initio exponebatur per lineam B C.

(d) * *Amittet motûs sui partem*, &c. Pars motûs M in fine temporis t residua dicatur m, et quia (ex dem.) T : t = A B : B E, et hinc T + t : T = A E : A B, et prætereà M : m = C B : F E = A E : A B; erit T + t : T = M : m, unde habetur m $= \frac{M T}{T + t}$, et inde motûs M pars amissa est M $- \frac{M T}{T + t} = \frac{t M}{T + t}$.

(e) * *Propterea quod area hyperbolica*. Dicantur A B = a, B C = b, B E = x, A E = a + x; et quia (Theor. IV. de Hyp.) F E $= \frac{a b}{a + x}$, elementum areæ C F E B, erit $\frac{a b d x}{a + x}$, et area ipsa C F E B = a b S. $\frac{d x}{a + x}$,

*Scholium.*

In hâc Propositione exposui resistentiam et retardationem projectilium sphæricorum in mediis non continuis, et ostendi quod hæc resistentia sit ad vim quâ totus globi motus vel tolli possit vel generari quo tempore globus duas tertias diametri suæ partes velocitate uniformiter continuata describat, ut densitas medii ad densitatem globi, si modo globus et particulæ medii sint summè elastica et vi maximâ reflectendi polleant: quodque hæc vis sit duplo minor ubi globus et particulæ medii sunt infinitè dura et vi reflectendi prorsus destituta. In mediis autem continuis qualia sunt aqua, oleum calidum, et argentum vivum, in quibus globus non incidit immediatè in omnes fluidi particulas resistentiam generantes, sed premit tantum proximas particulas et hæ premunt alias et hæ alias, resistentia est adhuc duplò minor. Globus utique in hujusmodi mediis fluidissimis resistentiam patitur quæ est ad vim quâ totus ejus motus vel tolli possit vel generari quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri suæ describat, ut densitas medii ad densitatem globi. Id quod in sequentibus conabimur ostendere.

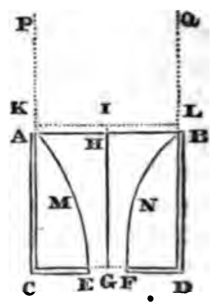
## PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

*Aquæ de vase cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.*

Sit A C D B vas cylindricum, A B ejus orificium superius, C D fundum horizonti parallelum, E F foramen circulare in medio fundi, G cen-

quæ fluens itâ sumenda est ut evanescat ubi fit $x = o$, sed fluens S. $\frac{dx}{a+x}$ itâ sumpta est logarithmus numeri $\frac{a+x}{a}$, desumptus ex logisticâ cujus subtangens est unitas, aut quod idem est, ex hyperbolâ cujus dignitas unitati æqualis est (382. Lib. I. et 40. Lib. II.); si enim ponatur $x = o$, numerus $\frac{a+x}{a}$, evadit $= 1$, et ideò L. $\frac{a+x}{a} = o$. Quarè area B C F E $= a\,b \times$ L. $\frac{a+x}{a}$; rectangulum verò B C G E $=$ b x. Est ergò area hyperbolica B C F E ad rectangulum B C G E, ut a b L. $\frac{a+x}{a}$ ad b x, hoc est, dividendo per a b, ut L. $\frac{a+x}{a}$ ad $\frac{x}{a}$. Verum (ex dem. et Hyp.) $\frac{a+x}{a} = \frac{T+t}{T}$ et $\frac{x}{a} = \frac{t}{T}$; quare area hyperbolica B C F E, est ad rectangulum B C G E, ut L. $\frac{T+t}{T}$ ad $\frac{t}{T}$. Superest igitur inveniendus logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$; per logarithmicam cujus subtangens est unitas. Porrò ejusdem numeri logarithmi diversæ speciei sunt inter se in datâ ratione (38) et numerus 2, 302585092994 est logarithmus numeri denarii sumptus in logarithmicâ cujus subtangens est unitas, et ejusdem numeri denarii logarithmus in tabulis sumptus est 1, 0000000 $=$ 1; quarè ut 1, ad 2, 302585092994, itâ logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ in tabulis sumptus ad logarithmum ejusdem numeri sumptum in

trum foraminis, et G H axis cylindri horizonti perpendicularis. Et finge cylindrum glaciei A P Q B ejusdem esse latitudinis cum cavitate vasis, et axem eumdem habere, et uniformi cum motu perpetuò descendere, et partes ejus quam primum attingunt superficiem A B liquescere, et in aquam conversas gravitate suâ defluere in vas; et cataractam vel columnam aquæ A B N F E M cadendo formare, et per foramen E F transire, idemque adæquatè implere. Ea verò sit uniformis velocitas glaciei descendentis ut et aquæ contiguæ in circulo A B, quam aqua cadendo (f) et casu suo describendo altitudinem I H acquirere potest; et jaceant I H et H G in directum, et per punctum I ducatur recta K L horizonti parallela et lateribus glaciei occurrens in K et L. Et velocitas aquæ effluentis per foramen E F (g) ea erit quam aqua cadendo ab I et casu suo describendo altitudinem I G acquirere potest. (h) Ideóque per Theoremata Galilæi erit I G ad I H in duplicatâ ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo A B, hoc est, in duplicatâ ratione circuli A B ad circulum E F; (i) nam hi circuli sunt reciprocè ut velocitates aquarum quæ per ipsos eodem tempore et æquali quantitate, adæquatè transeunt. De velocitate aquæ horizontem versùs hîc agitur. Et motus horizonti parallelus, quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cùm non oriatur a gravitate, nec motum horizonti perpendicularem a gravitate oriundum mutet, hic non consideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohærent, et per cohæsionem suam inter




logarithmicâ cujus subtangens est unitas, vel in hyperbolâ cujus dignitas est 1; habetur ergò logarithmus quæsitus, si logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ ex tabulis sumptus multiplicetur per numerum 2, 302585092994.

(f) * *Et casu suo describendo altitudinem I H.* Hâc igitur hypothesi idem præstatur ac si in loco A B nova superficies aquæ continuò crearetur, cum motu initiali qualem cadendo ex altitudine I H singula ejus superficiei particula acquirere potuisset, et deinde particulæ aquæ e loco A B vi propriæ gravitatis cadendo sese mutuò attraherent horizontaliter ad cataractam vel columnam A B N F E M formandam.

(g) * *Ea erit quam aqua* (per Hyp.).

(h) * *Ideóque per Theoremata Galilæi* XXVIII. Lib. I.

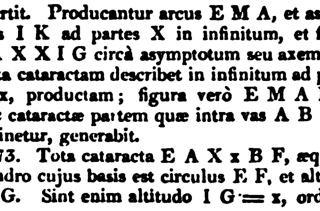
(i) 271. *Nam hi circuli,* &c. Quoniam aqua per totam cataractam A B N F E M, eodem semper tenore fluere supponitur, necesse est ut eadem aquæ quantitas per singulas cataractæ sectiones axi I G perpendiculares, seu per singulos circulos A B, M N, E F horizonti parallelos eodem tempore transeat. Nam si dato tempore major vel minor aquæ copia per circulum A B quàm per circulum M N transiret; aqua inter illos circulos vel intumesceret vel decresceret, et cataractæ figuram mutaret (contrà Hyp.). Quantitas aquæ per circulum quemlibet M N, dato tempore fluentis æquatur cylindro aqueo, cujus basis est circulus M N, et altitudo est æqualis longitudini quam superficies aquæ M N, cum velocitate acquisitâ uniformiter progrediendo eodem tempore dato describeret; et longitudo illa est ut aquæ per circulum M N fluentis velocitas (5. Lib. I.) et ideò quantitas aquæ per circulum M N dato tempore fluentis, est ut circulus M N et velocitas conjunctim. Quarè cùm data sit quantitas aquæ per singulos circulos dato tempore transeuntis, circulus M N est reciprocè ut velocitas aquæ quæ per ipsum transit. Q. e. d.

cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam et non in plures cataractas dividantur; sed motum horizonti parallelum, a cohæsione illâ oriundum, hic non consideramus.

*Cas.* 1. Concipe jam cavitatem totam in vase, in circuitu aquæ cadentis A B N F E M, glacie plenam esse, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum transeat. Et si aqua glaciem tantùm non tangat, vel, quod perinde est, si tangat et per glaciem propter summam ejus polituram quam liberrimè et sine omni resistentiâ labatur; hæc defluet per foramen E F eâdem velocitate ac prius, (k) et pondus totum columnæ aquæ A B N F E M impendetur in defluxum ejus generandum uti prius, et fundum vasis sustinebit pondus glaciei columnam ambientis.

Liquescat jam glacies in vase; et effluxus aquæ, quoad velocitatem, idem manebit ac prius. (l) Non minor erit, quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere: non major, quia glacies in aquam resoluta

272. His ità constitutis, facile est cataractæ figuram geometricè definire. Secet M N axem I G in P; et quia altitudo I P est in duplicatâ ratione velocitatis aquæ in P, hæc vero velocitas est inverse ut circulus M N, et denique circulus M N est in ratione duplicatâ radii M P, et ideò I P seu abscissa in ratione quadruplicatâ inversa radii seu ordinatæ M P, sive I P ut $\frac{1}{MP^4}$, et ideò $MP^4 \times IP$, quantitas data. Est igitur curva E M A, hyperbola quarti gradûs, asymptotos habens I G, I K, quibus convexitatem




obvertit. Producantur arcus E M A, et asymptotus I K ad partes X in infinitum, et figura E A X X I G circà asymptotum seu axem I G, rotata cataractam describet in infinitum ad partes X, x, productam; figura verò E M A H G, hanc cataractæ partem quæ intra vas A B D C, continetur, generabit.

273. Tota cataracta E A X x B F, æquatur cylindro cujus basis est circulus E F, et altitudo 2 I G. Sint enim altitudo I G = x, ordinata E G = y, a linea data, et (272) $x = \frac{a^5}{y^4}$ x, ideóque $y^4 = a^5$ æquatio ad hyperbolam E M A X. Et si semi-peripheria circuli cujus radius est unitas, dicatur p, erit circuli E F area $= pyy$, et cylindrus $EG \times 2IG = 2pyyx = \frac{2pa^5}{yy}$. Cùm verò sit $x = \frac{a^5}{y^4}$, ac proindè $dx = -\frac{4a^5dy}{y^5}$, cataractæ elementum $pyydx = -\frac{4pa^5dy}{y^3} = -4pa^5y^{-3}dy$, et sumptis fluentibus, tota cataracta ad asymptotum usque X x producta, erit $= \frac{2pa^5}{yy} = 2EF \times IG$. Q. e. d.

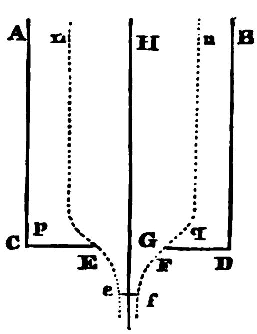
(k) 274. *Et pondus totum*, &c. Pondus quidem totum columnæ aquæ A B N F E M in defluxum ejus generandum impenditur; attamen totum aquæ motum non generat, cùm motûs illius pars pendeat a motu superficiei A B, quæ (per Hyp.) eam habet velocitatem quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem I H acquirere potest. Sed totum aquæ defluxum mathematicè considerare possumus tanquam genitum pondere aquæ totius, quæ in cataractâ E A X x B F, usque ad asymptotum X x producta continetur, quæque æqualis est cylindro aqueo basi E F et altitudine 2 I G, descripto (273).

(l) * *Non minor erit, quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere*, atquè ità aquæ descensum accelerare; *non* tamen *major erit, quia glacies in aquam resoluta*, ob reactionem actioni æqualem et contrariam, *non potest descendere, nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui suo æqualem*. Idem igitur manet in aquâ totâ ad descendendum et per foramen E F effluendum conatus. At *eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet*.

non potest descendere nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui suo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vasis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus esse debet quàm prius. ([m]) Nam particulæ aquæ jam non transeunt omnes per foramen perpendiculariter; sed a lateribus vasis undique confluentes et in foramen convergentes, obliquis transeunt motibus; et cursum suum deorsum flectentes in venam aquæ exilientis conspirant, quæ exilior est paulo infra foramen quàm in ipso foramine, existente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quam proximè, si modò diametros rectè dimensus sum. Parabam utique laminam planam pertenuem in medio perforatam, existente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis, cadendo acceleraretur et acceleratione redderetur angustior, hanc laminam non fundo sed lateri vasis effixi sic, ut vena illa egrederetur secundùm lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aquâ plenum esset, aperui foramen ut aqua efflueret; et venæ diameter, ad distantiam quasi dimidii digiti a foramine quàm accuratissimè mensurata, prodiit partium viginti et unius quadragesimarum digiti. ([n]) Erat igitur diameter forami-

([m]) * *Nam particulæ aquæ*, &c. Clariss. Daniel Bernoullius paragr. 3. Sect. IV. Hydrodynamicæ observavit particulas ceræ Hispanicæ aquis innatantes ità cum aquâ in vase moveri, ut quæ foraminis centro C imminent, per lineam verticalem H G, descendant, aliæ verò omnes




utrinque positæ motu fere verticali descendant primùm per lineas m p, n q, fere ad fundum usque C D, tumque cursum suum versus foramen E F per lineas P E, q F sensim inflectant. Itaque vena aquæ exilientis E F f e duplici de causâ contrahitur usque in e f paulo infra foramen E F. Prima contractionis illius causa est acceleratio motûs, quæ omnibus gravibus cadentibus communis est, et quâ fit ut major sit velocitas aquæ in loco inferiori e f quàm in superiore E F; quia enim aquam esse in statu manente, eandemque proindè (271) illius quantitatem per sectiones E F et e f, eodem tempore effluere supponimus, sectio e f est ad sectionem E F in ratione velocitatis aquæ in loco E F, ad ejus velocitatem in loco e f (271) et ideò sectio e f, cæteris paribus, minor esse debet sectione E F. Secunda contractionis venæ causa, quam solam hic considerat Newtonus, est obliquitas motûs particularum aquæ per lineas P E, q F, ad foramen E F tendentium; hinc enim fit, ut seclusâ etiam omni acceleratione motûs a gravitate ortâ, particulæ aquæ convergant, venamque contrahant, atque ideò motum suum accelerent.

([n]) * *Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quamproximè.* Hæc ratio in experimentis constans ferè manet, si aqua e vase satis amplo per exiguum foramen laminæ tenuissimæ insculptum effluat, licet in vase mutetur aquæ foramini incumbentis altitudo. Experimenta illa iterarunt celeberrimi mathematici, Marchio Polenus Lib. de Castellis et Daniel Bernoullius Sect. IV. Hydrodynamicæ. Hæc sunt illustr. Marchionis verba pag. 38. 39. " Proclive autem erit intelligere, confirmari ex allatis experimentis rationem inter diametros foraminum et aquæ contractæ diametros a viro summo Isaaco Newtono, ut antè diximus, constitutam. Non tamen inficias

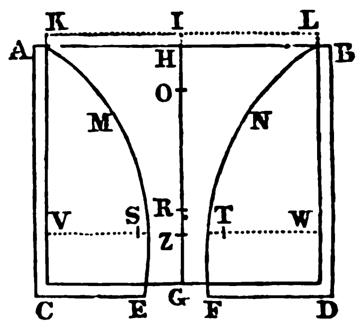
nis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quàmproximè. Aqua igitur transeundo per foramen, convergit undique, et postquam effluxit ex vase, tenuior redditur convergendo, et per attenuationem acceleratur donec ad distantiam semissis digiti a foramine pervenerit, et ad distantiam illam tenuior (°) et celerior fit quàm in ipso foramine in ratione $25 \times 25$ ad $21 \times 21$ seu 17 ad 12 quamproximè, id est in subduplicatâ ratione binarii ad unitatem circiter. (p) Per experimenta verò

iverim perexiguam aliquam differentiam interesse inter contractiones aquæ effluentis ex minoribus foraminibus, et aquæ contractiones ex majoribus effluentis. Anteà descripti foraminis in laminâ ferreâ diameter ad diametrum aquæ contractæ fuit in eâ ratione quam habet numerus 52 ad 41; cùm Newtoniana sit ratio numeri 50 ad 42. sic omninò eâdem lege, non semper contrahi aquæ venas ostendunt variæ contractiones in aquæ a variis frustis conicis effluxu observatæ, quin etiam huc debebunt referri illæ quas animadverti differentiæ inter diametros ad perpendiculum sumptas, et diametros secundum lineam horizonti parallelam mensas. At quanta sit differentia inter aquæ contractiones non ausim definire; neque verò illa Newtoniana ratio inter diametrum foraminis et contractæ aquæ diametrum sumi debet ceu præcisa, cùm ipse vir summus in citato opere hæc habeat; existente ejus (nempè aquæ contractæ) diametro ad diametrum foraminis ut *5* ad *6*, vel *5* et $\frac{1}{2}$ ad *6* et $\frac{1}{2}$, quamproximè, si modò diametros rectè dimensus sum." Bernoullius verò Sect. IV. parag. 7. hæc habet; "interim assumptis laminâ tenui, vase amplissimo, foramine ad 4 vel 6 lineas in diametro assurgente, solet ratio inter foramen et sectionem venæ contractæ non multum recedere ab illâ quam Newtonus statuit." Verùm utriusque authoris experimenta demonstrant, rationem illam diametri venæ contractæ ad diametrum foraminis multum variari, si per oblongos variæque figuræ canales, non verò ex simplici foramine in tenuissimâ laminâ insculpto e vase effluat aqua.

(°) * *Et celerior fit quàm in ipso foramine.* Nam velocitates sunt reciprocè ut circuli per quos aqua eodem tempore transit (171), circuli verò sunt in ratione duplicatâ diametrorum; et ideò velocitas aquæ per sectionem circularem venæ contractæ transeuntis est ad velocitatem aquæ per foramen effluentis ut $25 \times 25$ ad $21 \times 21$ hoc est, 625 ad 441; quod utrumque divisum per 37 dat rationem 17 ad 12, vel utrumque divisum per 441, dat rationem 1.41, &c. ad 1, est verò radix binarii numeri 1.41, &c., est ergo velocitas aquæ per venam contractam ad velocitatem per foramen in ratione radicis binarii numeri ad unitatem.

(p) *Per experimenta verò constat.* Datâ quantitate aquæ per datum foramen seu per datam venæ contractæ sectionem dato tempore effluentis, sic illius velocitas inquiritur. Quoniam data aquæ quantitas æquatur cylindro vel prismati cujus basis est foramen datum aut venæ contractæ sectio, et altitudo spatium quod aqua tempore dato cum illâ velocitate quam in foramine aut venæ sectione habet, uniformiter progrediendo describeret, dividitur quantitas aquæ data per foraminis aut sectionis venæ aream, et quotiens erit spatium quod aqua dato tempore uniformiter progrediendo describeret, atquè ità nota fit aquæ velocitas cujus dimidium est altitudo ex quâ cadere debüit ut eam velocitatem acquireret. Sit jam a altitudo quam corpus grave tempore minuti unius secundi sine resistentiâ cadendo describit, v velocitas hoc casu acquisita, et ideò 2 a spatium quod velocitate uniformi v tempore minuti unius secundi describi potest (30. Lib. I.) sit b altitudo aquæ in vase stagnantis, c celeritas quam grave per altitudinem b sine resistentiâ cadendo acquirit, et s spatium quod cum celeritate c uniformiter progrediendo tempore minuti unius secundi describeret, erit $a : b = vv : cc$ (28. Lib. I.) et $2a : s = v : c$ (*5*. Lib. I.) ideóque $a : b = 4aa : ss$; undè habetur $ss = 4ab$, et $s = \sqrt{4ab}$. Si igitur aqua e vase per venæ contractæ sectionem effluat cum velocitate c quam grave cadendo et casu suo describendo altitudinem b aquæ in vase stagnantis acquirit, spatium s quod ex quantitate aquæ tempore minuti unius secundi e vase effluentis, ut suprà dictum est, habetur, debet esse æquale $\sqrt{4ab}$. Hinc si altitudo a, sit pedum Paris. 14, erit $ss = 56b$, quæ est ipsa regula quam D. Pitot in Monum. Acad. Paris. an. 1730. tradidit. At si altitudo a ponatur esse pedum Paris. $15\frac{1}{12}$ seu $\frac{181}{12}$ (471. Lib. I.) erit $ss = \frac{181}{3}b$. Verùm ut aquæ in vase stagnantis altitudo et velocitas per foramen effluentis quo tempore experimentum capitur, eadem ad sensum maneant, ut oportet, usurpari potest vas satis amplum exiguo pertusum foramine, vel si vas paulò angustius adhibeatur, tantum aquæ affundi supernè debet quantum per inferius lumen effluit, et cavendum est ne affusa aqua cum aliquo impetu cadendi extimam aquæ in vase stagnantis superficiem attingat. Quibus autem artibus id possit effici fusè exponunt locis suprà citatis Marchio Polenus et Daniel Bernoullius quos lector consulere potest. Attamen his adhibitis cautelis, velocitas aquæ per venæ contractæ sectionem effluentis paulò minor per experimenta

constat quòd quantitas aquæ, quæ per foramen circulare in fundo vasis factum, dato tempore effluit, ea sit quæ cum velocitate prædictâ, non per foramen illud, sed per foramen circulare, cujus diameter est ad diametrum foraminis illius ut 21 ad 25, eodem tempore effluere debet. Ideóque aqua illa effluens velocitatem habet deorsum in ipso foramine quam grave cadendo et casu suo (q) describendo dimidiam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirere potest quamproximè. Sed postquam exivit ex vase, acceleratur convergendo donec ad distantiam a foramine diametro foraminis prope æqualem pervenerit, et velocitatem acquisiverit majorem in ratione subduplicatâ binarii ad unitatem circiter; quam utique grave cadendo, et casu suo describendo totam altitudinem aquæ in vase stagnantis, acquirere potest quamproximè.




In sequentibus igitur diameter venæ designetur per foramen illud minus quod vocavimus E F. Et plano foraminis E F parallelum duci intelligatur planum aliud superius V W ad distantiam diametro foraminis æqualem circiter et foramine majore S T pertusum; per quod utique vena cadat, quæ adæquatè impleat foramen inferius E F, atque ideò cujus diameter sit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter transibit; et quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam solutio Problematis postulat quamproximè. Spatium verò, quod planis duobus et venâ cadente clauditur, pro fundo vasis haberi potest. Sed ut solutio Problematis simplicior sit et magis mathematica, præstat adhibere planum solum inferius pro fundo vasis, et fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, et e vase per foramen E F in plano inferiore factum egrediebatur, motum

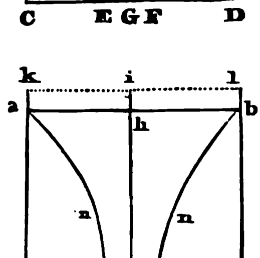
quàm per theoriam invenitur, quod variis resistentiis tribuendum esse videtur, et certè illustr. Marchio Polenus, cùm in Libro de Castellis pag. 64. opinatus fuisset velocitatem illam in experimentis valde esse minorem quàm in theoriâ, pluribus deinde experimentis ad calculos revocatis priorem sententiam mutavit in Epistolâ ad Marinonium.

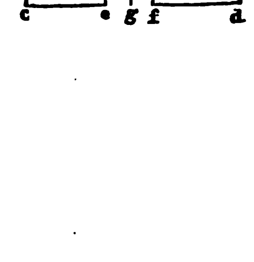
(q) *Describendo dimidiam altitudinem.* Velocitas quam corpus quodlibet grave, sine resistentiâ cadendo et casu suo describendo dimidiam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirit, est ad velocitatem ejus per totam altitudinem aquæ cadendo acquisitam ut 1 ad $\sqrt{2}$ (28. Lib. I.) Sed, ex suprà ostensis, velocitas aquæ per vasis foramen transeuntis est ad velocitatem per venæ contractæ sectionem fluentis, id est, ad velocitatem quam grave cadendo per totam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirit, in eâdem ratione 1, ad $\sqrt{2}$; quarè velocitas quam grave per dimidiam altitudinem aquæ stagnantis cadendo acquirit, æqualis est velocitati aquæ per foramen effluentis, modò tamen aqua per simplex foramen in tenuissimâ laminâ factum, ut suprà expositum est, effluat e vase.

suum perpetuo servet, (r) et glacies quietem suam. In sequentibus igitur sit S T diameter foraminis circularis centro Z descripti per quod cataracta effluit ex vase ubi aqua tota in vase fluida est. Et sit E F diameter foraminis per quod cataracta cadendo adæquatè transit, sive aqua exeat ex vase per foramen illud superius S T, sive cadat per medium glaciei in vase tanquam per infundibulum. Et sit diameter foraminis superioris S T ad diametrum inferioris E F ut 25 ad 21 circiter, et distantia perpendicularis inter plana foraminum æqualis sit diametro foraminis minoris E F. Et velocitas aquæ e vase per foramen S T exeuntis ea erit in ipso foramine deorsum quam corpus cadendo a dimidio altitudinis I Z acquirere potest: velocitas autem cataractæ utriusque cadentis ea erit in foramine E F, quam corpus cadendo ab altitudine totâ I G (s) acquiret.

*Cas.* 2. Si foramen E F non sit in medio fundi vasis, sed fundum alibi perforetur: aqua effluet eâdem cum velocitate ac priùs, si modò eadem sit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore descendit ad eandem profunditatem (t) per lineam obliquam quàm per lineam perpendicularem, sed descendendo eandem velocitatem acquirit in utroque casu, (u) ut Galilæus demonstravit.

*Cas.* 3. Eadem est aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vasis. Nam si foramen parvum sit, (x) ut intervallum inter superficies




(r) * *Et glacies quietem suam.* Sunto vasa duo æqualia A B D C, a b d c, in quorum primo glacies omnis in aquam resoluta sit, et in altero glacies quietem suam conservet, ut aqua cataractam a b m f e n formando effluat per foramen e f sectioni venæ contractæ e foramine E F exilientis æquale; et loco vasis A B D C, in Problematis solutione substitui poterit vas alterum a b d c, in quo aquæ per lumen e f effluentis eadem est velocitas quam aqua e vase A B D C exiliens habet in sectione venæ contractæ, eademque proindè aquæ quantitas in defluxum impenditur, et propptereà idem aquæ pondus fundo incumbit in utroque vase. Quoniam enim cataractæ a b m f e n figura et lex secundùm quam aqua cataractâ illâ movetur notæ sunt, Problematis solutio et facilior et magis mathematica fiet, si loco vasis A B D C mente substituatur vas a b d c.

(s) * *Acquiret.* Hæc ex suprà demonstratis patent.

(t) * *Per lineam obliquam.* In hoc secundo casu pars aquæ per lineas ad foramen obliquas descendit.

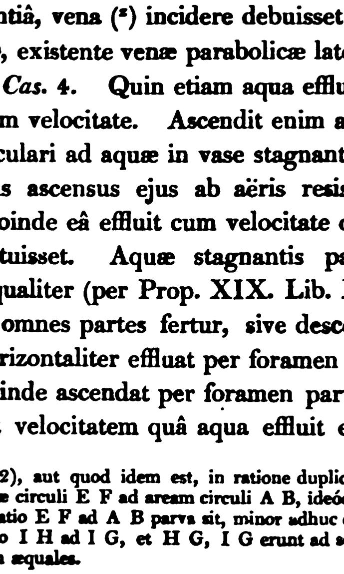
(u) * *Ut Galilæus demonstravit* (81. et 85. Lib. I.).

(x) 275. * *Ut intervallum inter superficies A B et K L.* I H est ad I G in ratione quadruplicatâ diametri E F ad diametrum A B

A B et K L quoad sensum evanescat, et vena aquæ horizontaliter exilientis figuram parabolicam efformet: (y) ex latere recto hujus parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea sit quam corpus ab aquæ in vase stagnantis altitudine H G vel I G cadendo acquirere potuisset. Facto utique experimento inveni quod, si altitudo aquæ stagnantis supra foramen esset viginti digitorum et altitudo foraminis supra planum horizonti parallelum esset quoque viginti digitorum, vena aquæ prosilientis incideret in planum illud ad distantiam digitorum 37 circiter a perpendiculo quod in planum illud a foramine demittebatur captam. Nam sine resistentiâ, vena (z) incidere debuisset in planum illud ad distantiam digitorum 40, existente venæ parabolicæ latere recto digitorum 80.

*Cas.* 4. Quin etiam aqua effluens, si sursum feratur, eâdem egreditur cum velocitate. Ascendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vase stagnantis altitudinem G H vel G I, nisi quàtenus ascensus ejus ab aëris resistentiâ aliquantulum impediatur; (a) ac proinde eâ effluit cum velocitate quam ab altitudine illâ cadendo acquirere potuisset. Aquæ stagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter (per Prop. XIX. Lib. II.) et pressioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, sive descendat per foramen in fundo vasis, sive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, sive egrediatur in canalem et inde ascendat per foramen parvum in superiore canalis parte factum. Et velocitatem quâ aqua effluit eam esse, quam in hâc Propositione as-

(272), aut quod idem est, in ratione duplicatâ areæ circuli E F ad aream circuli A B, ideóque si ratio E F ad A B parva sit, minor adhuc erit ratio I H ad I G, et H G, I G erunt ad sensum æquales.




(y) * *Ex latere recto hujus parabolæ.* Aquæ gutta e loco D, secundùm directionem quamlibet D T exiliat cum eâ velocitate quam per altitudinem B D cadendo acquirere potest, et sublatâ medii resistentiâ, describat parabolam D N Z, cujus vertex D, tangens D T, et diameter D H seu verticalis B D producta (40. Lib. I.), capiatur abscissa D H æqualis altitudini B D, ducaturque ordinata H Z, quæ tangenti D T parallela erit; et quo tempore gutta aquæ vi gravitatis cadendo altitudinem B D vel D H describit uniformi illâ velocitate quam casu per B D acquisivit, describit longitudinem H Z ipsius B D vel D H duplam, (30. Lib. I.). Latus rectum parabolæ D N Z, pertinens ad diametrum D H est $\frac{HZ^2}{DH}$ (Theor. I. de parab.) ideóque cùm sit H Z = 2 D H = 2 B D, latus rectum est 4 B D. Igitur altitudo B D quam aqua cadendo describere debet ut velocitatem acquirat cum quâ e loco D exilit, est quarta pars lateris recti ad diametrum D H parabolæ D N Z pertinentis.

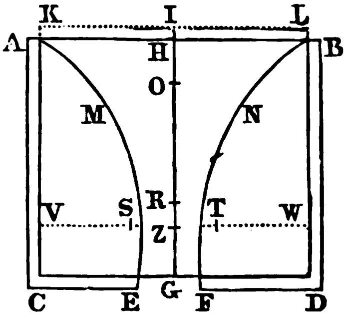
(z) * *Incidere debuisset in planum illud.* Sit enim altitudo B D = D H digit. 20, et quia B D est pars quarta lateris recti parabolæ D N Z, quam aqua sine resistentiâ describeret, latus illud rectum est digit. 80, et ordinata H Z æqualis 2 D H est digit. 40. differentia 3. digit. inter distantias 40. et 37. digit. resistentiis tribuenda est.

(a) * *Ac proinde eâ effluit cum velocitate* (25. 26. Lib. I.).

signavimus, non solùm ratione colligitur, sed etiam per experimenta notissima jam descripta manifestum est.

*Cas.* 5. Eadem est aquæ effluentis velocitas, sive figura foraminis sit circularis, sive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet a figurâ foraminis, sed oritur ab ejus altitudine infra planum K L.

*Cas.* 6. Si vasis A B D C pars inferior in aquam stagnantem immergatur et altitudo aquæ stagnantis supra fundum vasis sit G R: velocitas quâcum aqua quæ in vase est, effluet per foramen E F in aquam stagnantem, ea erit quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem I R acquirere potest. Nam pondus aquæ omnis in vase quæ inferior est superficie aquæ stagnantis, substinebitur in æquilibrio per pondus aquæ stagnantis, ideóque motum aquæ descendentis in vase minimè accelerabit. Patebit etiam et hic casus per experimenta, ([b]) mensurando scilicet tempora quibus aqua effluit.




([c]) *Corol.* 1. Hinc si aquæ altitudo C A producatur ad K, ut sit A K ad C K in duplicatâ ratione areæ foraminis in quâvis fundi parte facti, ad aream circuli A B: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem K C acquirere potest.

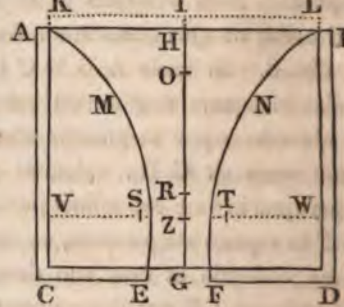
([d]) *Corol.* 2. Et vis, quâ totus aquæ exilientis motus generari potest,

([b]) * *Mensurando scilicet tempora quibus aqua effluit*, et quantitates aquæ iisdem temporibus effluentis.

([c]) * *Corol.* 1. Patet per not. 275. et cas. 2. ac 5.

([d]) * *Corol.* 2. De hujus Corollarii veritate diù multumque disputatum est inter Comitem Riccatum, Danielem Bernoullium, Petrum Antonium Michelottum, Jacobum Jurinum, aliosque eruditissimos viros. Cùm enim in primâ Principiorum editione, Newtonus, nondum observatâ contractione venæ, statuisset, vim quâ totus aquæ exilientis motus generari potest, æqualem esse ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus basis est foramen E F, et altitudo G I, et in secundâ editione, habitâ ratione venæ contractæ, vim illam duplam fecisset, priorem vis illius mensuram adversus Comitem Riccatum et Jurinum tuebatur cum Michelotto Daniel Bernoullius, quorum Dissertationes videre est in Exercitationibus Mathematicis quæ an. 1724. Venetiis editæ sunt. Verùm Daniel Bernoullius paragr. 9. Sect. XIII. Hydrodynamicæ posteriori sententiæ Newtoni ità suffragatur: "Ista sententia a me olim et ab aliis fuit impugnata, ab aliis rursus confirmata. Nunc autem postquam hanc aquarum motarum theoriam meditatus sum, lis ità dirimenda mihi videtur ut cum aquæ ad motum uniformem pervenerint, quæ quidem hypothesis est Newtoni, tunc rectè altitudine 2 G I, vis illa definiatur, sed ab initio fluxûs, ubi velocitas adhuc nulla est, vis simplici altitudini G I respondeat, moxque crescente velocitate, simul vis aquam ad effluxum animans crescat, et tandem ad eam magnitudinem exsurgat quam Newtonus assignavit. . . . . Rectè etiam ill. Riccatus, cum quo mihi de hoc argumento res erat, interrogatus, undè vis illa duplæ aquarum altitudini conveniens oriri possit, cum obturato orificio, gutta eidem immiuens vi simplicis altitudinis urgeri manifestè appareat, respondit distinguendum esse statum quietis a statu

æqualis est ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus basis est foramen E F, et altitudo 2 G I vel 2 C K. Nam aqua exiliens, quo tempore hanc columnam æquat, pondere suo ab altitudine G I cadendo velocitatem suam, quâ exilit, acquirere potest.




*Corol.* 3. Pondus aquæ totius in vase A B D C est ad ponderis partem, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut summa circulorum A B et E F ad duplum circulum E F. Sit enim I O media proportionalis inter I H et I G; et aqua per foramen E F egrediens, quo tempore gutta cadendo ab I describere posset altitudinem I G, æqualis erit cylindro cujus basis est circulus E F et altitudo est 2 I G, id est, cylindro cujus basis est circulus A B et altitudo est 2 I O, (e) nam circulus E F est ad circulum A B in subduplicatâ ratione altitudinis I H ad altitudinem I G, hoc est, in simplici ratione mediæ proportionalis I O ad altitudinem I G: et quo tempore gutta cadendo ab I describere potest altitudinem I H, aqua egrediens (f) æqualis erit cylindro cujus basis est circulus A B et altitudo est 2 I H: et quo tempore gutta cadendo ab I per H ad G describit altitudinum differentiam H G, aqua egrediens, (g) id est, aqua tota in solido A B N F E M æqua-

motûs." Jam verò hujus Cor. 2. demonstrationem dedimus (274.); aliam, quam Newtonus indicat, exposuerunt Comes Riccatus in citatis Exercitationibus, et Eustachius Manfredius in Adnotationibus ad cap. 1. Tractatûs Guilelmini de Natura Fluminum (quod præclarum opus post fata summi viri, clariss. fratres Gabriel et Heraclitus Manfredi. an. 1739. Bononiæ edi curarunt.) Demonstratio sic potest exponi. Quo tempore cylindrus aquæ, cujus basis æqualis est foramini E F, et altitudo G I vi ponderis sui cadendo describeret altitudinem I G, et velocitatem aquæ exilientis acquireret; eodem tempore e foramine E F efflueret aquæ quantitas æqualis alteri cylindro aqueo, cujus basis est foramen E F, et longitudo 2 G I (30. Lib. I.), id est, cylindro prioris duplo; et ideò ob velocitatem quam cylindrus per altitudinem I G, cadendo acquirit, æqualem velocitati aquæ exilientis, quantitas motûs in illo cylindro vi ponderis ejusdem cylindri genita, est ad quantitatem motûs eodem tempore in aquâ exiliente productam ut 1 ad 2. Sed vires uniformes quibus cylindri cadentis et aquæ exilientis motus generantur, sunt ut motûs quantitates eodem tempore a viribus illis genitæ (15. Lib. I.). Quare pondus cylindri aquæ, cujus basis est foramen E F, et altitudo G I, est ad vim quâ totus aquæ exilientis motus generari potest ut 1 ad 2, et proinde hæc vis æqualis est ponderi cylindricæ columnæ aquæ cujus basis et foramen E F et altitudo 2 G I. Q. e. d.

(e) * *Nam circulus E F est ad circulum A B, in subduplicatâ ratione altitudinis I H, ad altitudinem I G* (per Cor. 1.) *id est, in simplici ratione mediæ proportionalis I O, ad altitudinem I G*, ideóque factum ex circulo A B in altitudinem 2 I O æquale est facto ex circulo E F in altitudinem 2 I G, aut, quod idem est, cylindrus cujus basis est circulus E F et altitudo 2 I G, æquatur cylindro cujus basis est circulus A B et altitudo 2 I O.

(f) * *Æqualis erit cylindro cujus basis est circulus A B et altitudo est 2 I H.* Eadem enim aquæ quantitas eodem tempore transit per circulos A B, et E F (271) et quantitas aquæ per circulum A B, transeuntis eo tempore quo gutta cadendo describere potest altitudinem I H, æqualis erit cylindro aqueo cujus basis est circulus A B et altitudo 2 I H (30. Lib. I.).

(g) * *Id est, aqua tota.* Nam ex iis quæ ante cas. 1. dicta sunt, manifestum est aquam totam prædicto solido contentam, per foramen E F eodem tempore effluere, quo aquæ gutta vi gra-

lis erit differentiæ cylindrorum, id est, cylindro cujus basis est A B et altitudo 2 H O. Et propterea aqua tota in vase A B D C est ad aquam totam cadentem in solido A B N F E M ([h]) ut H G ad 2 H O, id est, ut H O + O G ad H O, seu I H + I O ad 2 I H. Sed pondus aquæ totius in solido A B N F E M in aquæ defluxum ([i]) impenditur: ac proinde pondus aquæ totius in vase est ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut I H + I O ad 2 I H, ([k]) atque ideò ut summa circulorum E F et A B ad duplum circulum E F.

([l]) *Corol.* 4. Et hinc pondus aquæ totius in vase A B D C est ad ponderis partem alteram quam fundum vasis sustinet, ut summa circulorum A B et E F ad differentiam eorundem circulorum.

([m]) *Corol.* 5. Et ponderis pars, quam fundum vasis sustinet, est ad ponderis partem alteram, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum A B et E F ad duplum circulum minorem E F, sive ut area fundi ad duplum foramen.

([n]) *Corol.* 6. Ponderis autem pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus A B ad summam circulorum A B et E F, sive ut circulus A B ad excessum dupli circuli A B supra fundum. Nam ponderis pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius in vase, ut differentia circulorum A B et E F ad summam eorundem circulorum, per Cor. 4.: et pondus aquæ totius in vase est ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus A B ad differentiam circulorum A B et E F. Itaque ex æquo perturbatè, ponderis pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus

vitatis suæ e loco I per H ad G cadendo describit altitudinem H G.

([h]) * *Ut H G ad 2 H O*, &c. Volumen aquæ in vase A B D C contentæ æquatur capacitati vasis seu cylindro cujus basis est circulus A B, et altitudo H G; et propthereà aqua tota in vase A B D C, est ad aquam totam cadentem in solido A B N F E M, ut H G ad 2 H O (ex dem.), id est, ut H O + O G ad 2 H O, et quia (per Hyp.) I H : I O = I O : I G = I O — I H : I G — I O = H O : O G, erit H O + O G : 2 H O = I H + I O : 2 I H.

([i]) *Impenditur*, ut probatum est initio cas. 1.

([k]) * *Atque ideò ut summa circulorum*. Quoniam enim (per Hyp.) est I H ad I O ut I O ad I G, erit etiam I H + I O ad 2 I H ut I G + I O ad 2 I O, sed (ex modò dem.) circulus A B est ad circulum E F ut I G ad I O, ideóque summa circulorum A B et E F ad duplum circulum E F ut I G + I O ad 2 I O seu ut I H + I O ad 2 I H. Quarè patet propositum.

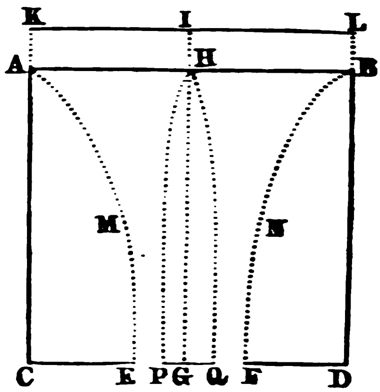
([l]) * *Corol.* 4. Pondus aquæ totius in vase A B D C sit P ponderis illius pars quæ in defluxum impenditur sit p et hinc P — p, pars ponderis totius quæ fundo vasis seu plano æquali differentiæ circulorum C D et E F sustinetur et in defluxum non impenditur. Et (per Cor. 3.) erit P : p = A B + E F : 2 E F, ac proindè P : P — p = A B + E F : A B — E F.

([m]) * *Corol.* 5. Cùm sit P : p = A B + E F : 2 E F, erit quoque P — p : p = A B — E F : 2 E F. Est autem area fundi æqualis differentiæ circulorum A B et E F.

([n]) * *Corol.* 6. *Ponderis autem pars, quâ solâ fundum urgetur*, sive pondus aquæ quæ in spatio solido C E M A D F N B continetur, *est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit* et quæ æquatur solido aqueo cujus basis est differentia circulorum A B et E F, et altitudo G H, *ut circulus*, &c.

A B ad summam circulorum A B et E F (°) vel excessum dupli circuli A B supra fundum.

*Corol.* 7. Si in medio foraminis E F locetur circellus P Q centro G descriptus et horizonti parallelus: pondus aquæ quam circellus ille sustinet, majus est pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus basis est circellus ille et altitudo est G H. Sit enim A B N F E M cataracta vel columna aquæ cadentis axem habens G H ut supra, et congelari intelligatur aqua omnis in vase, (ᵖ) tam in circuitu cataractæ quàm supra circellum, cujus fluiditas ad promptissimum et celerrimum aquæ descensum non requiritur. Et sit P H Q columna aquæ supra circellum congelata, verticem habens H et altitudinem G H. Et finge cataractam hancce pondere suo toto cadere et non incumbere in P H Q, nec eandem premere, sed liberè et sine frictione præterlabi, nisi forte in ipso glaciei vertice quo cataracta ipso cadendi initio incipiat esse cava. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata A M E C, B N F D convexa est in superficie internâ A M E, B N F versus cataractam cadentem, sic etiam hæc co-




(°) * *Vel excessum dupli circuli A B supra fundum.* Cùm fundum æquale sit differentiæ circulorum A B et E F, excessus dupli circuli A B, suprà fundum est 2 A B — A B + E F, seu A B + E F.

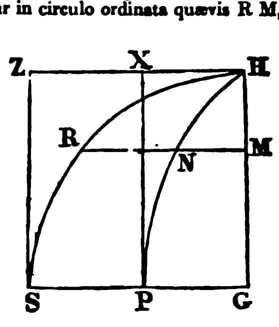
(ᵖ) * *Tam in circuitu cataractæ.* Quemadmodum enim suprà antè cas. 1., aqua omnis cujus fluiditas ad promptissimum et celerrimum aquæ descensum illiusque effluxum per foramen E F inutilis erat, in circuitu cataractæ congelata supponebatur, idque rectè factum experimentis posteà ostensum est, ità hic loci congelata supponi potest aqua omnis in vase tam in circuitu cataractæ quàm suprà circellum, cujus fluiditas ad promptissimum et celerrimum aquæ effluxum per spatium annulare E P, Q F, non requiritur; et quemadmodum glacies in circuitu cataractæ constituta, C E M A, D F N B pertingebat ad superficiem A B seu terminum glaciei continuò liquescentis K A B L, ità aqua suprà circellum congelata producitur ad punctum H, in eâdem superficie A B positum; et uti glacies *in circuitu cataractæ convexa est versùs cataractam cadentem* (272), *sic etiam columna aquæ suprà circellum congelata P H Q convexa erit versus cataractam cadentem A H P E M, B H Q F N;* * considerari enim potest axis H G ut paries vasis cujus sectio sit H G C A, et foramen in fundo factum sit E P, qualiscumque autem sit lex quà effluit aqua ex vase, eodem modo quo factum est a Newtono in hujus demonstrationis casu primo, concipi potest cataracta trans glaciem effluens, adhibitis cautionibus illic notatis, ut hæc hypothesis mathematica congruat cum verâ effluxus aquæ lege, quâtenus ad copiam aquæ effluentis dato tempore, quo posito evidens est lineam H P convexam sumi debere. Quâpropter si ex punctis P et Q ad punctum H ducantur lineæ rectæ, quæ cum diametro P Q triangulum constituant, conus ex revolutione hujus trianguli circà axem H G genitus, totus continebitur in solido quod per rotationem figuræ convexæ P H Q circâ eundem axem H G generatur. Hoc igitur solidum, seu columna P H Q suprà circellum congelata, magnitudine superat conum illum cujus basis est circellus P Q et altitudo H G. Quarè (per Prop. X. Lib. XII. Elem.) columna congelata P H Q, major est tertiâ parte cylindri aquæ, cujus basis est circellus P Q et altitudo G H. Sed sicut fundum E C, F D sustinet pondus aquæ in spatio solido C E M A, D F N B contentæ, ità circellus

lumna P H Q convexa erit versus cataractam, et propterea major cono cujus basis est circellus ille P Q et altitudo G H, id est, major tertiâ parte cylindri eâdem base et altitudine descripti. Sustinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id est, pondus quod pondere coni seu tertiæ partis cylindri illius majus est.

*Corol.* 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus P Q sustinet, minus esse videtur pondere duarum tertiarum partium cylindri aquæ cujus basis est circellus ille et altitudo est H G. Nam stantibus jam positis, describi intelligatur dimidium sphæroidis cujus basis est circellus ille et semi-axis sive altitudo est H G. (q) Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus cylindri illius et comprehendet columnam aquæ congelatæ P H Q cujus pondus circellus ille sustinet. Nam ut motus aquæ sit maximè directus, columnæ illius superficies externa concurret cum basi P Q (r) in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua cadendo perpetuò acceleratur et propter accelerationem fit tenuior; et cùm angulus ille sit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes (s) jacebit intra dimidium sphæroidis. (t) Eadem verò sursum acuta erit seu cuspidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem sphæroidis sit infinitè velocior quàm

P Q sustinet pondus columnæ aquæ P H Q, id est, pondus quod majus est pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus basis est circellus P Q et altitudo G H.

(q) * *Et hæc figura æqualis erit*, &c. Centro G, et semi-axibus conjugatis G H et G P, describatur ellipseos quadrans H N P, et centro eodem G ac radio G H circuli quadrans H R S, compleanturque rectangula H G P X et H G S Z. Ducatur in circulo ordinata quævis R M, ellipsi



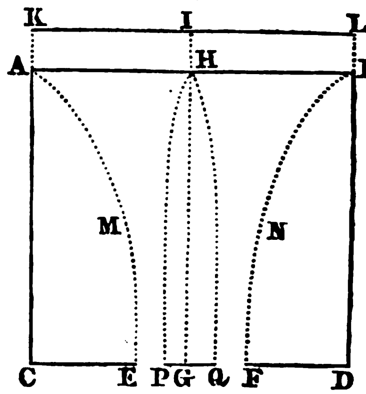

occurrens in N, erit R M ad N M, in datâ ratione S G ad P G (247. Lib. I.) et propterea si figuræ illæ circà axem H G revolvantur, circulus quem radius M R in hâc revolutione describet, erit ad circulum radio M N descriptum in datâ ratione $SG^2$ ad $PG^2$, seu in datâ ratione cylindri quem rectangulum H G S Z rotando describit ad cylindrum ex rotatione rectanguli H G P X genitum; undè (per Cor. Lem. IV. Lib. I.) hemisphærium ex revolutione quadrantis circuli H R S G genitum, est ad hemisphæroidem ex rotatione quadrantis ellipseos H N P G in eâdem ratione. Cum igitur hemisphærium sit ad cylindrum circumscriptum ut 2 ad 3 (170. Lib. II.) erit etiam hemisphærois ad cylindrum circumscriptum qui per rotationem rectanguli H G P X generatur, in eâdem ratione 2 ad 3. Q. e. d.

(r) * *In angulo nonnihil acuto.* Nam quemadmodum angulus quem cataractæ A B N F E M superficies externa A M E, B N F cum basi C E, D F constituit, est semper acutus, quia aqua cadendo semper acceleratur (272.). Sic etiam, ob eandem rationem, columnæ P H Q superficies externa concurret cum basi P Q in angulo acuto H P Q, H Q P. Quia verò circulo P Q evanescente, seu coincidente H P cum axe H G, angulus ille H P G rectus evadit; si circulus est valdè parvus; angulus H P G erit fere rectus seu nonnihil acutus.

(s) *Jacebit intrà dimidium sphæroidis.* Quia (ex naturâ ellipseos) in quâ tangentes per axium vertices ductæ angulos rectos cum axibus constituunt, sphæroidis superficies cum circello P Q, concurrit in angulo recto.

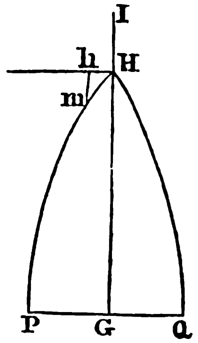
(t) * *Eadem verò sursum acuta erit.* Cùm enim partes aquæ duplici motu cieantur in H, alio verticali qui lapsu per altitudinem I H acquiritur, alio horizontali quo partes aquæ ad cataractam formandam ad se mutuò accedunt, uti suprà antè cas. 1. dictum est, atquè ideò guttula

ejus motus horizontem versus. (u) Et quò minor est circellus P Q, eò acutior erit vertex columnæ; et circello in infinitum diminuto, angulus P H Q in infinitum diminuetur et propterea columna jacebit intra dimidium sphæroidis. Est igitur columna illa minor dimidio sphæroidis, seu duabus tertiis partibus cylindri cujus basis est circellus ille et altitudo G H. Sustinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cùm pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.




*Corol.* 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus P Q sustinet, æquale est ponderi cylindri aquæ cujus basis est circellus ille et altitudo est $\frac{1}{2}$ G H quamproximè. (x) Nam pondus hocce est medium arithmeticum inter pondera coni et hemisphæroidis prædictæ. At si circellus ille non sit valde parvus, sed augeatur donec æquet foramen E F; hic sustinebit pondus aquæ totius sibi perpendiculariter imminentis, id est, pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille et altitudo est G H.

aquæ in H, lineam curvam H P motu composito describat, necessum est ut angulus P H G sit acutus, et proindè columna P H Q cuspidata in H. Describat enim guttula aquæ lineam




quam minimam H h, motu horizontali, et eodem temporis momento lineam h m, motu verticali, atquè arcum H m motu composito; et velocitas horizontalis erit ad velocitatem verticalem ut H h ad h m, id est, ut sinus h m H seu m H G ad sinum anguli h H m. Sed evanescente angulo h H m, seu angulo m H G recto existente, sinus anguli m H G, infinitè major est sinu anguli h H m. Quare si angulus m H G rectus sit, horizontalis motus aquæ erit infinitè major quàm motus ejus verticalis. Quod absurdum est; angulus igitur m H G acutus est.

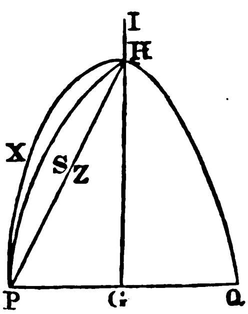
(u) * *Et quò minor est circellus P Q.* Nam si circellus P Q ità augeatur, ut adæquet foramen E F illudque occludat, columna P H Q evadet cylindrica, et recta m h coincidente cum H h angulus m H G rectus erit; et contrà circello in infinitum diminuto, coincidet H m P, cum axe H G, angulusque m H G evanescet. Columna igitur tam ad superiores partes versùs H, quàm ad inferiores partes versùs P et Q, jacebit intrà dimidium sphæroidis.

(x) * *Nam pondus hocce est medium arithmeticum.* Cùm enim columna illa aquæ, quam circellus valde parvus sustinet, major sit tertiâ parte cylindri cujus basis est circellus ille et altitudo H G (Cor. 7.), et minor duabus tertiis partibus ejusdem cylindri (Cor. 8.), erit ferè æqualis medio arithmetico inter cylindros $\frac{1}{3}$ P Q $\times$ H G, et $\frac{2}{3}$ P Q $\times$ H G. Est autem medium illud arithmeticum æquale dimidiæ summæ illorum cylindrorum, id est, cylindro $\frac{1}{2}$ P Q $\times$ H G, cujus basis est circellus P Q, et altitudo $\frac{1}{2}$ H G.

*Corol.* 10. Et (quantum sentio) pondus quod circellus sustinet, est semper ad pondus cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille et altitudo est $\frac{1}{2}$ G H, (y) ut E F q ad E F q — $\frac{1}{2}$ P Q q, sive ut circulus E F ad excessum circuli hujus supra semissem circelli P Q quamproximè.

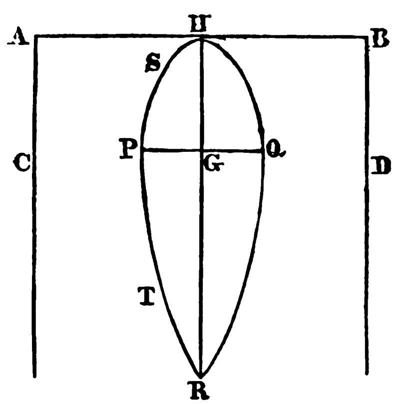
(y) * *Ut E F q ad E F q — $\frac{1}{2}$ P Q q.* Hæc enim suppositio superioribus determinationibus satisfacit. Nam sit p pondus aquæ quam circellus sustinet; P pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille et altitudo G H; et si (juxtà Cor. hoc 10.) ponatur $p : \frac{1}{2} P = EF^2 : EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$, erit $p = \frac{\frac{1}{2} P \times EF^2}{EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2}$. Sed quantitas $\frac{\frac{1}{2} P \times EF^2}{EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2} = \frac{P \times EF^2}{2 EF^2 - PQ^2}$ semper major est quantitate $\frac{1}{3}$ P, quod Cor. 7. satisfacit. Et contrà quantitas illa $\frac{P \times EF^2}{2 EF^2 - PQ^2}$, minor est quàm $\frac{2}{3}$ P, ubi circellus est, satis parvus seu quamdiu $2 \overline{PQ}^2 < EF^2$ (cùm enim fit $\overline{PQ}^2 = \frac{EF^2}{2}$, tunc illa quantitas p est $\frac{2 P \times \overline{EF}^2}{3 EF^2} = \frac{2}{3} P$, (quæ est determinatio Cor. 8.). Tandem ubi circellus infinitè minor est quàm foramen E F, fit $\frac{P \times EF^2}{2 EF^2 - PQ^2} = \frac{1}{2} P$, et ubi circellus adæquat foramen E F, est $\frac{P \times EF^2}{2 EF^2 - PQ^2} = P$, quas duo cum Cor. 9. determinationibus congruunt.

277. Si circellus P Q sit valdè parvus, et vertice P axe P G describatur per punctum H, parabolæ arcus P S H, et figura P S H G circà




H G convolvatur, solidum inde genitum columnam aquæ quam circellus sustinet exhibebit quam proximè. Nam angulus S P G quem parabola cum axe P G, continet, rectus est, et ideò quam proximè æqualis angulo quem prædictæ columnæ superficies cum circello valdè parvo P Q efficit (Cor. 8.); et evanescente P G, angulus S H G arcu parabolæ S H et rectâ H G comprehensus fit infinitè parvus, ut oportet (per idem Cor. 8.). Prætereà si jungatur recta P Z H, et centro G, ac semi-axibus conjugatis G H, et G P describatur ellipseos quadrans P X H, et figuræ P Z H G, P S H G, P X H G circà axem H G convolvantur, solidum quod per revolutionem figuræ parabolicæ P S H G generatur, majus erit cono ex rotatione trianguli P Z H G genito, et minus hemisphæroide quam figura P X H G rotata describit, quod Cor. 7. et 8. satisfacit. Tandem, calculo inito, facile patet solidum quod per convolutionem figuræ P S H G, gignitur, esse ad cylindrum cujus basis est circellus P Q, et altitudo G H, ut 8 ad 15, quæ ratio non multùm aberrat a ratione 1 ad 2 quam Newtonus in Cor. 9. invenit.

278. Si circulus P Q valdè parvus maneat respectu foraminis E F, foramen verò E F quantumvis augeatur finitum sit, et vas A B D C infinitum evadat, æquales erunt altitudines I G et H G, et velocitas aquæ in loco P Q, ea erit



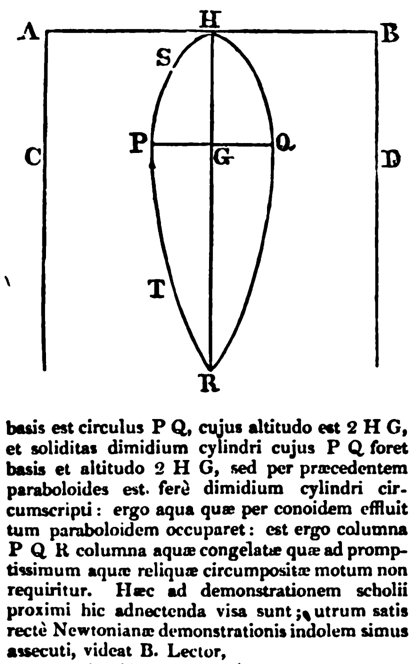

quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem H G, acquirere potest (per Cor. 1. Prop. hujus XXXVI.). Iisdem positis, si vas A B D C infrà circulum P Q continuetur, et aqua postquam pervenit ad locum P Q, solâ vi insitâ pergat uniformiter moveri cum illâ velocitate quam habet in loco P Q, sitque P Q R columna aquæ congelatæ, cujus fluiditas ad promptissimum alterius aquæ motum non requiritur, ut suprà de columnâ P H Q dictum est; erit G R = 2 G H et P T R ferè arcus parabolæ cujus vertex P axis P G, et ordinata G R. Nam * fingatur considerari lapsum ejus aquæ quæ per conoidem H P Q moveretur seorsim a lapsu reliquæ aquæ vasis, liquet quod eo tempore quo

## LEMMA IV.

*Cylindri, qui secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia ex auctâ vel diminutâ ejus longitudine non mutatur; ideóque eadem est cum resistentia circuli eâdem diametro descripti et eâdem velocitate secundùm lineam rectam plano ipsius perpendicularem progredientis.*

(ᵉ) Nam latera cylindri motui ejus minimè opponuntur: et cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminutâ, in circulum vertitur.

aquæ gutta motu verticali uniformiter accelerato cadit ex H in G effluet bis ea aquæ copia quæ in conoide H P Q continetur; ea ergo aquæ copia erit æqualis cylindro cujus altitudo erit H G, et basis circulus P Q, particula verò G celeritate ex lapsu per H acquisita describet 2 H G sive G R, tota ergo aqua quæ per conoidem H P Q movebitur occupabit figuram cujus




basis est circulus P Q, cujus altitudo est 2 H G, et soliditas dimidium cylindri cujus P Q foret basis et altitudo 2 H G, sed per præcedentem paraboloides est. ferè dimidium cylindri circumscripti: ergo aqua quæ per conoidem effluit tum paraboloidem occuparet: est ergo columna P Q R columna aquæ congelatæ quæ ad promptissimum aquæ reliquæ circumpositæ motum non requiritur. Hæc ad demonstrationem scholii proximi hic adnectenda visa sunt; utrum satis rectè Newtonianæ demonstrationis indolem simus assecuti, videat B. Lector,

*Si quid novisti rectiùs istis*
*Candidus imperti; si non, his utere mecum.*

(ᵉ) * *Nam latera cylindri*, &c. Hic enim latera cylindri esse politissima, et medii tenacitatem et frictionem esse nullam supponitur.

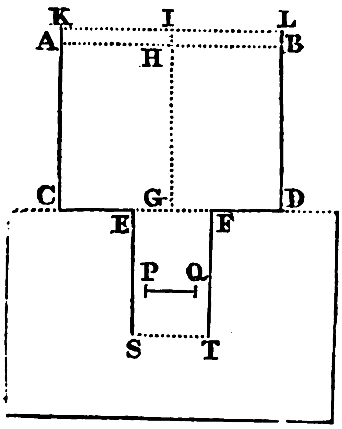
279. Lemma. *Vires uniformes sunt directè ut quantitates motûs quas generant, et inversè ut tempora quibus illas generant*, (13. et 15. Lib. I.); et quia motûs quantitates sunt ut massæ et velocitates conjunctim, sive ut volumina et densitates et velocitates, *vires uniformes sunt etiam in ratione compositâ ex rationibus directis voluminum, densitatum et velocitatum et ratione inversâ temporum quibus velocitates illas generant;* cùmque tempora illa sint ut spatia descripta directè et velocitates inversè (31. Lib. I.); *vires uniformes sunt quoque in ratione compositâ ex rationibus directis voluminum, densitatum et quadratorum velocitatis et ratione inversâ spatiorum descriptorum*, et quia velocitates sunt ut spatia descripta directè et tempora inversè, *vires uniformes sunt etiam in ratione compositâ ex ratione voluminum, densitatum et spatiorum descriptorum, et ratione inversâ duplicatâ temporum, quibus spatia illa describuntur.*

280. *Corol.* Quoniam cylindrorum volumina sunt ut eorum altitudines et diametrorum quadrata conjunctim: *vires uniformes quibus urgentur cylindri, sunt in ratione quæ componitur ex rationibus directis altitudinum cylindrorum, quadratorum diametrorum, densitatum et velocitatum a viribus illis genitarum, et ratione inversâ temporum quibus velocitates illas generant;* sunt etiam in ratione quæ componitur ex *rationibus directis altitudinum, quadratorum diametrorum, densitatum et quadratorum velocitatum, et ratione inversâ spatiorum descriptorum;* sunt quoque vires illæ in ratione compositâ *ex rationibus directis altitudinum cylindrorum, quadratorum diametrorum, densitatum et spatiorum descriptorum, et ratione inversâ duplicatâ temporum, quibus spatia illa describuntur.* Ubi prædictorum quantitatum, ex quibus virium ratio composita est, aliquæ datæ sunt, iis deletis habetur virium ratio.

## PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

*Cylindri, qui in fluido compresso infinito et non elastico secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia, quæ oritur a magnitudine sectionis transversæ, est ad vim quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproximè.*

Nam si vas A B D C fundo suo C D superficiem aquæ stagnantis tangat, et aqua ex hoc vase per canalem cylindricum E F T S horizonti perpendicularem in aquam stagnantem effluat, locetur autem circellus P Q horizonti parallelus ubivis in medio canalis, et producatur C A ad K, ut sit A K ad C K in duplicatâ ratione quam habet excessus orificii canalis E F supra circellum P Q ad circellum A B: manifestum est (per Cas. 5. Cas. 6. et Cor. 1. Prop. XXXVI.) quod velocitas aquæ transeuntis per spatium annulare inter circellum et latera vasis, ea erit quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem K C vel I G acquirere potest.




Et (per Corol. 10. Prop. XXXVI.) si vasis latitudo sit infinita, (a) ut lineola H I evanescat et altitudines I G, H G æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus cylindri cujus basis est circellus ille et altitudo est $\frac{1}{2}$ I G, ut E F q ad E F q — $\frac{1}{2}$ P Q q quamproximè. Nam vis aquæ, (b) uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum P Q in quâcunque canalis parte locatum.

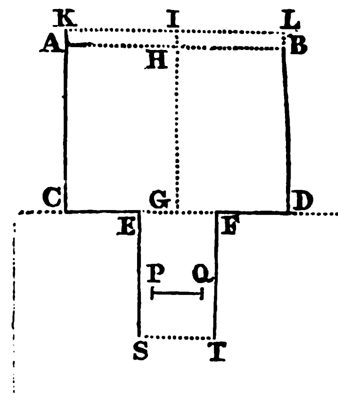
Claudantur jam canalis orificia E F, S T, et ascendat circellus in fluido undique compresso, et ascensu suo cogat aquam superiorem descendere per spatium annulare inter circellum et latera canalis: et velocitas circelli ascendentis erit ad velocitatem aquæ descendentis (c) ut differentia circulorum E F et P Q ad circulum P Q, et velócitas circelli ascendentis ad

(a) • *Ut lineola H I evanescat.* Per Cor. 1. Prop. XXXVII. aut (per not. 275.).

(b) • *Uniformi motu defluentis* (per Cas. 6. Prop. XXXVI.).

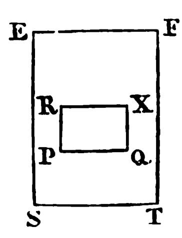
(c) • *Ut differentia circulorum.* Velocitates uniformes sunt ut spatia eodem tempore descripta; sed intereadum circulus P Q spatium solidum, seu cylindrum P Q X R describit, descendit aquæ quantitas huic cylindro æqualis, et propterea altitudo verticalis per quam aqua descen-

summam velocitatum, (d) hoc est, ad velocitatem relativam aquæ descendentis quâ præterfluit circellum ascendentem, ut differentia circulorum E F et P Q ad circulum E F, sive ut E F q — P Q q ad E F q. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati, quâ supra ostensum est aquam transire per idem spatium annulare dum circellus interea immotus manet, id est, velocitati quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem I G acquirere potest: et vis aquæ in circellum ascendentem eadem erit ac prius (per legum Corol. 5.) id est, resistentia circelli ascendentis erit ad pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille et altitudo est $\frac{1}{2}$ I G, ut E F q ad E F q — $\frac{1}{2}$ P Q q quamproximè. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem, quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem I G acquirit, ut E F q — P Q q ad E F q.




Augeatur amplitudo canalis in infinitum: et rationes illæ inter E F q — P Q q et E F q, interque E F q et E F q — $\frac{1}{2}$ P Q q accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem I G acquirere potest, resistentia verò ejus æqualis evadet ponderi cylindri cujus basis est circellus ille et altitudo dimidium est altitudinis I G, a quâ cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli ascendentis acquirat; (e) et hâc velo-

dit, æquatur longitudini quæ habetur dividendo valorem cylindri P Q X R per valorem sectionis annularis inter circulum P Q et vasis latera E S, F T comprehensam, ideóque si $\overline{EF}^2$ et $\overline{PQ}^2$,




circulos, et R P, lineam rectam significent, altitudo illa per quam aqua descendit est $\frac{\overline{PQ}^2 \times RP}{\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2}$. Quarè velocitas circuli ascendentis est ad velocitatem aquæ descendentis ut altitudo R P, ad altitudinem $\frac{\overline{PQ}^2 \times RP}{\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2}$, id est, ut $\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2$ ad $\overline{PQ}^2$, sivè ut differentia circulorum E F et P Q ad circulum P Q.

(d) * *Hoc est, ad velocitatem relativam.* Cùm circulus ascendat et aqua descendat, velocitas relativa æqualis est summæ velocitatum oppositarum circuli et aquæ. Velocitas absoluta circuli ascendentis dicatur V, velocitas absoluta aquæ descendentis v, et quia circuli sunt ut diametrorum quadrata, si E F, et P Q, pro circulorum diametris sumantur; erit (ex dem.) $V : v = \overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2 : \overline{PQ}^2$, et ideò $V : V + v = \overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2 : \overline{EF}^2$.

(e) * *Et hâc velocitate,* cylindrus tempore cadendi duplum longitudinis I G, seu quadruplum longitudinis suæ $\frac{1}{2}$ I G, describet (30. Lib. I.).

citate cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis suæ describet. Resistentia autem cylindri, hâc velocitate secundùm longitudinem suam progredientis, eadem est cum resistentiâ circelli (per Lemma IV.) ideóque æqualis est vi quâ motus ejus, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, (f) generari potest quamproximè.

Si longitudo cylindri augeatur vel minuatur, motus ejus ut et tempus, quo quadruplum longitudinis suæ describit, (g) augebitur vel minuetur in eâdem ratione, ideóque vis illa, quâ motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli possit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis est resistentiæ cylindri, nam et hæc quoque immutata manet per Lemma IV.

(h) Si densitas cylindri augeatur vel minuatur, motus ejus ut et vis quâ motus eodem tempore generari vel tolli potest, in eâdem ratione augebitur vel minuetur. Resistentia itaque cylindri cujuscunque erit ad vim quâ totus ejus motus, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel tolli, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproximè. Q. e. d.

Fluidum autem comprimi debet ut sit continuum, (i) continuum verò esse debet et non elasticum, ut pressio omnis, quæ ab ejus compressione oritur, propagetur in instanti, et in omnes moti corporis partes æqualiter agendo resistentiam non mutet. Pressio utique, quæ a motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum et resistentiam creat. Pressio autem quæ oritur a compressione fluidi, utcunque fortis sit, si propagetur in instanti, nullum generat motum in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideóque resistentiam

(f) * *Generari potest quamproximè.* Quo enim tempore cylindrus cum prædictâ velocitate uniformiter progrediendo, describit spatium 2 I G, proprio pondere cadendo describeret altitudinem I G, et velocitatem illam acquireret (30. Lib. I.). Cùm igitur resistentia æqualis sit ponderi cylindri, patet propositum.

(g) * *Augebitur vel minuetur.* Quantitas motûs in cylindro cujus basis, densitas et velocitas datæ sunt, augetur vel minuitur in ratione longitudinis cylindri seu voluminis, et tempus quo cylindrus datâ illâ velocitate uniformiter progrediendo quadruplum longitudinis suæ describit, augetur vel minuitur in eâdem longitudinis auctæ vel diminutæ ratione (5. Lib. I.) ideóque (179) vis *illa quâ motus auctus,* &c.

(h) * *Si densitas cylindri* cæteris manentibus, *augeatur vel minuatur, motus ejus ut et vis quâ motus eodem tempore generari vel tolli potest, in eâdem ratione augebitur vel minuetur* (279). Cùm igitur cylindri cujuscunque resistentia æqualis sit vi quâ motus cylindri aquæ ejusdem basis, altitudinis et velocitatis, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, generari vel tolli possit, et vis hæc sit ad vim quâ totus prioris cylindri motus eodem tempore generari possit vel tolli, ut densitas aquæ ad densitatem cylindri, consequens est ut resistentia cylindri cujuscumque sit ad vim quâ totus ejus motus, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, generari vel tolli potest, ut densitas aquæ ad densitatem cylindri quamproximè.

(i) * *Continuum verò esse debet et non elasticum.* Nam si fluidum esset elasticum, ipsius partes per compressionem condensarentur, et deinde rarefierent, atque ità pressio per motum progressivum, qui instantaneus esse non potest, propagaretur. At si fluidum continuum sit et densari compressione nequeat, pressio propagabitur in instanti. Experimentis verò constat aquam in statu naturali constitutam vix posse condensari, seu in spatium minus compressione redigi; cùm e contrà aër maximæ condensationis et rarefactionis sit capax.

nec auget nec minuit. Certè actio fluidi, quæ ab ejus compressione oritur, fortior esse non potest in partes posticas corporis moti quàm in ejus partes anticas, ideóque resistentiam in hac Propositione descriptam minuere non potest: et fortior non erit in partes anticas quàm in posticas, si modo propagatio ejus infinitè velocior sit quàm motus corporis pressi. Infinitè autem velocior erit et propagabitur in instanti, si modo fluidum sit continuum et non elasticum.

(k) *Corol.* 1. Cylindrorum, qui secundum longitudines suas in mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatum et duplicatâ ratione diametrorum et ratione densitatis mediorum.

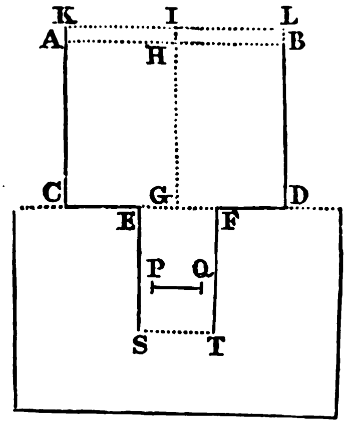
(l) *Corol.* 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, sed cylindrus in medio quiescente incluso secundum longitudinem suam progre-

(k) *Corol.* 1. Sic demonstratur. Resistentia cylindri cujusque est directè ut densitas medii et vis uniformis quâ totus cylindri motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit vel generari vel tolli possit, et inversè ut densitas cylindri (ex dem.); sed vis illa uniformis est in ratione compositâ ex rationibus directis longitudinis cylindri, quadrati diametri, densitatis et quadrati velocitatis et ex ratione inversâ spatii descripti, seu ex ratione inversâ longitudinis cylindri (280.). Quarè (per compositionem rationum et ex æquo), resistentia cylindri cujuscumque, si conferatur cum resistentiâ alterius cylindri, est in ratione quæ componitur ex ratione densitatis medii, et ratione duplicatâ diametri et duplicatâ ratione velocitatis.

(l) * *Corol.* 2. Sic demonstratur. * Si canalis non sit infinitus respectu baseos cylindri inclusi, resumantur ea quæ sub initium Theor. istius XXXVII. dicebantur; primo nempe quod ascendente circello in canali clauso, velocitas relativa aquæ semper sit ad ejus velocitatem ut basis canalis E F ad annulum E P sive ad differentiam circulorum E F et P Q sive ut $EF^2$ ad $EF^2 - PQ^2$; quæratur igitur altitudo I G talis ut velocitas lapsu per eam acquisita sit ad velocitatem circelli, ut $EF^2$ ad $EF^2 - PQ^2$, et si fingatur circellus immotus in medio foraminis E F et aqua cadens ex altitudine I G ex vase amplissimo A B D B per illud foramen, cùm velocitas aquæ juxta circellum transiens eadem sit ac velocitas respectiva aquæ juxta cylindrum in canali clauso motum, actio aquæ in circellum utrinque æqualis censenda est, sed actio aquæ sive ejus pondus in circellum per Cor. 10. Prop. XXXVI. est ad cylindrum cujus basis est circellus altitudo $\frac{1}{2}$ I G sicut $EF^2$ ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, hæc itaque erit ratio resistentiæ ad pondus cylindri aquei cujus basis est circellus et altitudo $\frac{1}{2}$ I G; sed gravitas est vis quæ tempore quo percurritur uniformiter quadruplum longitudinis $\frac{1}{2}$ I G sive 2 I G velocitate lapsu per I G acquisitâ, generare potest eam ipsam velocitatem, et pondus cylindri est ipsa gravitas per massam cylindri multiplicata, ergo pondus cylindri, est vis quæ dum percurritur quadruplum longitudinis cylindri velocitate lapsu per I G acquisitâ, generare potest motum ejus cylindri eâ velocitate moti.

Cùm verò celeritas quæ lapsu per I G acquiritur sit ad eam cum quâ cylindrus movetur ut $EF^2$ ad $EF^2 - PQ^2$. Quadruplum longitudinis cylindri propriâ suâ celeritate alio tempore percurret quàm si moveatur celeritate lapsu per I G acquisitâ. Gravitas ergo cylindri, erit ad eam vim quâ cylindri velocitas acquiritur tempore quo quadruplum longitudinis suæ propriâ suâ celeritate describitur, directè ut celeritates quæ iis viribus acquiruntur et inversè ut tempora quibus acquiruntur, quæ tempora (cum agatur de describendo uniformiter eodem spatio quadruplo nempe longitudinis cylindri) sunt inversè ut velocitates, ideóque pondus cylindri est ad vim quâ ejus cylindri motus acquiritur tempore quo quadruplum longitudinis suæ propriâ suâ celeritate describitur bis directè ut celeritas lapsu per I G acquisita, ad celeritatem cylindri, sive bis ut $EF^2$, ad $EF^2 - PQ^2$.

Ergo ex æquo resistentia est ad eam vim sicut $EF^2$ ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ et bis ut $EF^2$ ad $EF^2 - PQ^2$. At, nec resistentia nec ea vis mutantur longitudine cylindri mutata, sed tantum densitate mutatâ ut ex ipsa Propositionis demonstratione liquet, est autem vis quâ motus in cylindro aqueo generatur, dato tempore quo quadruplum suæ longitudinis suâ cum velocitate percurrit, ad eam vim qua motus in æquali cylindro, sed diversæ densitatis æquali cum velocitate moto, eodem tempore generatur, ut densitas aquæ sive medii, ad densitatem cylindri, ergo tandem resistentia est ad vim quâ motus in cylindro generari vel tolli potest quo tempore quadruplum suæ longitudinis propriâ cum velocitate describit, ut $EF^2$ ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ et bis ut $EF^2$ ad $EF^2 - PQ^2$ et ut densitas medii ad densitatem cylindri. Q. e. d.




diatur, et interea axis ejus cum axe canalis coincidat: resistentia ejus erit ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione E F q ad E F q — ½ P Q q semel, et ratione E F q ad E F q — P Q q bis, et ratione densitatis medii ad densitatem cylindri.

*Corol.* 3. Iisdem positis, et quod longitudo L sit ad quadruplum longitudinis cylindri in ratione quæ componitur ex ratione E F q — ½ P Q q ad E F q semel, et ratione E F q — P Q q ad E F q bis: (m) resistentia cylindri erit ad vim quâ totus ejus motus, interera dum longitudinem L describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri.

*Scholium.*

In hâc Propositione resistentiam investigavimus quæ oritur a solâ magnitudine transversæ sectionis cylindri, neglectâ resistentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri possit. Nam quemadmodum in Casu primo Propositionis XXXVI. obliquitas motuum, quibus partes aquæ in vase, undique convergebant in foramen E F, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: sic in hâc Propositione, obliquitas motuum, quibus partes aquæ ab anteriore cylindri termino pressæ, cedunt pressioni (n) et undique divergunt, retardat eorum transitum per loca in circuitu termini illius antecedentis versus posteriores partes cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem distantiam commoveatur et resistentiam auget, (o) idque in eâ

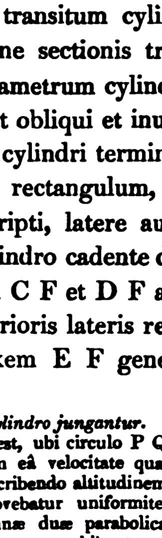
(m) * *Resistentia cylindri erit ad vim.* Nam (per Cor. 2. et Hyp.) resistentia cylindri est ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ uniformiter describit vel generari possit vel tolli, in ratione compositâ ex ratione quadruplæ longitudinis cylindri ad longitudinem L et ratione densitatis medii ad densitatem cylindri, et (279) vis quâ totus cylindri motus, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, generari vel tolli possit, est ad vim quâ idem ejusdem cylindri motus quo tempore longitudinem L uniformiter describit vel tolli possit vel generari, in ratione inversâ temporum, sive ob eamdem utrinque celeritatem in ratione inversâ spatiorum, hoc est, in ratione longitudinis L ad quadruplum longitudinis cylindri. Quare (ex æquo) resistentia cylindri est ad vim quâ totus ejus motus, intereadum longitudinem L uniformiter describit tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri.

(n) * *Et undique divergunt.* Vid. Prop. XLI. et XLII. Lib. hujus.

(o) * *Idque in eâ ferè ratione.* Eodem enim ferè modo motus obliqui in aquæ partibus excitantur, sive aqua in planum circuli immotum impingat, sive circulus eâdem cum velocitate in aquâ quiescente feratur.

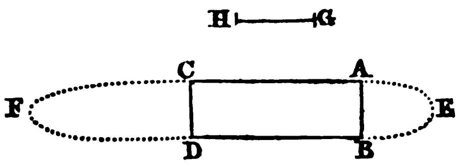
ferè ratione quâ effluxum aquæ e vase diminuit, id est in ratione duplicatâ 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in Propositionis illius casu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter et maximâ copiâ transirent per foramen E F, ponendo quod aqua omnis in vase quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, et cujus motus obliquus erat et inutilis, maneret sine motu: sic in hâc Propositione, ut obliquitas motuum tollatur et partes aquæ motu maximè directo et brevissimo cedentes facillimum præbeant transitum cylindro, et sola maneat resistentia, quæ oritur a magnitudine sectionis transversæ, quæque diminui non potest nisi diminuendo diametrum cylindri, concipiendum est quod partes fluidi, quarum motus sunt obliqui et inutiles et resistentiam creant, quiescant inter se ad utrumque cylindri terminum, et cohærant (p) et cylindro jungantur. Sit A B C D rectangulum, et sint A E et B E arcus duo parabolici axe A B descripti, latere autem recto quod sit ad spatium H G, describendum a cylindro cadente dum velocitatem suam acquirit, ut H G ad ½ A B. Sint etiam C F et D F arcus alii duo parabolici, axe C D et latere recto quod sit prioris lateris recti quadruplum descripti; et convolutione figuræ circum axem E F generetur solidum cujus media pars A B D C sit

(p) * *Et cylindro jungantur.* Ut num. 277. 278. factum est, ubi circulo P Q in quem aqua influebat cum eâ velocitate quam cadendo et casu suo describendo altitudinem H G acquirit et deinde movebatur uniformiter junctæ sunt glaciei columnæ duæ parabolicæ P H Q et P R Q, quæ aquas exhibent, quarum fluiditas

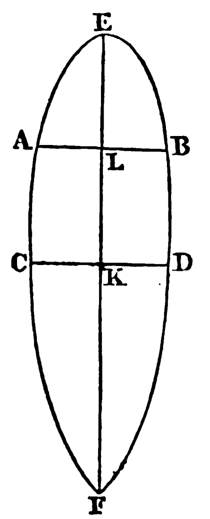



ac motus sunt inutiles, et parabolarum P S H, P T S erat vertex principalis P, axis P G, et ordinatæ G H, ac G R, ideóque parabolæ P S H, latus rectum $\frac{GH^2}{PG}$, et parabolæ P T R latus rectum $\frac{GR^2}{PG}$ seu $\frac{4\,GH^2}{PG}$ prioris $\frac{GH^2}{PG}$, quadruplum (per Theor. I. de parab.). Hinc si aqua quiescat et circulus P Q in aquâ moveatur cum eâdem velocitate quam grave cadendo et casu suo describendo altitudinem H G acquirit, columnæ illæ P H Q et P R Q aquas fere exponent quarum fluiditas ac motus inutiles sunt ut partes aquæ motu maximè directo et brevissimo cedentes facillimum præbeant transitum circulo. Sed (per Lem. IV.) loco circuli P Q substitui potest cylindrus A B D C eâdem velocitate motus, et cujus bases A B, C D circulo P Q æquales sint, quibus proinde basibus adjungendæ sunt columnæ duæ A E B, C F D columnis P H Q, P R Q æquales respectivè, atque idipsum est quod Newtonus in hoc scholio fecit. Siquidem junctâ E F, mediis basibus A B, C D, occurrente in L et K, et positis A B et C D ipsi P Q æqualibus; est (per Newt. constr.) parabolæ A E latus rectum $\frac{HG^2}{AL} = \frac{HG^2}{PG} = \frac{EL^2}{AL}$, et ideò E L = H G. Et simili modo parabolæ C F, Newtonianâ constructione descriptæ, latus rectum est $\frac{4\,HG^2}{PG} = \frac{KF^2}{CK} = \frac{KF^2}{PG}$, ac proindè K F = 2 H G = G R. Columnæ igitur A E B et C F D non differunt a columnis P H Q et P R Q.

cylindrus de quo agimus, et partes extremæ A B E et C D F contineant partes fluidi inter se quiescentes et in corpora duo rigida concretas, quæ cylindro utrinque tanquam caput et cauda adhæreant. Et solidi E A C F D B, secundum longitudinem axis sui F E in partes versus E progredientis, resistentia ea erit quamproxime quam in hâc Propositione descripsimus, id est, quæ rationem illam habet ad vim quâ totus cylindri motus, interea dum longitudo 4 A C motu illo uniformiter continuato describatur vel tolli possit vel generari, quam densitas fluidi habet ad densitatem cylindri quamproximè. (q) Et hâc vi resistentia minor esse non potest quàm in ratione 2 ad 3. per Corol. 7. Prop. XXXVI.




(q) * *Et hâc vi resistentia minor esse non potest*, &c. Resistentia (per Cor. 7. Prop. XXXVI.) minor esse non potest pondere cylindri aquæ, cujus basis est circellus P Q (sive A B) et altitudo $\frac{1}{3}$ E L seu $\frac{1}{3}$ H G. (Vid. figuras superiores.) Velocitas quam hic cylindrus aquæ, vi ponderis sui cadendo et casu suo describendo altitudinem E L acquirit, æqualis est velocitati cum quâ cylindrus A C D B, in aquâ movetur (ex dem.) et ideò cùm basis A B sit etiam utrique cylindro communis, pondus cylindri aquæ erit ad vim quâ totus cylindri A B D C motus, quo tempore longitudinem 4 A C uniformiter describit, generari possit vel tolli, in ratione compositâ ex ratione densitatis aquæ ad densitatem cylindri A B D C, et ratione altitudinis $\frac{1}{3}$ E L ad altitudinem A C, et ratione spatii 4 A C ad spatium 2 E L (280), id est, in ratione compositâ ex ratione densitatis aquæ ad densitatem cylindri A B D C et ratione 2 ad 3. Si itaque vis quâ totus cylindri A B D C motus, intereadum longitudinem 4 A C, uniformiter describit, generari vel tolli possit, sit ad vim aliquam P, ut densitas cylindri A B D C ad densitatem aquæ, erit (ex æquo) pondus prædicti cylindri aquæ ad vim P ut 2 ad 3, atquè ideò pondus cylindri aquæ, quo resistentia minor esse non potest; quam in ratione 2 ad 3.



## LEMMA V.

*Si cylindrus, sphæra et sphærois, quorum latitudines sunt æquales, in medio canalis cylindrici ita locentur successivè ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.*

([r]) Nam spatia inter canalem et cylindrum, sphæram, et sphæroidem per quæ aqua transit, sunt æqualia: et aqua per æqualia spatia æqualiter transit.

Hæc ita se habent ex hypothesi, quòd aqua omnis supra cylindrum sphæram vel sphæroidem congelatur, cujus fluiditas ad celerrimum aquæ transitum non requiritur, ut in Corol. 7. Prop. XXXVI. explicui.

## LEMMA VI.

*Iisdem positis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aquâ per canalem fluente.*

Patet per Lemma V. et motus legem tertiam. Aqua utique et corpora in se mutuo æqualiter agunt.

## LEMMA VII.

*Si aqua quiescat in canali, et hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum resistentiæ inter se.*

Constat ex Lemmate superiore, nam motus relativi iidem inter se manent.

### *Scholium.*

Eadem est ratio corporum omnium convexorum et rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri potest; sed in his Lemmatis corpora esse politissima supponimus, et medii tenacitatem et frictionem esse nullam, et quod partes fluidi, quæ motibus suis obliquis et superfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, et retardare possunt, quiescant inter se tanquam gelu constrictæ, et corporibus ad ipsorum partes anticas et posticas ad-

([r]) * *Nam spatia inter canalem et transversas sectiones, seu latitudines maximas cylindri, sphæræ et sphæroidis per quæ aqua transit, sunt æqualia.* Vid. schol. sequens.

hæreant, perinde ut in scholio Propositionis præcedentis exposui. Agitur enim in sequentibus de resistentiâ omnium minimâ quam corpora rotunda, datis maximis sectionibus transversis descripta, habere possunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam ascendat, ad posticam subsidat, præsertim si figura sint obtusa; et inde resistentiam paulo majorem sentiunt quàm si capite et caudâ sint acutis. Et corpora in fluidis elasticis mota, si ante et post obtusa sint, fluidum paulo magis condensant ad anticam partem et paulo magis relaxant ad posticam; et inde resistentiam paulo majorem sentiunt quam si capite et caudâ sint acutis. Sed nos in his Lemmatis et Propositionibus non agimus de fluidis elasticis, sed de non elasticis; non de insidentibus fluido, sed de altè immersis. Et ubi resistentia corporum in fluidis non elasticis innotescit, augenda erit hæc resistentia aliquantulum tam in fluidis elasticis; qualis est aër, quàm in superficiebus fluidorum stagnantium, qualia sunt maria et paludes.

## PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

*Globi, in fluido compresso infinito et non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas fluidi ad densitatem globi quamproximè.*

([s]) Nam globus est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria; et propterea vis illa, quæ tollere possit motum omnem cylindri interea dum cylindrus describat longitudinem quatuor diametrorum, globi motum omnem tollet interea dum globus describat duas tertias partes hujus longitudinis, id est, octo tertias partes diametri propriæ. Resistentia autem cylindri est ad hanc vim quamproximè ut densitas fluidi ad densitatem cylindri vel globi per Prop. XXXVII. et resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri per Lem. V. VI. VII. Q. e. d.

([t]) *Corol.* 1. Globorum, in mediis compressis infinitis, resistentiæ sunt

([s]) *Nam globus est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria* (170. Lib. I.) et propterea, cum eadem sit globi et cylindri densitas eademque velocitas (ex Hyp.) quantitas motûs globi est ad quantitatem motûs cylindri ut duo ad tria, et tempus quo globus octo tertias partes diametri propriæ uniformiter describit, est ad tempus quo cylindrus eâdem uniformi velocitate quadruplum longitudinis suæ, seu duodecim tertias diametrorum globi describit, etiam ut duo ad tria. Quare (178) vis uniformis quâ totus globi motus intereadum octo tertias partes diametri propriæ describit tolli possit vel generari, est ad vim uniformem quâ totus cylindri motus, quo tempore longitudinem quatuor diametrorum globi describit vel tolli vel generari possit ut duo ad tria directè et duo ad tria inversè, id est, in ratione æqualitatis. *Resistentia autem cylindri*, &c.

([t]) * *Corol.* 1. Patet per Cor. 1. Prop. XXXVII., quià resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri circumscripti.

in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis, et duplicatâ ratione diametri, et ratione densitatis mediorum.

*Corol.* 2. Velocitas maxima quâcum globus, vi ponderis sui comparativi, in fluido resistente potest descendere, ea est quam acquirere potest globus idem, eodem pondere, sine resistentiâ cadendo et casu suo describendo spatium quod sit ad quatuor tertias partes diametri suæ ut densitas globi ad densitatem fluidi. Nam globus tempore casus sui, cum velocitate cadendo acquisitâ, (u) describet spatium quod erit ad octo tertias diametri suæ, ut densitas globi ad densitatem fluidi; et vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare possit, quo tempore globus octo tertias diametri suæ eâdem velocitate describit, (x) ut densitas fluidi ad densitatem globi: ideóque per hanc Propositionem, vis ponderis æqualis erit vi resistentiæ, et propterea globum accelerare non potest.

(y) *Corol.* 3. Datâ et densitate globi et velocitate ejus sub initio motus,

(u) * *Describet spatium quod erit ad octo tertias partes diametri suæ*, &c. Describet enim spatium duplum illius quod vi ponderis sui comparativi sine resistentia cadendo descripsit (30. Lib. II.), id est, *spatium quod erit ad octo tertias partes*, &c.

(x) * *Ut densitas fluidi ad densitatem globi.* Sit D diameter globi, 2 F spatium quod sit ad $\frac{8}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem fluidi; et tempus quo globus uniformiter describit spatium $\frac{8}{3}$ D, erit ad tempus quo eâdem uniformi velocitate describit spatium 2 F, ut $\frac{8}{3}$ D ad 2 F (5. Lib. I.), id est, ut densitas fluidi ad densitatem globi. Cùm igitur vires uniformes sint reciprocè ut tempora quibus motus æquales generant (279), patet propositum.

(y) 282. Cor. 3. *Datâ et densitate globi et velocitate ejus sub initio motus et densitate fluidi datur ad omne tempus et velocitas globi, et ejus resistentia et spatium ab eo descriptum.* * Primum, ex datâ densitate globi, et densitate fluidi, invenietur, per Cor. 2, vis æqualis resistentiæ cùm velocitas ea est quam acquirere potest is globus, cadendo in vacuo per vim sui ponderis comparativi et describendo spatium quod sit ad quatuor tertias diametri suæ ut densitas globi ad densitatem fluidi.

Secundò, ex datâ hac resistentiâ invenietur resistentia quæ competit velocitati globi de quo agitur sub initio ejus motus, quia resistentiæ hic supponuntur esse ut quadrata velocitatum; istâ autem resistentiâ cognitâ dabitur tempus quo si hæc resistentia uniformiter ageret, totam velocitatem quam habet globus sub initio motus destruere posset, sicque si B C designet eam velocitatem initio motus simulque resistentiam ipsi competentem, designeturque per A B illud tempus quo ea velocitas per resistentiam uniformem destrui potest, et erecto perpendiculo A D, asymptotis A D, A B per punctum C describatur hyperbolâ, ex ejus hyperbolæ constructione dabitur ad quodlibet tempus (quod designabitur per B E) velocitas residua E F, resistentia B H, et spatium descriptum C B E F; quâ autem ratione hæc singula ad calculum revocentur, dicendum.

I. Vis illa quæ resistentiæ æqualis esse debet cùm corpus habet velocitatem maximam quam lapsu suo in fluido dato acquirere potest, est ipsum pondus comparativum corporis, sit ergo A ejus pondus, densitas data corporis est ad densitatem fluidi, ut A ad pondus æqualis voluminis fluidi, quo invento, detrahatur illud ex pondere A, relinquitur pondus comparativum globi in fluido quod dicatur B.

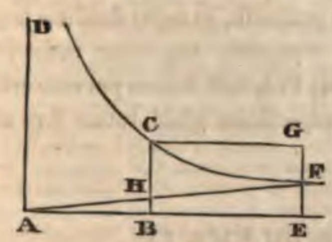
Ut præterea determinetur tempus quo eo pondere B corpus percurret cadendo spatium quod sit ad quatuor tertias diametri suæ ut ejus densitas ad densitatem fluidi, sive, si dicatur D diameter et dicatur F spatium quod sit ad $\frac{4}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem medii, ut determinetur tempus quo globus pondere B cadendo percurret spatium F posito quod grave cadendo in vacuo pondere A tempore unius minuti secundi pedes Parisienses $15\frac{1}{12}$ percurrit, et cùm spatia diversis viribus acceleratricibus descripta eodem tempore sint ut illæ vires, spatium $15\frac{1}{12}$ pedum pondere A uno minuto secundo percursum est ad spatium eodem tempore pondere B percursum ut A ad B. Ut autem est illud spatium, ad spatium F, ita quadratum minuti unius secundi ad quadratum temporis quo eo pondere

ut et densitate fluidi compressi quiescentis in quo globus movetur; datur ad omne tempus et velocitas globi et ejus resistentia et spatium ab eo descriptum, per Corol. 7. Prop. XXXV.

(z) *Corol.* 4. Globus in fluido compresso quiescente ejusdem secum densitatis movendo, dimidiam motus sui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipsius diametrorum descripserit, per idem Corol. 7.

B spatium F percurretur, quod tempus dicatur G, cumque velocitate per lapsum acquisitâ duplum spatii lapsu percursi uniformiter describatur ipso lapsus tempore, ideò velocitate p ndere B tempore G acquisitâ, eodem tempore G describeretur 2 F, cùmque velocitas omnis exprimatur per spatium divisum per tempus, erit ea velocitas maxima $\frac{2\,F}{G}$ quæ in posterum dicatur H.

II. Datâ autem quâvis aliâ ejusdem globi velocitate in eodem fluido eaque dicatur M, resistentia ipsi competens ita obtinetur, ut quadratum velocitatis H ad quadratum velocitatis hujusce M, ita est resistentia adversus velocitatem H cui




pondus B æquipollet, ad resistentiam adversus velocitatem M, quam vocabo R; cum ergo prius data sit ratio A ad B dabitur etiam ratio A ad R ideóque dabitur spatium quod actione vi R uniformi suppositâ per unum minutum secundum describeretur, siquidem spatia per diversas vires uniformes acceleratrices descripta iisdem temporibus sunt ut illæ vires, ideóque A ad R ut $15\frac{1}{12}$ ped. ad spatium uno minuto secundo descriptum, cujus spatii duplum per unum minutum secundum divisum exprimit velocitatem vi R per unum minutum secundum productam. Unde invenietur tempus quo per eam vim R uniformiter agentem velocitas M produci vel etiam destrui posset, velocitates enim per eamdem vim acquisitæ sunt ut tempora quibus acquiruntur; ergo velocitas tempore unius minuti secundi acquisita est ad velocitatem M, ut unum minutum secundum ad tempus quo vis R velocitatem M generare vel tollere posset. Unde tandem in hyperbolæ constructione datur valor temooris per lineam A B designati.

Sumatur ergo B E quod sit ad A B ut tempus quod assumere lubet ad tempus illud quo vis R velocitatem M quæ per B C exprimitur generare vel tollere potest uniformiter agendo, et ducatur ordinata E F, ea designabit velocitatem globi eo tempore superstitem quæ ex naturâ hyperbolæ habebitur, est enim A E, ad A B, sicut B C sive M ad E F, unde cum sit A E = A B + B E; sitque A B tempus mox inventum, B E tempus assumptum, B C sive M velocitas data, datur etiam E F.

Datur pariter resistentia B H, est enim $B\,C^2$ ad $E\,F^2$ ut R ad hancce novam resistentiam, quæ, prioribus datis, etiam dabitur.

Denique datur spatium a corpore descriptum, datur enim spatium quod velocitate constanti M tempore B E percurritur; est verò area B C G E ad spatium hyperbolicum B C F E, ut spatium velocitate constanti M tempore B E percursum, ad spatium percursum cum velocitate per resistentiam decrescente, at ex naturâ logarithmorum hyperbolicorum spatium hyperbolicum B C F E est logarithmus quantitatis $\frac{A\,E}{A\,B}$, et quia logarithmi earumdem quantitatum in diversis logarithmorum seriebus sumpti sunt proportionales, sumatur logarithmus illius quantitatis $\frac{A\,E}{A\,B}$ in tabulis vulgaribus, fiatque ut logarithmus denarii numeri in tabulis (sive unitas) ad 2.30258509 qui est logarithmus hyperbolicus ejusdem denarii numeri, ita logarith. quantitatis $\frac{A\,E}{A\,B}$ ex tabulis desumptus ad logarithmum hyperbolicum ejus quantitatis, habebitur area B C F E, sit ergo dignitas hyperbolæ = 1, erit $B\,C = \frac{1}{A\,B}$ et area $B\,C\,G\,E = \frac{1}{A\,B} \times B\,E$, ideóque ut $\frac{B\,E}{A\,B}$, ad logarithmum quantitatis $\frac{A\,E}{A\,B}$ e tabulis desumptum et multiplicatum per 2.30258509. Ita spatium velocitate constanti B C tempore B E percursum, ad spatium percursum cum velocitate per resistentiam decrescente. Q. e. i.

(z) * *Corol.* 4.; * cum globus et fluidum ejusdem densitatis supponantur, resistentia isto in casu erit æqualis vi quâ totus motus globi generari vel tolli posset quo tempore octo tertias diametri suæ uniformiter describeret, itaque sit B C motus globi, erit A B tempus quo uniformiter percurreret octo tertias suæ diametri, sit E F, dimidium B C, quoniam E F exprimit residuum motum, B E erit tempus quo dimidia pars motus amissa fuerit, sed B C ad E F ut A E ad A B et est B C ad E F ut 2 ad 1, per const. ergo etiam A E = 2 A B et B E = A B,

## PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

*Globi, per fluidum in canali cylindrico clausum et compressum uniformiter progredientis, resistentia est ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi globi, et ratione duplicatâ orificii canalis ad excessum hujus orificii supra circulum maximum globi, et ratione densitatis fluidi ad densitatem globi quamproximè.*

Patet per Corol. 2. Prop. XXXVII. procedit verò demonstratio ([a]) quemadmodum in Propositione præcedente.

### *Scholium.*

In Propositionibus duabus novissimis (perinde ut in Lem. V.) suppono quòd aqua omnis congelatur quæ globum præcedit, et cujus fluiditas auget resistentiam globi. Si aqua illa omnis liquescat, augebitur resistentia aliquantulum. Sed augmentum illud in his Propositionibus parvum erit et negligi potest, propterea quòd convexa superficies globi totum ferè officium glaciei faciat.

## PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

*Globi, in medio fluidissimo compresso progredientis, invenire resistentiam per phænomena.*

Sit A pondus globi in vacuo, B pondus ejus in medio resistente, D diameter globi, F spatium quod sit ad $\frac{4}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem

ideóque dimidium motum amittet quo tempore percurreret uniformiter octo tertias diametri suæ; sed illud spatium uniformiter percursum est ad spatium percursum velocitate per resistentiam decrescente ut $\frac{BE}{AB}$ (sive $\frac{1}{1}$) ad logarithmum e tabulis desumptum quantitatis $\frac{AE}{AB}$ (sive $\frac{2}{1}$) multiplicatum per 2.30258509, et ille logarithmus est .3010300, productum ergo erit .6931, &c. ideò 1. ad .6931, &c. ut $\frac{8}{3}$ D, ad 1.84832 × D, quod quidem paulo minus est quam 2 D, ideò globus in fluido ejusdem densitatis dimidiam sui motus partem prius describet *quam longitudinem duarum ipsius diametrorum descripserit.* Q. e. d.

([a]) * *Quemadmodum in Propositione præcedente.* Demonstratio eadem manet, quæ in nota 281. adjungenda tantum hæc sunt: resistentia autem cylindri est ad hanc vim quam proximè in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi globi, et ratione duplicata orificii canalis ad excessum hujus orificii supra circulum maximum globi, et ratione densitatis fluidi ad densitatem globi (per Corol. 2. Prop. XXXVII.); et resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri, per Lem. V. VI. VII. Q. e. d.

medii, ([b]) id est, ut A ad A — B, G tempus quo globus pondere B sine resistentiâ cadendo describit spatium F, et H velocitas quam globus hocce casu suo acquirit. Et erit H velocitas maxima quâcum globus, pondere suo B, in medio resistente potest descendere, per Corol. 2. Prop. XXXVIII. et resistentia, quam globus eâ cum velocitate descendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: resistentia verò, quam patitur in aliâ quâcunque velocitate, erit ad pondus B in duplicatâ ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam H, per Corol. 1. Prop. XXXVIII.

Hæc est resistentia quæ oritur ab inertiâ materiæ fluidi. Ea verò quæ oritur ab elasticitate, tenacitate, et frictione partium ejus, ([c]) sic investigabitur.

([b]) 283. * *Id est, ut A ad A — B.* Densitates corporum ejusdem voluminis sunt eorumdem pondera in vacuo (2. et 3. Lib. I.); sed A est pondus globi in vacuo, et A — B pondus æqualis globi aquæ etiam in vacuo; nam globus A aquæ immersum ponderis sui partem amittit æqualem ponderi paris voluminis aquæ (per Cor. 6. Prop. XX.). Ergo, &c.

([c]) 284. * *Sic investigabitur.* Ut eorum quæ hic Newtonus profert, demonstratio facilius intelligatur, non nulla revocanda sunt, quæ in Propositionibus VIII. et IX. demonstravit. Sunto C H et A B rectæ ad datam A C perpendiculares, C H quidem infinita, et B A æqualis $\frac{1}{4}$ A C. Centro C asymptotis C H, C A describatur per punctum B hyperbola B N S capiantur A C, A P, A K continuè proportionales, et per punctum K ducatur ad hyperbolam recta K N parallela A B. Et si corpus grave e quiete cadat in medio quod in duplicatâ velocitatis ratione resistit, exponatque area A B N K spatium a corpore cadente descriptum; velocitas corporis hocce casu acquisita exponi poterit per lineam A P, et ipsius velocitas maxima per datam A C (per Cor. 1. et 2. Prop. VIII.). Producatur jam B A ad D ut sit A D æqualis A C, jungatur D C, et centro D, asymptoto D C ac vertice principali A describatur altera hyperbola A T Z, quæ lineam D P productam secet in T, et lineam D Q ipsi D P infinitè propinquam in V; et sector evanescens D T V erit æqualis $\frac{\mathrm{PDQ} \times \mathrm{AC}}{\mathrm{CK}}$, et sector A T D tempus exponet quo corpus cadendo describit spatium A B N K et quo velocitatem A P acquirit (per Casum 2. Prop. IX.). Spatium verò quod corpus tempore quovis A T D cadendo describit, erit ad spatium quod corpus velocitate maximâ A C, eodem tempore uniformiter progrediendo, describere potest, ut area A B N K ad aream A T D (per Cor. 1. Prop. IX.), et tempus quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem A P acquirit, erit ad tempus quo velocitatem maximam A C in medio non resistente vi ponderis sui comparativi cadendo acquirere posset, ut sector A T D ad triangulum A D C (per Cor. 5. Prop. IX.).

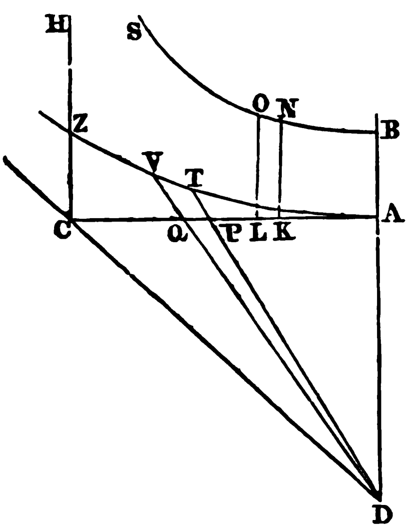
285. His præsuppositis, dicantur A C = A D = a, A B = $\frac{1}{4}$ a, A P = x, P Q = d x, et quia A C : A P = A P : A K, erit A K




$= \frac{xx}{a}$, C K $= \frac{aa - xx}{a}$, triangulum P D Q $= \frac{1}{2}$ a d x, et sector D T V $= \frac{\mathrm{PDQ} \times \mathrm{AC}}{\mathrm{CK}} = \frac{\frac{1}{2} a^3 dx}{aa - xx} = \frac{\frac{1}{4} aadx}{a + x} + \frac{\frac{1}{4} aadx}{a - x}$; undè, sumtis fluentibus, habetur sector A T D $= \frac{1}{4} aa \, L.\overline{a + x} - \frac{1}{4} aa \, L.\overline{a - x} = \frac{1}{4} aa \, L. \frac{a + x}{a - x}$, cui quantitati nihil addendum vel subducendum est, quia ubi fit A T D = o, et x = o, evanescit, ut oportet. Ducatur L O parallela

Demittatur globus ut pondere suo B in fluido descendat; et sit P tempus cadendi, idque in minutis secundis si tempus G in minutis secundis habeatur. Inveniatur numerus absolutus N qui congruit logarithmo

K N ipsique infinitè propinqua; et cum sit A K $= \frac{x x}{a}$ et (per Theor. IV. de Hyp.) K N $= \frac{C A \times A B}{C K} = \frac{\frac{1}{4} a^3}{a a - x x}$ ac K L $= \frac{2 x d x}{a}$, erit areæ A B N K fluxio K N O L $= \frac{\frac{1}{2} a^2 x d x}{a a - x x}$, sumptisque fluentibus, area A B N K $=$ Q const. $- \frac{1}{4} a a$ L. $\overline{a a - x x}$; quia verò area A B N K evanescit ubi fit $x = o$, erit constans Q $= \frac{1}{4} a a$ L. $a a$, et area accurata A B N K $= \frac{1}{4} a a$ L. $a a - \frac{1}{4} a a$ L. $\overline{a a - x x} = \frac{1}{4} a a \times$ L. $\frac{a a}{a a - x x}$. Porro (284) tempus P quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem acquirit li-




neæ A P seu x proportionalem, est ad tempus G quo velocitatem maximam H vi ponderis sui comparativi B sine resistentia cadendo acquirere potest, ut sector A T D ad triangulum A D C, id est, P : G $= \frac{1}{4} a a$ L. $\frac{a + x}{a - x} : \frac{1}{2} a a =$ L. $\frac{a + x}{a - x} : 2$. Quare erit $\frac{2 P}{G} =$ L. $\frac{a + x}{a - x}$, hoc logarithmo sumto in logistica cujus subtangens est unitas (33. Lib. II.). Quapropter si logarithmus numeri $\frac{a + x}{a - x}$ sumatur in tabulis, multiplicandus erit per numerum 2, 302585093, ut in Cor. 7. Prop. XXXV. factum est, et habebitur $\frac{2 P}{G}$ $=$ 2, 302585093 L. $\frac{a + x}{a - x}$, ideóque dividendo 1. per 2.3025, &c. numerus 0,4342944819 $\times \frac{2 P}{G}$ est logarithmus tabularis numeri $\frac{a + x}{a - x}$. Itaque si per tabulas quæratur numerus absolutus N qui congruat logarithmo 0,4342944819 $\times \frac{2 P}{G}$, erit N $= \frac{a + x}{a - x}$, ideóque $x = \frac{a [N - 1]}{N + 1}$. Est autem (284) A C ad A P seu a ad x, ut velocitas maxima H ad velocitatem cadendo acquisitam. Quare hæc velocitas erit $\frac{x H}{a} = \frac{N - 1}{N + 1} \times$ H, sicuti Newtonus invenit. Spatium quod globus velocitate maximâ H uniformiter progrediendo tempore P describit, est ad spatium 2 F quod eadem velocitate H uniformiter percurrit tempore G, ut tempus P ad tempus G (5. Lib. I.), et propterea spatium illud est $\frac{2 P F}{G}$. Altitudo S quam globus tempore P cadendo in medio resistente describit, est ad spatium $\frac{2 P F}{G}$, ut area A B N K ad sectorem A T D (284), id est, ut $\frac{1}{4} a a$ L. $\frac{a a}{a a - x x}$ ad $\frac{1}{4} a a$ L. $\frac{a + x}{a - x}$, sive ut L. $\frac{a a - x x}{a a}$ ad L. $\frac{a + x}{a - x}$; sed (ex dem.) $\frac{a + x}{a - x} =$ N, et $x = \frac{a [N - 1]}{N + 1}$, ac proinde $\frac{a a}{a a - x x} = \frac{[N + 1]^2}{4 N} = \frac{N \times [N + 1]^2}{4 N N}$, et si logarithmi sumantur in logistica cujus subtangens est unitas, est $\frac{2 P}{G} =$ L. $\frac{a + x}{a - x} =$ L. N, et L. $\frac{a a}{a a - x x} =$ L. $\frac{N \times [N + 1]^2}{4 N N} =$ L. N $+ 2$ L. $\frac{N + 1}{N}$ $-$ L. 4; ideóque L. $\frac{a a}{a a - x x}$ : L. $\frac{a + x}{a - x}$ $=$ L. N $+ 2$ L. $\frac{N + 1}{N} -$ L. 4 : L. N $= 1 + \frac{2 \text{ L. } \frac{N + 1}{N} - \text{L. } 4}{\text{L. N}} : 1 = 1 + \frac{G}{P}$ L. $\frac{N + 1}{N} - \frac{G}{2 P}$ L. $4 : 1 =$ S : $\frac{2 P F}{G}$. Quare altitudo S $= \frac{2 P F}{G} -$ F L. 4 $+$ 2 F L. $\frac{N + 1}{N}$. At si velimus tabularum logarithmis uti, ii multiplicandi sunt per numerum

0, 4342944819 $\frac{2\,P}{G}$, sitque L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: et velocitas cadendo acquisita erit $\frac{N-1}{N+1}$ H, altitudo autem descripta erit $\frac{2\,P\,F}{G}$ — 1, 3862943611 F + 4, 605170186 L F. ([d]) Si fluidum satis profundum sit negligi potest terminus 4, 605170186 L F; et erit $\frac{2\,P\,F}{G}$ — 1, 386294611 F altitudo descripta quamproximè. Patent hæc per Libri secundi Propositionem nonam et ejus Corollaria, ex hypothesi quod globus nullam aliam patiatur resistentiam nisi quæ oritur ab inertiâ materiæ. Si verò aliam insuper resistentiam patiatur, descensus erit tardior, et ex retardatione innotescet quantitas hujus resistentiæ.

Ut corporis in fluido cadentis velocitas et descensus facilius innotescant, composui tabulam sequentem, cujus columna prima denotat tempora descensûs, secunda exhibet velocitates cadendo acquisitas existente velocitate maximâ 100000000, tertia exhibet spatia temporibus illis cadendo descripta existente 2 F spatio quod corpus tempore G cum velocitate maximâ describit, et quarta exhibet spatia iisdem temporibus cum velocitate maximâ descripta. Numeri in quartâ columnâ sunt $\frac{2\,P}{G}$, et subducendo numerum 1, 3862944 — 4, 6051702 L, inveniuntur numeri in tertiâ columnâ, et multiplicandi sunt hi numeri per spatium F ut habeantur spatia cadendo descripta. Quinta his insuper adjecta est columna, quæ continet spatia descripta iisdem temporibus a corpore, vi ponderis sui comparativi B, ([e]) in vacuo cadente.

2, 302585092994, seu per 2, 302585093. Hic numerus dicatur M, logarithmus numeri 4 in tabulis sumptus Q, et logarithmus etiam tabularis numeri $\frac{N+1}{N}$ sit L; et erit $S = \frac{2\,P\,F}{G} - M\,Q\,F + 2\,M\,L\,F$. Est autem 2 M = 4, 605170186, et Q in tabulis vulgaribus est 0, 60206; seu accuratius 0, 60205999133, ideóque M Q = 1, 3862943611 quamproximè. Quare altitudo S, quam globus in medio resistente cadendo tempore P describit, est $\frac{2\,P\,F}{G}$ — 1, 3862943911 F + 4, 605170186 L F, uti Newtonus definivit.

([d]) * *Si fluidum satis profundum sit*, id est, si altitudo S quam globus tempore P cadendo describit, satis magna fuerit, negligi potest terminus 4, 605170186 L F. Cum enim sit L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$, ubi N est numerus satis magnus, seu ubi numerus $\frac{N+1}{N}$ est fere æqualis unitati, logarithmus L evanescit quam proximè. Sed, si velocitas maxima dicatur H, et velocitas tempore P casu globi acquisita V, est H : V = a : x (285), et ideò $\frac{H+V}{H-V} = \frac{a+x}{a-x}$ = N, et quando spatium descriptum S satis magnum est, fit V = H quam proximè, ac proinde $\frac{H+V}{H-V}$ seu N numerus satis magnus, ut ex sequenti tabula manifestum est. Patet ergo propositum.

([e]) * *In vacuo cadente.* Hujus tabulæ constructio paulo fusius exponenda videtur. Numeri singuli columnæ primæ, quibus exprimitur ratio temporis P ad tempus G, assumuntur pro lubitu; numeri verò in columna quarta correspondentes facillimè reperiuntur. Cum enim spatium tempore G velocitate maximâ H uniformiter descriptum sit 2 F, et spatia eâdem uniformi velocitate descripta temporibus, quibus describuntur, proportionalia sint; numeri co-

| *Tempora* P | *Velocitates cadentis in fluido.* | *Spatia cadendo descripta in fluido.* | *Spatia motu maximo descripta.* | *Spatia cadendo descripta in vacuo.* |
|---|---|---|---|---|
| 0,001G | 99999$\frac{29}{30}$ | 0,000001F | 0,002F | 0,000001F |
| 0,01G | 999967 | 0,0001F | 0,2F | 0,0001F |
| 0,1G | 9966799 | 0,0099834F | 0,2F | 0,01F |
| 0,2G | 19737532 | 0,0397361F | 0,4F | 0,04F |
| 0,3G | 29131261 | 0,0886815F | 0,6F | 0,09F |
| 0,4G | 37994896 | 0,1559070F | 0,8F | 0,16F |
| 0,5G | 46211716 | 0,2402290F | 1,0F | 0,25F |
| 0,6G | 53704957 | 0,3402706F | 1,2F | 0,36F |
| 0,7G | 60436778 | 0,4545405F | 1,4F | 0,49F |
| 0,8G | 66403677 | 0,5815071F | 1,6F | 0,64F |
| 0,9G | 71629787 | 0,7196609F | 1,8F | 0,81F |
| 1G | 76159416 | 0,8675617F | 2F | 1F |
| 2G | 96402758 | 2,6500055F | 4F | 4F |
| 3G | 99505475 | 4,6186570F | 6F | 9F |
| 4G | 99932930 | 6,6143765F | 8F | 16F |
| 5G | 99990920 | 8,6137964F | 10F | 25F |
| 6G | 99998771 | 10,6137179F | 12F | 36F |
| 7G | 99999834 | 12,6137073F | 14F | 49F |
| 8G | 99999980 | 14,6137059F | 16F | 64F |
| 9G | 99999997 | 16,6137057F | 18F | 81F |
| 10G | 99999999$\frac{3}{5}$ | 18,6137056F | 20F | 100F |

lumnæ quartæ, duplicatis numeris columnæ primæ correspondentibus, habentur. Quia verò spatia, a corpore vi ponderis sui comparativi B sine resistentia cadente, descripta, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus describuntur, et tempore G describitur spatium F; numeri columnæ quintæ sunt quadrata numerorum correspondentium in columna prima. Numeri columnæ secundæ velocitatem acquisitam cadendo in fluido tempore P indicant quæ est $\frac{N-1}{N+1} \times H$, sicque inveniuntur: assumpto in columna prima termino quovis, exempli causâ, 2 G pro P, fit $\frac{2P}{G} = \frac{4G}{G} = 4$, et hinc 0, 4342944819 $\frac{2P}{G} = 1,7371779276$. Huic logarithmo in tabulis congruit numerus absolutus 54, 59815 $= N$; unde fit $\frac{N-1}{N+1} = \frac{5359815}{5559815}$, et quia $H = 100000000$ (per Hyp.), velocitas tempore P, sive 2 G, acquisita $\frac{N-1}{N+1}$ H, est 96402758, uti Newtonus in tabula posuit. Inventis hoc modo numeris columnæ secundæ, inveniuntur quoque numeri columnæ tertiæ, videlicet $\frac{2P}{G} - 1,386293611 + 4,6051702$ L. Quoniam enim datus est numerus $\frac{2P}{G}$, et jam inventus fuit numerus N, cognoscetur numerus $\frac{N+1}{N}$ cum ipsius logarithmo L; atque ita obtinebitur numerus columnæ tertiæ.

286. Ex hâc porro tabulâ patet verum esse posse, quod nonnulli se observasse testantur, nimirum gravia in mediis resistentibus cadentia brevi satis tempore ad maximam quam acquirere possint velocitatem pervenire et postea moveri uniformiter; licet per theoriam non nisi tempore infinito, seu nunquam, possint maximam illam velocitatem reverâ acquirere. Nam si tempus P quo globus in fluido quocumque cadit, sit æquale tempori 5 G; globi velocitas acquisita erit ad velocitatem maximam ut 99990920 ad 100000000, seu ut 1. ad 1,0000908, quamproximè, et spatium hoc tempore 5 G descriptum erit 8, 6137964 F, et deinde spatia descripta crescent fere in progressione arithmetica ad modum temporum. Elapso igitur tempore 4 G vel 5 G globus uniformiter descendere videbitur, licet ejus velocitas reverâ perpetuò crescat. Si verò assumatur tempus P æquale 10 G, tum velocitas acquisita est ad velocitatem maximam ut 99999999 $\frac{3}{5}$ aa 100000000, et tantorum numerorum differentia $\frac{2}{5}$ prorsus insensibilis est oculis humanis.

*Scholium.*

Ut resistentias fluidorum investigarem per experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine et latitudine internâ digitorum novem (f) pedis Londinensis, profunditate pedum novem cum semisse, idemque implevi aquâ pluviali; et globis ex cerâ et plumbo incluso formatis, notavi tempora descensus globorum, existente descensus altitudine 112 digitorum pedis. Pes solidus cubicus Londinensis continet 76 libras Romanas aquæ pluvialis, et pedis hujus digitus solidus continet $\frac{19}{36}$ uncias libræ hujus (g) seu grana $253\frac{1}{3}$; et globus aqueus diametro digiti unius descriptus continet grana 132, 645 in medio aëris, (h) vel grana 132, 8 in vacuo; (i) et globus quilibet alius est ut excessus ponderis ejus in vacuo supra pondus ejus in aquâ.

*Exper.* 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in aëre et 77 granorum in aquâ, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor secundorum descripsit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor secundorum.

(k) Pondus globi in vacuo est $156\frac{13}{38}$ gran. et excessus hujus ponderis supra pondus globi in aquâ est $79\frac{13}{38}$ gran. (l) Unde prodit globi diameter 0, 84224 partium digiti. Est autem ut excessus ille ad pondus globi

(f) * *Pedis Londinensis.* Pes Londinensis est ad pedem Parisiensem ut 15 ad 16; uterque in digitos 12, et digitus in 12 lineas dividitur.

(g) * *Seu grana.* Libra Romana uncias 12, uncia 480. grana continet.

(h) 287. * *Vel grana 132, 8 in vacuo.* Corpus quodlibet ponderis sui partem amittit in aëre æqualem ponderi paris voluminis aëris; corporum vero pondera absoluta sub paribus voluminibus sunt ut eorum densitates, et densitas aquæ, juxta Newtonum, est ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Quare, cum globi aquei pondus in aëre parum differat ab ejusdem pondere in vacuo, dicendum est, ut 860 ad 1, ita pondus globi aquei granorum 132, 645 ad pondus æqualis globi aëris, quod proinde erit granorum 0, 1543 quam proximè. Addatur pondus hoc ponderi granorum 132, 645, et summa gran. 132, 7993, seu gran. 132, 8 erit pondus prædicti globi aquæ in vacuo quam proximè. Dato igitur pondere globi cujuslibet aquei in aëre, invenitur ejus pondus in vacuo, si ponderi dato addatur id quod ex divisione ejusdem ponderis per numerum 860 habetur.

(i) 288. * *Et globus quilibet,* &c. Globus quilibet E est ad globum aqueum C diametro digiti unius descriptum, ut excessus ponderis globi E in vacuo supra pondus ejus in aqua, ad pondus granorum 132, 8. Nam excessus ponderis globi E in vacuo supra pondus ejus in aquâ est pondus globi aquæ ejusdem cum globo E diametri; sed globi aquæ homogenei sunt ut eorumdem pondera: est igitur globus E ad globum C ut excessus ponderis globi E in vacuo supra pondus ejus in aqua, ad pondus 132, 8 granorum.

(k) * *Pondus globi in vacuo est* $156\frac{13}{38}$ *gran.* Si enim ex pondere globi in aëre gran. $156\frac{1}{4}$ subducatur pondus ejus in aqua, quod est gran. 77, residuum erit pondus globi aquæ ejusdem voluminis gran. $79\frac{1}{4}$; et propterea (287) ut habeatur pondus globi in vacuo, ponderi gran. $156\frac{1}{4}$ addendum est pondus gran. $\frac{79\frac{1}{4}}{860}$, et prodit pondus globi in vacuo gran. $156\frac{13}{38}$ quam proximè.

(l) * *Unde prodit globi diameter,* &c. Est enim (288) pondus gran. 132, 8 ad excessum $79\frac{13}{38}$, ut globus diametro digiti unius descriptus ad globum quæsitum; ideóque ut diametri 1 digiti cubus 1 ad diametri globi quæsiti cubum, qui proinde erit $\frac{79\frac{13}{38}}{132,8}$ partium digiti cubici. Hujus fractionis radix cubica, seu globi diameter, est 0, 84224 partium digiti quam proximè.

in vacuo, ([m]) ita densitas aquæ ad densitatem globi, ([n]) et ita partes octo tertiæ diametri globi (viz. 2, 24597 dig.) ad spatium 2 F, ([o]) quod proinde erit 4, 4256 dig. Globus tempore minuti unius secundi, toto suo pondere granorum $156\frac{13}{38}$, ([p]) cadendo in vacuo describet digitos $193\frac{1}{3}$, et pondere granorum 77, eodem tempore sine resistentiâ cadendo in aquâ ([q]) describet digitos 95, 219; ([r]) et tempore G, quod sit ad minutum unum secundum in subduplicatâ ratione spatii F seu 2, 2128 dig. ad 95, 219 dig. describet 2, 2128 dig. et velocitatem maximam H acquiret quâcum potest in aquâ descendere. ([s]) Est igitur tempus G 0″, 15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illâ maximâ H, globus describet spatium 2 F digitorum 4, 4256; ([t]) ideóque tempore minutorum quatuor secundorum describet spatium digitorum 116, 1245. ([u]) Subducatur spatium 1, 3862944 F seu 3, 0676 dig. et manebit spatium 113, 0569 digitorum quod globus cadendo in aquâ, in vase amplissimo, tempore minutorum quatuor secundorum describet. Hoc spatium, ob angustiam vasis lignei prædicti, ([x]) minui

([m]) * *Ita densitas aquæ ad*, &c. (283).

([n]) * *Et ita partes octo tertiæ diametri globi*, &c. Per Prop. XL. Lib. II.

([o]) * *Quod proinde erit* 4, 4256 *dig*. Nam $79\frac{13}{38} : 156\frac{13}{38} = 3015 : 5941 = 2, 24597 : 4, 4256$, quam proximè.

([p]) 289. * *Cadendo in vacuo describet digitos* $193\frac{1}{3}$. Quoniam corporis, præsertim gravioris, oscillationes quæ in minoribus arcubus fiunt, iisdem quam proximè temporibus peraguntur in aëre et in vacuo (per Cor. 2. Prop. XXVII. Lib. II.); spatium quod grave cadendo in vacuo tempore minuti unius secundi describit, est pedum Parisiensium $15\frac{1}{12}$, seu accuratius digitorum $181\frac{1}{6}$ quam proximè (471. Lib. I.); et quia pes Londinensis pede Parisiensi minor est in ratione 15 ad 16, erit spatium illud digitorum Londinensium $193\frac{11}{45}$, seu fere $193\frac{1}{4}$. Hoc spatium augeri paululum debet ob pondus in aëre oscillantis diminutum, et ideò poni potest digit. Lond. $193\frac{1}{3}$ quam proximè.

([q]) * *Describet digitos* 95, 219. Nam vires uniformes sunt ut spatia quæ corpus viribus illis agitatum dato tempore describit (179); et propterea $156\frac{13}{38}$ est ad 77 ut $193\frac{1}{3}$ dig. ad spatium quod globus vi ponderis granorum 77 tempore minuti unius secundi sine resistentia cadendo describit; unde spatium hoc prodit 95, 219 digit. quam proximè.

([r]) * *Et tempore G, quod sit*, &c. Spatia quæ corpus vi ponderis sui comparativi 77 gran. sine resistentiâ cadendo describit, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus describuntur (27. Lib. I.). Ergo tempus G, quo corpus vi ponderis sui comparativi sine resistentiâ cadendo describit spatium F (per Prop. XL.), est ad minutum unum secundum in subduplicatâ ratione spatii F seu 2, 2128 dig. ad 95, 219 digit.

([s]) 290. * *Est igitur tempus G* 0″, 15244. Si juxta notam 286, multiplicetur hæc fractio per numerum 5, productum erit 0″, 7622 seu 46‴ ferè. Quare globus, cujus diameter est 0, 84224 partium digiti et pondus in aëre $156\frac{1}{4}$ gran., in aqua cadendo tempore 46‴ describet spatium 19 dig. circiter et maximam suam velocitatem acquirere atque postea uniformi velocitate descendere videbitur (286).

([t]) * *Ideóque tempore minutorum quatuor secundorum*, &c. Sunt enim tempora ut spatia velocitate uniformi H descripta, et 0″, 15244 est ad 4″ ut 4, 4256 ad 116, 1245 ferè.

([u]) * *Subducatur spatium*, &c. Tempus P est minutorum secundorum quatuor, et ut G ad P ita est 2 F ad digitos $116, 1245 = \frac{2\,P\,F}{G}$, sed (per Prop. XL.) spatium quod globus in aqua cadendo tempore P describit, est $\frac{2\,P\,F}{G} - 1, 3862944\ F$, neglecto, scilicet, termino 4, 60517016 L F, qui ob parvitatem hic potest tutò contemni.

([x]) 291. * *Minui debet in ratione*, &c. Globi datâ velocitate moti resistentia in vase amplissimo sit r, in vase angustiore R, hujus vasis orificium æquale sit circulo c, circulus globi maximus sit m, densitas globi $\delta$, densitas fluidi d; vis uniformis quâ totus globi motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ uniformiter describeret tolli possit vel generari, sit p. Et (per Prop. XXXVIII.) erit $p : r = \delta : d$; et (per Prop. XXXIX.) $R : p = d\,c^3 : \delta\,[c - \frac{1}{2}m] \times [c - m]^2$; et propterea, conjunctis his rationibus, $R : r = c^3 : [c - \frac{1}{2}m] \times [c - m]^2$. Datâ igitur velocitate globi, resistentia in vase amplissimo est ad resistentiam in vase angustiore in datâ ratione $[c - \frac{1}{2}m] \times [c - m]^2$ ad $c^3$. Brevitatis causâ ponatur r ad R ut 1 ad n.

debet in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione orificii vasis ad excessum orificii hujus supra semi-circulum maximum globi et ex simplici ratione orificii ejusdem ad excessum ejus supra circulum maximum globi, id est, in ratione 1 ad 0, 9914. Quo facto, habebitur spatium 112, 08 digitorum, quod globus cadendo in aquâ in hoc vase ligneo tempore minutorum quatuor secundorum per theoriam describere debuit quamproximè. Descripsit verò digitos 112 per experimentum.

*Exper.* 2. Tres globi æquales, quorum pondera seorsim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in aëre et $5\frac{1}{16}$ granorum in aquâ, successivè demittebantur, et unusquisque cecidit in aquâ tempore minutorum secundorum quindecim, casu suo describens altitudinem digitorum 112.

(y) Computum ineundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{5}{12}$ gran. excessus hujus ponderis supra pondus in aquâ $71\frac{17}{48}$ gran. diameter globi 0, 81296 dig. octo tertiæ partes hujus diametri 2, 16789 dig. spatium 2 F 2,3217 dig. spatium quod globus pondere $5\frac{1}{16}$ gran. tempore 1″ sine resistentiâ cadendo describat 12, 808 dig. et tempus G 0″, 301056. Globus igitur, velocitate maximâ quâcum potest in aquâ vi ponderis $5\frac{1}{16}$ gran. descendere, tempore 0″, 301056 describet spatium 2, 3217 dig. et tem-

Quando velocitas in vase amplissimo maxima est, seu H, resistentia æqualis est ponderi B globi in aqua, et F est spatium quod globus tempore G vi ponderis B sine resistentia cadendo describit ut velocitatem illam H acquirat. Sit h velocitas maxima globi in vase angustiore, quam cum acquisivit, resistentia ejus æqualis est ponderi B; et cum resistentia globi in vase angustiore æqualis sit n B ubi velocitas ejus est H (ex demonstratis), et resistentiæ sint ut quadrata velocitatum, erit $HH : hh = nB : B = n : 1$, ideóque $H : h = \sqrt{n} : 1$. Sit g tempus quo globus pondere B sine resistentiâ cadendo acquirit velocitatem h, et f spatium quod eodem tempore describit; et erit $H : h = \frac{F}{G} : \frac{f}{g}$, ac proinde $\frac{F}{G} : \frac{f}{g} = \sqrt{n} : 1$. Porro spatia in vase amplissimo tempore P, quod satis magnam habet rationem ad tempus G, cadendo descripta, sunt quam proximè ut $\frac{2PF}{G}$, seu ut spatia eodem tempore motu maximo descripta, ut ex Prop. XL. et ex tabulâ huic scholio præfixâ patet; et similiter spatium eodem tempore P in vase angustiore descriptum erit etiam ut $\frac{2Pf}{g}$ ferè. Quare cum sit $\frac{2PF}{G}$ ad $\frac{2Pf}{g}$ ut $\frac{F}{G}$ ad $\frac{f}{g}$, id est (ex demonstr.) ut $\sqrt{n}$ ad 1; spatium tempore P in vase amplissimo descriptum erit ad spatium eodem tempore in vase angustiore descriptum, ut $\sqrt{n}$ ad 1, id est, ut $c^{\frac{3}{2}}$ ad $[c - m] \times [c - \frac{1}{2}m]^{\frac{1}{2}}$, aut quod idem est, in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione orificii vasis c ad excessum $c - \frac{1}{2}m$ orificii hujus supra semi-circulum maximum globi, et ex simplici ratione orificii ejusdem c ad excessum ejus $c - m$, supra circulum maximum globi.

Sed vasis orificium c est 81 digitorum (ex dictis initio scholii hujus), et circuli m diameter inventa est 0, 84224 partium digiti, ideóque si dicatur ut 7 ad 11 ita 0, 84224 digit. ad semi-peripheriam circuli m, hæc invenietur digit. 1, 32352, et hinc circulus m prodit 0, 5573 partium digiti quadrati circiter; ex quibus habetur $\frac{c}{c-m} = 1,0069$, et $\frac{c^{\frac{1}{2}}}{[c - \frac{1}{2}m]^{\frac{1}{2}}} = 1,0017$, ac proinde $\frac{c^{\frac{3}{2}}}{[c-m] \times [c - \frac{1}{2}m]^{\frac{1}{2}}} = 1,00861$. Quare spatium in vase amplissimo descriptum digit. 113, 0569 est ad spatium in vase angustiore eodem tempore minutorum quatuor secundorum descriptum, ut 1, 00861 ad 1, seu ut 1 ad 0, 9914 ferè; unde hoc spatium prodit 111, 08 digit.

(y) * *Computum ineundo*, &c. Calculo experimenti primi fusè exposito, nulla superest difficultas in computo simili experimenti hujus.

pore 15″ spatium 115, 678 dig. Subducatur spatium 1, 3862944 F seu 1, 609 dig. et manebit spatium 114, 069 dig. quod proinde globus eodem tempore in vase latissimo cadendo describere debet. Propter angustiam vasis nostri detrahi debet spatium 0, 895 dig. circiter. Et sic manebit spatium 113, 174 dig. quod globus cadendo in hoc vase, tempore 15″ describere debuit per theoriam quamproximè. Descripsit veros digitos 112 per experimentum. Differentia est insensibilis.

*Exper.* 3. Globi tres æquales, quorum pondera seorsim erant 121 gran. in aëre et 1 gran. in aquâ, successive demittebantur; et cadebant in aqua temporibus 46″, 47″, et 50″, describentes altitudinem digitorum 112.

(*) Per theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter. Quod tardius ceciderunt, utrum minori proportioni resistentiæ quæ a vi inertiæ in tardis motibus oritur, ad resistentiam quæ oritur ab aliis causis tribuendum sit; an potius bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempestatis vel manus globum demittentis, vel etiam erroribus insensibilibus in ponderandis globis in aquâ, incertum esse puto. Ideóque pondus globi in aquâ debet esse plurium granorum, ut experimentum certum et fide dignum reddatur.

*Exper.* 4. Experimenta hactenus descripta cœpi, ut investigarem resistentias fluidorum, antequam theoria in propositionibus proximè præcedentibus exposita mihi innotesceret. Postea, ut theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine internâ digitorum $8\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cerâ et plumbo incluso globos quatuor formavi, singulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in aëre et $7\frac{1}{8}$ granorum in aquâ. Et hos demisi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad semi-minuta secunda oscillans, mensurarem. Globi, ubi ponderabantur et postea cadebant, frigidi erant et aliquamdiu frigidi manserant; quia calor ceram rarefacit, et per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua, et cera rarefacta non statim ad densitatem pristinam per

(*) * *Per theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter.* Cum pondus globi sit 121 granorum in aëre, et 1 grani in aqua, erit pondus æqualis globi aquæ granorum 120; et ideò pondus globi in vacuo gran. $121\frac{120}{860}$ seu $121\frac{6}{43}$ (287). Excessus hujus ponderis supra pondus globi in aqua est gran. $120\frac{6}{43}$. Unde prodeunt globi diameter 0, 9671 partium digiti, spatium 2 F 2, 6004 digitorum, spatium quod globus pondere 1 grani sine resistentia cadendo tempore minuti unius secundi describit digit. 1, 5959, et tempus G 0″, 9026. Hoc tempore globus cum velocitate maximâ H uniformiter progrediendo describet spatium 2 F seu 2, 6004 dig. et tempore 40″ describet spatium 115, 2404 dig. Subducatur spatium 1, 3862944 F seu 1, 8024 dig. et manebit spatium 113, 438 dig. quod globus cadendo in aqua in vase amplissimo tempore 40″ describeret; et hoc spatium, propter angustiam vasis aliquantulum minui debet, nimirum in ratione 10049 ad 10025 circiter. Globi igitur per theoriam spatium 112 digitorum cadendo describere debuerunt tempore 40″ circiter.

frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus ex aquâ extantis descensus eorum sub initio accelleraretur. Et ubi penitùs immersi quiescebant, demittebantur quam cautissimè, ne impulsum aliquem a manu demittente acciperent. Ceciderunt autem successivè temporibus oscillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 et 51, describentes altitudinem pedum quindecim et digitorum duorum. Sed tempestas jam paulò frigidior erat quàm cum globi ponderabantur, ideóque iteravi experimentum alio die, et globi ceciderunt temporibus oscillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 et 53, ac tertio temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 et 53. Experimento sæpius capto, globi ceciderunt maximâ ex parte temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$ et 50. Ubi tardius cecidere, suspicor eosdem retardatos fuisse impingendo in latera vasis.

Jam computum per theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{2}{5}$ granorum. Excessus hujus ponderis supra pondus globi in aquâ $132\frac{11}{40}$ gran. Diameter globi 0, 99868 dig. Octo tertiæ partes diametri 2, 66315 dig. Spatium 2 F 2,8066 dig. Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius secundi, sine resistentiâ cadendo describit 9, 88164 dig. Et tempus G 0″, 376843. Globus igitur, velocitate maximâ quâcum potest in aquâ vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum descendere, tempore 0″, 376843 describit spatium 2, 8066 digitorum, et tempore 1″ spatium 7, 44766 digitorum, et tempore 25″ seu oscillationum 50 spatium 186, 1915 dig. Subducatur spatium 1, 386294 F, seu 1, 9454 dig. et manebit spatium 184, 2461 dig. quod globus eodem tempore in vase latissimo describet. Ob angustiam vasis nostri, minuatur hoc spatium in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione orificii vasis ad excessum hujus orificii supra semi-circulum maximum globi, et simplici ratione ejusdem orificii ad excessum ejus supra circulum maximum globi; et habebitur spatium 181, 86 digitorum, quod globus in hoc vase tempore oscillationum 50 describere debuit per theoriam quamproximè. Descripsit verò spatium 182 digitorum tempore oscillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per experimentum.

*Exper.* 5. Globi quatuor pondere $154\frac{3}{8}$ gran. in aëre et $21\frac{1}{2}$ gran. in aquâ sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ et 30, et nonnunquam 31, 32 et 33, describentes altitudinem pedum quindecim et digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 29 quamproximè.

*Exper.* 6. Globi quinque pondere $212\frac{3}{8}$ gran. in aëre et $79\frac{1}{2}$ in aquâ sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16,

17 et 18, describentes altitudinem pedum quindecim et digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 15 quamproximè.

*Exper.* 7. Globi quatuor pondere 293⅝ gran. in aëre et 35⅞ gran. in aquâ sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum 29½, 30, 30½, 31, 32 et 33, describentes altitudinem pedum quindecim et digiti unius cum semisse.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 28 quamproximè.

Causam investigando cur globorum, ejusdem ponderis et magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi ubi primum demittebantur et cadere incipiebant, oscillarent circum centra, latere illo quod forte gravius esset primum descendente, et motum oscillatorium generante. Nam per oscillationes suas globus majorem motum communicat aquæ, quam si sine oscillationibus descenderet; et communicando, amittit partem motûs proprii quo descendere deberet: et pro majore vel minore oscillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recidit semper a latere suo quod per oscillationem descendit, et recedendo appropinquat lateribus vasis et in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oscillatio in globis gravioribus fortior est, in majoribus aquam magis agitat. Quâpropter, ut oscillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cerâ et plumbo construxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope superficiem ejus; et globum ita demisi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, esset infimum ab initio descensus. Sic oscillationes factæ sunt multo minores quam prius, et globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis sequentibus.

*Exper.* 8. Globi quatuor, pondere granorum 139 in aëre et 6½ in aquâ, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non plurium quam 52, non pauciorum quam 50, et maximâ ex parte tempore oscillationum 51 circiter, describentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 52 circiter.

*Exper.* 9. Globi quatuor, pondere granorum 273¼ in aëre et 140¾ in aquâ, sæpius demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, describentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam verò hi globi cadere debuerunt tempore oscillationum 11⅓ quamproximè.

*Exper.* 10. Globi quatuor, pondere granorum 384 in aëre et 119½ in

aquâ, sæpe demissi, cadebant temporibus oscillationum $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ et 19, describentes altitudinem digitorum $181\frac{3}{4}$. Et ubi ceciderunt tempore oscillationum 19, nonnunquam audivi impulsum eorum in latera vasis antequam ad fundum pervenerunt.

Per theoriam verò cadere debuerunt tempore oscillationum $15\frac{5}{9}$ quamproximè.

*Exper.* 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aëre et $3\frac{29}{32}$ in aquâ sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 et 46, et maximâ ex parte 44 et 45, describentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $46\frac{5}{9}$ circiter.

*Exper.* 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aëre et $4\frac{3}{8}$ in aquâ, aliquoties demissi, ceciderunt temporibus oscillationum 61, 62, 63, 64 et 65, describentes altitudinem digitorum 182.

Et per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $64\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per hæc experimenta manifestum est quod, ubi globi tardè ceciderunt, ut in experimentis secundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi rectè exhibentur per theoriam, at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis sextis, nonis ac decimis, (a) resistentia paulo major extitit quam in duplicatâ ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oscillant aliquantulum: et hæc oscillatio in globis levioribus et tardius cadentibus, ob motûs languorem citò cessat; in gravioribus autem et majoribus, ob motûs fortitudinem diutius durat, et non nisi post plures oscillationes ab aquâ ambiente cohiberi potest. Quinetiam globi, quo velociores sunt, eo minus premuntur a fluido ad posticas suas partes; et si velocitas perpetuo augeatur, spatium vacuum tandem a tergo relinquent, (b) nisi compressio fluidi simul augeatur. Debet autem compressio fluidi (per Prop. XXXII. et XXXIII.) (c) augeri in duplicatâ ratione velocitatis, ut resistentia sit in eâdem duplicatâ ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulò minus premuntur a tergo, et defectu pres-

(a) * *Resistentia paulo major extitit quam in duplicatâ ratione velocitatis.* Si enim resistentia accuratè esset in duplicatâ velocitatis ratione, tempora cadendi tam per experimenta quam per theoriam definita, æquarentur; at si resistentia major quam in duplicatâ ratione velocitatis, tempora quibus corpus cadendo datum spatium describit, majora esse debent in experimentis quam in theoriâ, quæ minorem resistentiam supponit.

(b) * *Nisi compressio fluidi simul augeatur.* Tanta enim esse potest globi velocitas, ut fluidum ad posticas illius partes satis citò recurrere et locum a globo relictum statim occupare nequeat, nisi fluidi compressio augeatur, ut per fluidum pressio et motus celerius propagentur.

(c) * *Augeri in duplicatâ ratione velocitatis,* &c. Nam partes fluidi per compressionem in se mutuo agunt et reagunt, et si vires quibus fluidi particulæ se mutuò agitant, augeantur in duplicatâ ratione velocitatis, resistentia est in eâdem ratione duplicatâ, per Cor. 2. Prop. XXXIII.

sionis hujus, resistentia eorum fit paulo major quàm in duplicatâ ratione velocitatis.

Congruit igitur theoria cum phænomenis corporum cadentium in aquâ, reliquum est ut examinemus phænomena cadentium in aëre.

*Exper.* 13. A culmine Ecclesiæ Sancti Pauli, in urbe Londini, mense Junio 1710 globi duo vitrei simul demittebantur, unus argenti vivi plenus, alter aëris; et cadendo describebant altitudinem pedum Londinensium 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis suspendebatur, ad alterum pessulo ligneo incumbebat; et globi duo huic tabulæ impositi simul demittebantur, subtrahendo pessulum ope fili ferrei ad terram usque demissi ut tabula polis ferreis solummodo innixa super iisdem devolveretur, et eodem temporis momento pendulum ad minuta secunda oscillans, per filum illud ferreum tractum demitteretur et oscillare inciperet. Diametri et pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur ([d]) in tabulâ sequente.

| *Globorum mercurio plenorum.* | | | *Globorum aëre plenorum.* | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Pondera.* | *Diametri.* | *Tempora cadendi.* | *Pondera.* | *Diametri.* | *Tempora cadendi.* |
| 908 *gran.* | 0,8 *digit.* | 4″ | 510 *gran.* | 5,1 *digit.* | $8\frac{1}{2}$″ |
| 983 | 0,8 | 4— | 642 | 5,2 | 8 |
| 866 | 0,8 | 4 | 599 | 5,1 | 8 |
| 747 | 0,75 | 4+ | 515 | 5,0 | $8\frac{1}{4}$ |
| 808 | 0,75 | 4 | 483 | 5,0 | $8\frac{1}{2}$ |
| 784 | 0,75 | 4+ | 641 | 5,2 | 8 |

Cæterum tempora observata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per theoriam Galilæi) minutis quatuor secundis ([e]) describent pedes Londinenses 257, et pedes 220 minutis tantum 3″ 42‴. Tabula lignea utique, detracto pessulo, tardius devolvebatur quam par erat, et tardâ suâ devolutione impediebat descensum globorum sub initio. Nam globi incumbe-

([d]) * *In tabulâ sequente* 4 — significat tempus cadendi minutis quatuor secundis paulo minus fuisse, et 4 + tempus minutis quatuor secundis paulo majus indicat.

([e]) * *Describent pedes Londinenses*, &c. Quoniam densitas mercurii est ad densitatem aëris ut 11890 ad 1 circiter, parùm admodum minuitur mercurii pondus in aëre, et ideò globi mercurio pleni eâdem ferè celeritate in aëre et in vacuo per breve tempus descendunt; sed gravia omnia in vacuo cadentia tempore minuti unius secundi describunt pedis Londinensis digitos $193\frac{1}{3}$ (289), et spatia descripta sunt in duplicatâ ratione temporum (27. Lib. I.). Quare ut 1 ad 16 ita $193\frac{1}{3}$ dig. ad spatium quod globus mercurio plenus tempore 4″ cadendo describit, quod proinde erit 3093 dig. seu 257 pedum Londinensium circiter. Simili modo, cum fit 3″. 42‴ = 3″.7, erit 1 ad 13.69 ut $193\frac{1}{3}$ dig. ad spatium tempore 3″. 42‴ descriptum quod prodit ped. Lond. 220 circiter. Sed globi mercurio pleni spatium hoc 220 ped. tempore 4″ describunt in experimentis, et differentia temporum 4″ et 3″. 42‴ est 18‴. Tempora igitur prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter.

bant tabulæ prope medium ejus, et paulò quidem propiores erant axi ejus quam pessulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, et jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præsertim in globis majoribus qui tabulæ devolventi paulo diutius incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto tempora, quibus globi sex majores cecidêre, evadent 8″ 12‴, 7″ 42‴, 7″ 42‴, 7″ 57‴, 8″ 12‴, et 7″ 42‴.

Globorum igitur aëre plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 constructus, cecidit tempore 8″ 12‴, describendo altitudinem pedum 220. (f) Pondus aquæ huic globo æqualis est 16600 granorum; et pondus aëris eidem æqualis est $\frac{16600}{860}$ gran. seu $19\frac{3}{10}$ gran. ideóque pondus globi in vacuo est $502\frac{3}{10}$ gran. et hoc pondus est ad pondus aëris globo æqualis, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, et ita sunt 2 F ad octo tertias partes diametri globi, id est, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2 F prodeunt 28 ped. 11 dig. Globus cadendo in vacuo, toto suo pondere $502\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius secundi describit digitos $193\frac{1}{3}$ ut supra, et pondere 483 gran. describit digitos 185, 905, et eodem pondere 483 gran. etiam in vacuo describit spatium F seu 14 ped. $5\frac{1}{2}$ dig. (g) tempore 57‴ 58⁗, et velocitatem maximam acquirit quâcum possit in aëre descendere. Hâc velocitate globus, tempore 8″ 12‴, describet spatium pedum 245 et digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer 1, 3863 F seu 20 ped. $0\frac{1}{2}$ dig. et manebunt 225 ped. 5 dig. Hoc spatium igitur globus tempore 8″ 12‴, cadendo describere debuit per theoriam. Descripsit verò spatium 202 pedum per experimentum. Differentia insensibilis est.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aëre plenos applicatis, confeci tabulam sequentem.

(f) * *Pondus aquæ huic globo æqualis est 16600 granorum.* Globus aqueus, cujus diameter est unius digiti continet grana 132, 8 (287), et globorum homogeneorum, pondera sunt ut diametrorum cubi, et propterea ut 1 ad 125 ita sunt 132, 8 grana ad pondus globi aquei cujus diameter est digitorum 5, quod proinde pondus est gran. 16600. Globorum æqualium pondera sunt ut illorum densitates, et densitas aquæ est ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Quare pondus globi aëris diametro digitorum 5 descripti est $\frac{16600}{860}$ seu $19\frac{3}{10}$ gran. quam proximè. Hinc pondus globi vitrei aëre pleni in vacuo est gran. $483 + 19\frac{3}{10}$ seu gran. $502\frac{3}{10}$, et hoc pondus est ad pondus aëris globo æqualis, id est, densitas globi, si homogeneus fingatur, ad densitatem aëris, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$ *et ita sunt 2 F*, &c., cætera patent ut in superioribus calculis.

(g) 292. * *Tempore 57‴ 58⁗.* Hoc tempus, quod ante dictum est G, ducatur in numerum 5, et productum erit fere 5″; et propterea (186) globus cujus diameter est 5 digit. et pondus in aëre gran. 483, tempore minutorum secundorum quinque describet spatium 124 pedum circiter, et deinde videbitur uniformiter descendere.

| *Globorum pondera.* | *Diametri.* | *Tempora cadendi ab altitudine pedum* 220. | | *Spatia describenda per theoriam.* | | *Excessus.* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 510 *gran.* | 5,1 *dig.* | 8″ | 12‴ | 226 *ped.* | 11 *dig.* | 6 *ped.* | 11 *dig.* |
| 642 | 5,2 | 7 | 42 | 230 | 9 | 10 | 9 |
| 599 | 5,1 | 7 | 42 | 227 | 10 | 7 | 10 |
| 515 | 5 | 7 | 57 | 224 | 5 | 4 | 5 |
| 483 | 5 | 8 | 12 | 225 | 5 | 5 | 5 |
| 641 | 5,2 | 7 | 42 | 230 | 7 | 10 | 7 |

*Exper.* 14. Anno 1719. mense Julio, D. Desaguliers hujusmodi experimenta iterum cepit, formando vesicas porcorum in orbem sphæricum ope sphæræ ligneæ concavæ ambientis, quam madefactæ implere cogebantur inflando aërem; et hasce rarefactas et exemptas demittendo ab altiore loco in templi ejusdem turri rotunda fornicata, nempe ab altitudine pedum 272; et eodem temporis momento demittendo etiam globum plumbeum cujus pondus erat duarum librarum Romanarum circiter. Et interea aliqui stantes in supremâ parte templi, ubi globi demittebantur, notabant tempora tota cadendi, et alii stantes in Terrâ notabant differentiam temporum inter casum globi plumbei et casum vesicæ. Tempora autem mensurabantur pendulis ad dimidia minuta secunda oscillantibus. Et eorum qui in Terrâ stabant unus habebat horologium cum elatere ad singula minuta secunda quater vibrante; alius habebat machinam aliam affabrè constructam cum pendulo etiam ad singula minuta secunda quater vibrante. Et similem machinam habebat unus eorum qui stabant in summitate templi. Et hæc instrumenta ita formabantur, ut motus eorum pro lubitu vel inciperent vel sisterentur. Globus autem plumbeus cadebat tempore minutorum secundorum quatuor cum quadrante circiter. Et addendo hoc tempus ad prædictam temporis differentiam, colligebatur tempus totum quo vesica cecidit. Tempora, quibus vesicæ quinque post casum globi plumbei primâ vice ciciderunt, erant $14\frac{3}{4}''$, $12\frac{3}{4}''$, $14\frac{5}{8}'''$, $17\frac{3}{4}''$ et $16\frac{7}{8}''$, et secundâ vice $14\frac{1}{2}''$, $14\frac{1}{4}''$, $14''$, $19''$ et $16\frac{3}{4}''$. Addantur $4\frac{1}{4}''$, tempus utique quo globus plumbeus cecidit, et tempora tota quibus vesicæ quinque ceciderunt, erant primâ vice $19''$, $17''$, $18\frac{7}{8}''$, $22''$ et $21\frac{1}{8}''$; et secundâ vice, $18\frac{3}{4}''$, $18\frac{1}{2}''$, $18\frac{1}{4}''$, $23\frac{1}{4}''$ et $21''$. Tempora autem in summitate templi notata, erant primâ vice $19\frac{3}{8}''$, $17\frac{1}{4}''$, $18\frac{3}{4}''$, $22\frac{1}{8}''$ et $21\frac{5}{8}''$; et secundâ vice $19''$, $18\frac{5}{8}''$, $18\frac{3}{8}''$, $24''$ et $21\frac{1}{4}''$. Cæterum vesicæ non semper rectâ cadebant, sed nonnunquam volitabant, et hinc inde oscillabantur inter cadendum. Et his motibus tempora cadendi prorogata sunt et

aucta nonnunquam dimidio minuti unius secundi, nonnunquam minuto secundo toto. Cadebant autem rectius vesica secunda et quarta primâ vice; et prima ac tertia secundâ vice. Vesica quinta rugosa erat et per rugas suas nonnihil retardabatur. Diametros vesicarum deducebam ex earum circumferentiis filo tenuissimo bis circundato mensuratis. Et theoriam contuli cum experimentis in tabulâ sequente, assumendo densitatem aëris esse ad densitatem aquæ pluvialis ut 1 ad 860, et computando spatia quæ globi per theoriam ([h]) describere debuerunt cadendo.

| *Vesicarum pondera.* | *Diametri.* | *Tempora cadendi ab altitudine pedum 272.* | *Spatia iisdem temporibus describenda per theoriam.* | | *Differentia inter theor. et exper.* | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 128 *gran.* | 5,28 *dig.* | 19″ | 271 *ped.* | 11 *dig.* | —0 *ped.* | 1 *dig.* |
| 156 | 5,19 | 17 | 272 | 0½ | +0 | 0½ |
| 137½ | 5,3 | 18½ | 272 | 7 | +0 | 7 |
| 97½ | 5,26 | 22 | 277 | 4 | +5 | 4 |
| 99⅓ | 5 | 21⅛ | 282 | 0 | +10 | 0 |

Globorum igitur tam in aëre quàm in aquâ motorum resistentia prope omnis per theoriam nostram recte exhibetur, ac densitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis est.

In scholio, quod Sect. VI. subjunctum est, ostendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium et æquivelocium in aëre, aquâ, et argento vivo motorum resistentiæ sunt ut fluidorum densitates. ([i]) Idem hic ostendimus magis accuratè per experimenta corporum cadentium in aëre et aquâ. Nam pendula singulis oscillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis semper contrarium, et resistentia ab hoc motu oriunda, ut et resistentia fili quo pendulum suspendebatur, totam penduli resistentiam majorem reddiderunt quàm resistentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulo-

([h]) * *Describere debuerunt cadendo.* Exempli causâ calculum tentabimus experimenti cum tertia vesica facti. Hujus vesicæ diameter erat 5.3 digitorum et pondus in aëre granorum 137, 5. Globus aëris diametro digitorum 5.3 descriptus continet 23 grana quam proxime; unde vesicæ pondus in vacuo erat gran. 160, 5, et ut 23 ad 160, 5 ita sunt octo tertiæ partes diametri vesicæ seu digiti $14\frac{2}{13}$ ad spatium 2 F, quod ita prodit digit. 98, 626. Vesica cadendo in vacuo toto suo pondere 160, 5 gran. tempore minuti unius secundi describit digitos 193⅓, et pondere 137, 5 gran. describit digitos 165, 628, et eodem pondere 137, 5 gran. etiam in vacuo describit spatium F digitorum 49, 313 tempore 0″, 5456 et velocitatem maximam acquirit cum quâ possit in aëre descendere. Hâc velocitate vesica tempore minutorum secundorum 18½ describet spatium 277 ped. et 8. digit. circiter. Subducatur spatium 1, 3863 F seu 5. ped. et 8 digit., et manebunt 273 pedes; cùm in tabula accuratiore calculo confecta spatium per theoriam describendum sit 272 ped. et 7 digit., et in experimento sit 272 ped.

([i]) * *Idem hic ostendimus*, &c. Nam theoria experimentis confirmata, cui superiores computationes nituntur, supponit resistentiam, cæteris paribus, esse in ratione compositâ ex ratione duplicatâ velocitatis mobilis et ratione simplici densitatis fluidi.

rum in scholio illo exposita, globus ejusdem densitatis cum aquâ, describendo longitudinem semi-diametri suæ in aëre, amittère deberet motûs sui partem $\frac{1}{3342}$. At per theoriam in hâc septimâ Sectione expositam et experimentis cadentium confirmatam, globus idem describendo longitudinem eandem, (k) amittere deberet motûs sui partem tantùm $\frac{1}{4586}$, posito quod densitas aquæ sit ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Resistentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob causas jam descriptas) quàm per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cùm pendulorum in aëre, aquâ et argento vivo oscillantium resistentiæ a causis similibus similiter augeantur, proportio resistentiarum in his mediis, tam per experimenta pendulorum, quàm per experimenta corporum cadentium, satis rectè exhibebitur. Et inde concludi potest quod corporum in fluidis quibuscunque fluidissimis motorum resistentiæ, cæteris paribus, sunt ut densitates fluidorum.

(l) His ita stabilitis, dicere jam licet quamnam motûs sui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproximè. Sit D diameter globi, et V velocitas ejus sub initio motus, et T tempus, quo globus velocitate V in vacuo describet spatium, quod sit ad spatium $\frac{8}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem fluidi: et globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio t amittet velocitatis suæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$, et describet spatium, quod sit ad spatium uniformi velocitate V eodem tempore descriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093 est ad numerum $\frac{t}{T}$, per Corol. 7. Prop. XXXV. In motibus tardis resistentia potest esse paulò minor, (m) propterea quod figura globi paulò aptior sit ad motum

(k) * *Amittere deberet motûs sui partem tantùm* $\frac{1}{4586}$. Sit D diameter globi V ejus velocitas sub initio motus in fluido, 2 F spatium quod sit ad $\frac{8}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem aëris, hoc est, ut 860 ad 1, ideóque 2 F $= \frac{6880}{3}$ D; sit T tempus quo globus cum velocitate V uniformiter progrediendo describit spatium 2 F, et t tempus quo eâdem uniformi velocitate describit spatium $\frac{1}{2}$ D; et erit t : T $= \frac{1}{2}$ D : $\frac{6880}{3}$ D $= 3 : 13760$, et inde t : T + t $= 3 : 13763$, ideóque $\frac{t}{T+t} = \frac{3}{13763} = \frac{1}{4586}$ quam proximè. Est autem $\frac{tV}{T+t}$ velocitatis V pars amissa tempore t (per Cor. 3. Prop. XXXVIII.). Globus igitur describendo longitudinem semi-diametri suæ in aëre, per theoriam in hac septimâ Sectione expositam amittere debet motûs sui partem $\frac{1}{4586}$.

(l) * *His ita stabilitis, dicere jam licet quamnam motûs sui partem globus quilibet, in fluido quocumque projectus* et solâ vi insitâ motus, *dato tempore amittet quam proximè*; theoriam enim cum experimentis consentire vidimus tum in fluidis elasticis, quale est aër, tum in fluidis non elasticis, quale est aqua. Quæ sequuntur, manifesta sunt per notam (282) ad Cor. 3. Prop. XXXVIII.

(m) * *Propterea quod figura globi, paulo aptior sit ad motum*, &c. Nam in Lemmate VII.

quàm figura cylindri eâdem diametro descripti. In motibus velocibus resistentia potest esse paulò major, propterea quod elasticitas et compressio fluidi ([n]) non augeantur in duplicatâ ratione velocitatis. Sed hujusmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis aër, aqua, argentum vivum et similia fluida, per divisionem partium in infinitum, subtiliarentur et fierent media infinitè fluida; tamen globis projectis haud minus resisterent. Nam resistentia, de quâ agitur in Propositionibus præcedentibus, oritur ab inertiâ materiæ; et inertia materiæ corporibus essentialis est et quantitati materiæ semper proportionalis. Per divisionem partium fluidi, resistentia quæ oritur a tenacitate et frictione partium diminui quidem potest: sed quantitas materiæ per divisionem partium ejus non diminuitur; et manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ, cui resistentia, de quâ hic agitur, semper proportionalis est. Ut hæc resistentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in spatiis per quæ corpora moventur. Et propterea spatia cœlestia, per quæ globi planetarum et cometarum in omnes partes liberrimè et sine omni motus diminutione sensibili perpetuo moventur, fluido omni corporeo destituuntur, si forte vapores longe tenuissimos et trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, et hic motus oritur ab excessu pressionis fluidi ad projectilis partes anticas supra pressionem ad ejus partes posticas, et non minor esse potest in mediis infinite fluidis quam in aëre, aquâ et argento vivo pro densitate materiæ in singulis. Hic autem pressionis excessus, pro quantitate suâ, non tantum motum ciet in fluido, ([o]) sed etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: et propterea resistentia in omni fluido est ut motus in fluido a projectili excitatus, nec minor esse potest in æthere subtilissimo pro densitate ætheris, quam in aëre, aquâ et argento vivo pro densitatibus horum fluidorum.

Lib. II. et in sequentibus Propositionibus suppositum est, globi et cylindri, quorum eadem est diameter, æqualem esse resistentiam.

([n]) * *Non augeantur in duplicatâ ratione velocitatis*, in quâ tamen augeri deberent, uti expositum est in experimento 12.

([o]) * *Sed etiam agit in projectile*, per motûs Legem III.

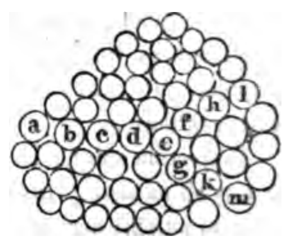
# SECTIO VIII.

## *De motu per fluida propagato.*

### PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

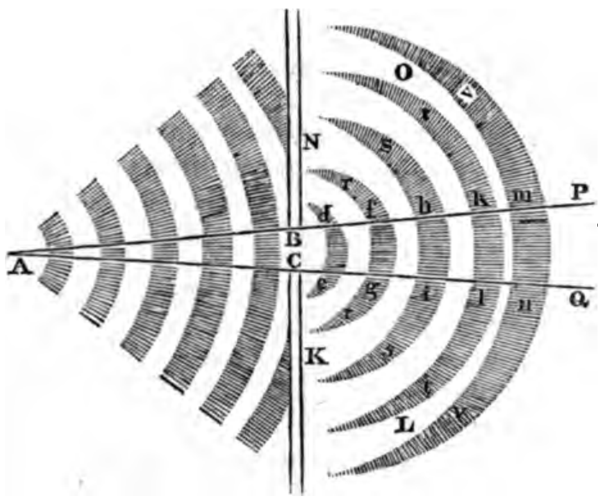
*Pressio non propagatur per fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particulæ fluidi in directum jacent.*

Si jaceant particulæ a, b, c, d, e in lineâ rectâ, potest quidem pressio directè propagari ab a ad e; at particula e urgebit particulas obliquè positas f et g obliquè, et particulæ illæ f et g non sustinebunt pressionem illatam, nisi fulciantur a particulis ulterioribus h et k; quâtenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; et hæ non sustinebunt pressionem nisi fulciantur ab ulterioribus l et m easque premant, et sic deinceps in infinitum. Pressio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet et obliquè propagabitur in infinitum; et postquam incipit obliquè propagari, si inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accuratè in directum jacentes inciderit. Q. e. d.




*Corol.* Si pressionis, a dato puncto per fluidum propagatæ, pars aliqua obstaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in spatia pone obstaculum. Id quod sic etiam demonstrari potest. A puncto A propagetur pressio quâquâversum, idque si fieri potest secundum lineas rectas, et obstaculo N B C K perforato in B C, intercipiatur ea omnis, præter partem coniformem A P Q, quæ per foramen circulare B C transit. Planis transversis d e, f g, h i distinguatur conus A P Q in frusta; et interea dum conus A B C, pressionem propagando, urget frustum conicum ulterius d e g f in superficie d e, et hoc frustum urget frustum proximum f g i h in superficie f g, et frustum illud urget frustum tertium, et sic deinceps in infinitum; manifestum est (per motûs Legem tertiam) quod frustum primum d e g f, reactione frusti secundi f g i h, tantum urgebitur et premetur in superficie f g, quantum urget et premit

frustum illud secundum. Frustum igitur d e f g inter conum A d e et frustum f h i g comprimitur utrinque, et propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figuram suam servare nequit, nisi vi eâdem comprimatur undique. Eodem igitur impetu quo premitur in superficiebus d e, f g, conabitur cedere ad latera d f, e g; ubique (cùm rigidum non sit, sed omnimodo




fluidum) excurret ac dilatabitur, nisi fluidum ambiens adsit, quo conatus iste cohibeatur. Proinde conatu excurrendi, premet tam fluidum ambiens ad latera d f, e g quam frustum f g h i eodem impetu; et propterea pressio non minus propagabitur a lateribus d f, e g in spatia N O, K L hinc inde, quam propagatur a superficie f g versus P Q. Q. e. d.

## PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

*Motus omnis per fluidum propagatus divergit a recto tramite in spatia immota.*

*Cas.* 1. Propagetur motus a puncto A per foramen B C, pergatque, si fieri potest, in spatio conico B C Q P, secundum lineas rectas divergentes a puncto A. Et ponamus primo quod ([a]) motus iste sit undarum in superficie stagnantis aquæ. Sintque d e, f g, h i, k l, &c. undarum

([a]) *Motus iste sit undarum*, &c. Vis quælibet deorsum directa in superficiem stagnantis aquæ agat in A, et cavitate factâ, cogat aquam circumquaque ascendere, aqua elevata vi propriæ gravitatis descendendo partim refluet in A, ad cavitatem replendam, partim in plagam oppositam feretur, et celeritate cadendo acquisitâ novam cavitatem formabit, atque itâ deinceps undæ motus per successivum ascensum et descensum propagabitur in orbem.

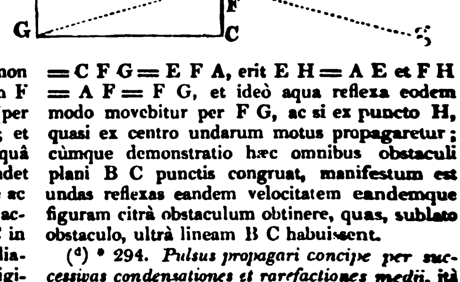
singularum partes altissimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem distinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior est quam in fluidi partibus immotis L K, N O, defluet eadem de jugorum terminis e, g, i, l, &c. d, f, h, k, &c. hinc inde versus K L et N O: et quoniam (b) in undarum vallibus depressior est quam in fluidi partibus immotis K L, N O; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, posteriore valles hinc inde dilatantur et propagantur versus K L et N O. Et quoniam motus undarum ab A versus P Q fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, ideóque (c) celerior non est quàm pro celeritate descensus; et descensus aquæ hinc inde versus K L et N O eâdem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde versus K L et N O eâdem velocitate quâ undæ ipsæ ab A versus P Q rectà progrediuntur. Proindeque spatium totum hinc inde versus K L et N O ab undis dilatatis r f g r, s h i s, t k l t, v m n v, &c. occupabitur. Q. e. d. Hæc ita se habere quilibet in aquâ stagnante experiri potest.

*Cas.* 2. Ponamus jam quod d e, f g, h i, k l, m n designent pulsus a puncto A per medium elasticum successive propagatos. (d) Pulsus pro-

(b) * *In undarum vallibus depressior est,* &c. Aqua enim ab altioribus undarum partibus cadendo celeritatem acquirit, quâ infrà quiescentis aquæ superficiem descendit.

(c) * *Celerior non est quàm pro celeritate descensûs* ab eâdem undarum altitudine, undè aqua in plagas P Q, K L, N O æquè defluit.

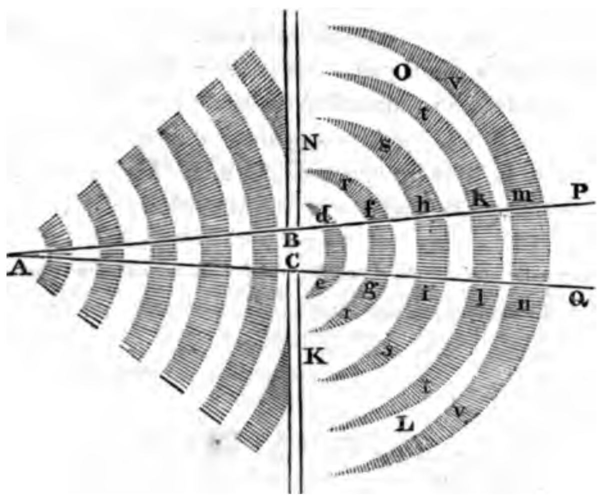
293. Ex demonstratis in hoc casu, motus undæ in obstaculum planum incurrentis definiri potest. Undarum motus e loco A quasi centro propagetur. Incurrat unda in obstaculi immoti B C punctum F, cum velocitate et directione A F. Ductâ ex A in B C perpendiculari A E, completoque rectangulo A E F K, resolvatur motus A F, in duos alios motus A E, A K, seu factâ F C æquali A K, in motus K F, F C; et quia particulæ aquæ motu F C in obstaculum non agunt, post impactum pergent eâdem quâ antè impactum velocitate ac directione F C moveri. At motu K F, in obstaculum directè incurrentes motum illum omnem, juxtà leges conflictûs corporum non elasticorum, amittent. Cùm autem aqua in F ab aliâ insequente urgeatur, et obstaculum (per Hyp.) cedere nequeat, elevabitur illa in F; et deindè vi ponderis sui, id est, vi æquali illi quâ por obstaculi longitudinem elevata fuit, descendet in plagam F K, eâdemque proinde velocitate ac directione ab obstaculo recedet quâ ad illud accesserat. Ex hoc motu F K, et ex alio F C in aquâ residuo componetur motus F G, per diagonalem parallelogrammi K F C G; unda igitur a puncto F reflectitur secundum directionem F G, et cum eâdem velocitate quâ per A F in obstaculum incurrit, et quâ, sublato obstaculo, motum per F g, seu per A F productam continuasset, estque angulus reflexionis G F C æqualis angulo incidentiæ A F E. Producatur jam linea G F ut perpendiculo A E etiam producto occurrat in H; et quia angulus E F H




= C F G = E F A, erit E H = A E et F H = A F = F G, et ideò aqua reflexa eodem modo movebitur per F G, ac si ex puncto H, quasi ex centro undarum motus propagaretur; cùmque demonstratio hæc omnibus obstaculi plani B C punctis congruat, manifestum est undas reflexas eandem velocitatem eandemque figuram citrà obstaculum obtinere, quas, sublato obstaculo, ultrà lineam B C habuissent.

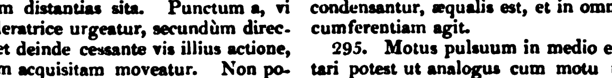
(d) * 294. *Pulsus propagari concipe per successivas condensationes et rarefactiones medii,* ità ut primum partes medii e puncto A quaquaver-

pagari concipe per successivas condensationes et rarefactiones medii, sic ut pulsus cujusque pars densissima sphæricam occupet superficiem circà centrum A descriptam, et inter pulsus successivos æqualia intercedant




intervalla. Designent autem lineæ d e, f g, h i, k l, &c. densissimas pulsuum partes, per foramen B C propagatas. Et quoniam medium ibi densius est quam in spatiis hinc inde versus K L et N O, ([e]) dilatabit sese

sum propulsæ eant et condensentur, et ubi sunt densissimæ sphæricam superficiem circà centrum A descriptam occupare intelligantur, tum vi elasticâ rarefiant et dilatatione suâ partim versus centrum A redeant, partim a centro illo quaquadilatatur, et particulas a, b, c, &c. in pristina loca successivè repellit, dum intereà aliæ particulæ ut g, h, &c. versus q progrediuntur; quo motu medium rursus condensatur versus q, et deinde utrinquè dilatatur, atquè ità deinceps




versum recedant et partes vicinas propulsent; ita ut condensentur, atque ità successivis condensationibus et dilatationibus agitetur totum medium. Quæ ut clarius intelligantur, motum particularum aëris in uno prædictæ sphæræ radio contemplemur. Sint a, b, c, d, &c. puncta physica medii quiescentis in rectà a q, ad æquales ab invicem distantias sita. Punctum a, vi quâlibet acceleratrice urgeatur, secundùm directionem, a q, et deinde cessante vis illius actione, per celeritatem acquisitam moveatur. Non poterit ità moveri particula a, quin successive moveantur particulæ aliæ b, c. d, e, &c. et quia medium elasticum in intervallis b c, c d, d e, &c. gradatim condensatur et vim elasticam majorem acquirit quâ celeritas particulæ a, sibi relictæ continuò minuitur ac tandem prorsus extinguitur; tum verò medium condensatum vi suâ elasticâ utrinque tam versus a, quam versus q pulsus per successivas condensationes et rarefactiones medii propagantur. * Hæc pulsuum in medio elastico genitorum naturâ, ad Prop. XLVII. fusius expendetur, sed isto in loco hæc sufficere videntur.

([e]) * *Dilatabit sese tam versus*, &c. Per vim elasticam quæ vi comprimenti quâ partes medii condensantur, æqualis est, et in omnem loci circumferentiam agit.

295. Motus pulsuum in medio elastico spectari potest ut analogus cum motu undarum in superficie aquæ stagnantis; nam condensatio partium medii elastici locum tenet elevationis aquarum, vis elastica medii locum gravitatis aquæ, et pars pulsuum densissima parti undarum altissimæ correspondet. Undè in utroque motu, medii particulæ per brevia spatia eunt et redeunt, intereadum pulsus vel unda propagatur (294) et eodem modo quo (293 undarum reflexionem ex-

tam versus spatia illa K L, N O utrinque sita, quam versus pulsuum rariora intervalla; eoque pacto rarius semper evadens e regione intervallorum ac densius e regione pulsuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulsuum progressivus motus oritur a perpetuâ relaxatione partium densiorum versus antecedentia intervalla rariora; et pulsus eâdem ferè celeritate sese in medii partes quiescentes K L, N O hinc inde relaxare debent; pulsus illi eâdem ferè celeritate sese dilatabunt undique in spatia immota K L, N O, quâ propagantur directè a centro A; ideóque spatium totum K L N O occupabunt. Q. e. d. Hoc experimur in sonis, qui vel monte interposito audiuntur, vel in cubiculum per fenestram ad-

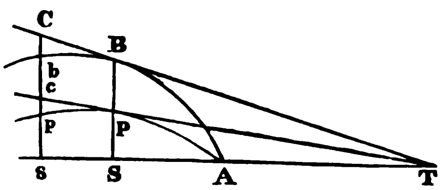
posuimus, demonstratur pulsus ab obstaculo plano B C, (vid. fig. not. 293.) ità repercuti ut sit angulus reflexionis æqualis angulo incidentiæ, idemque sit medii motus post reflexionem qui produceretur, si pulsus ex centro H sublato obstaculo, propagaretur.

Sed ut hujus Sectionis doctrina quæ soni phænomenis explicandis accommodata est, melius intelligatur, nonnulla de naturâ soni et de motu corporum resonantium præmittenda sunt.

296. Definitio. *Sonus directus est*, qui a corpore sonoro ad organum auditûs rectâ lineâ fertur. *Sonus reflexus qui* a corpore sonoro in alia corpora fertur, et inde ad aurem reflectitur.

297. Propositio. *Sonus est particularum corporis resonantis motus tremulus ac vibratorius aëri communicatus et ad aures delatus.* Hæc Propositio notissimis experimentis certa est. Nam corpora non resonant nisi percutiantur, et maximè omnium resonant corpora dura atquè elastica quorum partes ictu flectuntur, et deinde vi suâ elasticâ resiliunt, atquè ità tremulo ac vibratorio motu agitantur. Particularum corporis resonantis subsultus visu et tactu percipitur; chartæ frustula corpori resonanti insidentia subsultare oculis cernuntur et admotâ manu partium fremitus sentitur. Verùm si fides instrumenti musici tensa non fuerit, licet oscillationes tota peragat, sonum non edit; et forcipis focariæ crura digitis constricta et extemplò dimissa, oscillationes agunt sine sono; at si oscillando corpus aliquod durum percutiunt, resonant; ex quibus deducitur sonum non solo totius corporis oscillatorio motu, sed particularum ipsius tremore produci. Hic motus aëri contiguo communicatur et pulsus excitat (294). Cùm propè aquam stagnantem tympanum quatitur, subsultus observantur in aquæ superficie. Dum instrumentorum musicorum pulsantur nervi, pulvisculi qui aëri innatant et radio Solis fiunt conspicui, conformiter ad fremitum nervorum subsultare videntur. Si ex duabus chordis musicis, homogeneis, æqualibus et æque tensis una pulsetur ut sonum edat, altera prioris vicina concutitur et similiter resonat. Tandem corpora sonora sub campanâ antliæ pneumaticæ posità atque percussa, dum educitur aër, sonum languidiorem reddunt et exhausto aëre, nullum qui possit percipi. Est igitur aër vehiculum soni: attamen totius aëreæ molis motus qui in vento cernitur, per se ad producendum sonum non valet, sed vibratorius particularum motus satis validus necessarius est.

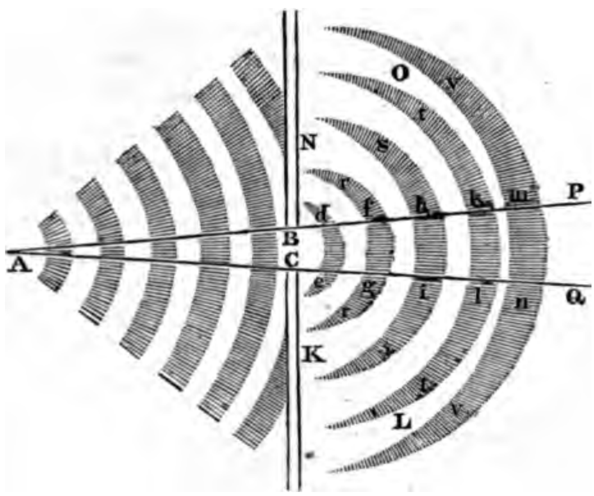
298. Lemma. *Si curvarum duarum A B, A P abscissam communem A S habentium, ordinatæ S B, S P sint semper ad invicem in datâ ratione, imminutis iis in infinitum ut curvæ tandem coincidant cum axe A S, erit ultima ratio curvaturæ eadem quæ ordinatarum.* Duc novam ordinatam s p curvis occurrentem in p et b, et ad puncta B et P duc tangentes occurrentes ordinatæ novæ in C et c. Tum ob datam ordinatarum rationem, tangentes productæ ad idem axis punctum T concurrent (256. Lib. I.) et ideò ob parallelas S B, s C, erit s C : s c = S B : S P et (per Hyp.) S B : S P = s b : s p; unde s C : s c = s b : s p = s C — s b : s c — s p =



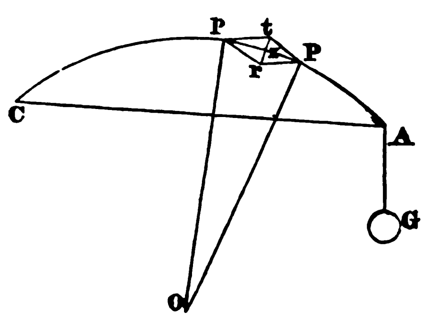

b C : p c = S B : S P, coincidant jam ordinatæ s b, S B, et lineolæ evanescentes b C, p c. erunt subtensæ angulorum contactûs b B C, p P c, et ordinatis S B, S P in infinitum diminutis, ut curvæ tandem coincidant cum axe A S, subtensæ illæ perpendiculares evadent ad curvas, fietque B b æqualis P p. Sed in hâc hypothesi, anguli contactûs sunt ad invicem ut $\frac{bC}{Bb}$, ad $\frac{pc}{Pp}$ (154. Lib. I.), hoc est, ut b C ad p c. Quarè curvaturæ in B et P, quæ angulis contactûs proportionales sunt (121. Lib. I.) erunt subtensis b C, p c, ac proindè (ex dem.) ordinatis S B, S P proportionales. Q. e. d.

missi sese in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi a parietibus oppositis, quam a fenestrâ directè propagati, quantùm ex sensu judicare licet.

*Cas.* 3. Ponamus denique quod motus cujuscunque generis propagetur ab A per foramen B C: et quoniam propagatio ista non fit, nisi quâtenus partes medii centro A propiores urgent commoventque partes ulteriores;

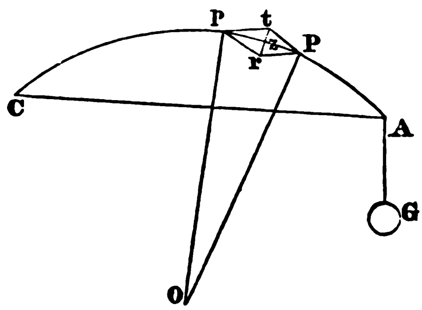



et partes quæ urgentur fluidæ sunt, ideóque recedunt quaquaversum in regiones ubi minus premuntur: recedent eædem versus medii partes omnes quiescentes, tam laterales K L et N O, quàm anteriores P Q, eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen B C transiit, dilatari incipiet et inde tanquam a principio et centro, in partes omnes directè propagari. Q. e. d.




299. Lemma. *Vis acceleratrix quâ punctum quodlibet P nervi tensi et uniformiter crassi urgetur, dum per brevissimum spatium oscillatur, est ut nervi curvatura in eodem loco.* Nervus A C pondere G tensus oscillando pervenerit ad positionem curvæ A P C, cum axe A C ferè coincidentis, et quia linea recta C A pondere G tenditur ubique æqualiter, æqualis quoque erit tensio omnium partium curvæ A P C quamproxime. Sumatur punctum p, puncto P quamproximum, et ductis tangentibus P t, p t concurrentibus in t, compleatur parallelogrammum P t p r, ducanturque ad curvam normales P O, p O concurrentes in O, vires æquales quibus arcus evanescens P p, (qui sumi potest pro arcu circuli radio P O descripti (121. Lib. I.) in directionibus tangentium

t P, t p, hinc indè trabitur, exponantur per tangentes illas æquales, et singulæ resolvantur in duas alias vires, vis quidem t P in vires t z et z P, et vis t p in vires t z, seu z r et z p vires z P, z p, æquales et oppositæ nullum motum in arcu P p producent, at viribus t z et z r, simul, seu vi totâ t r, in directione t r, sivè P O urgebitur. Erit igitur vis motrix quâ particula P p in directione t r urgetur, ad fili tensionem in P vel p per quam generatur vis illa ut t r ad t P.



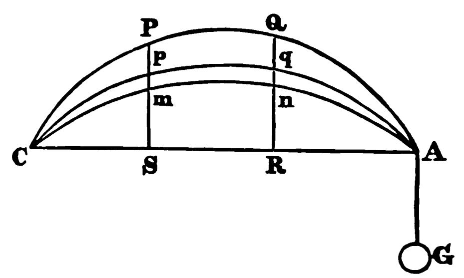

Sed (ex naturâ circuli) angulus t P r, æqualis est angulo P O p, cum arcus P p sit utriusque mensura, et propstereà triangulum isoscele P O p, simile est triangulo isosceli t P r. Quarè P p est ad P O ut t r ad t P, hoc est, ut vis motrix quâ particula P p in directione t r seu P O urgetur ad fili tensionem datam G, et ideò vis illa est ut $\frac{P\ p}{P\ O}$. Cum igitur vis acceleratrix sit in ratione vis motricis directè et materiæ movendæ inversè (per Def. 8. Lib. I.) et materia movenda sit hic ut P p, ob æqualem ubique nervi crassitudinem, erit vis acceleratrix ut $\frac{1}{P\ O}$, id est, in ratione inversâ radii circuli curvam osculantis in P, ideóque in ratione curvaturæ in P (121. Lib. I.). Q. e. d.

## PROPOSITIO.

300. *Si chorda musica A C uniformiter crassa et pondere G tensa, itâ inflectatur dum resonat, ut ejus elongatio maxima ab axe motûs A C sit ferè insensibilis et ideò vis tensionis non mutetur per auctam chordæ longitudinem in majoribus suis ab axe distantiis et inclinatio radiorum curvaturæ ad axem negligi possit, ea erit natura curvæ A Q P C in quam chorda oscillando inflectitur, in quovis articulo motûs ejusdem chordæ ut ductis pro libitu ordinatis ad axem normalibus Q R, P S sit curvatura in Q, ad curvaturam in P, ut Q R, ad P S, ac puncta omnia Q, P simul ad axem pervenientia et simul redeuntia oscillationes suas omnes eodem tempore peragant ad instar penduli oscillantis in cycloide.*

*Cas.* 1. Sit curva A Q P C chordæ oscillantis distantia maxima ab axe A S punctis omnibus jam quiescentibus, eaque sit hujus curvæ natura ut curvatura in Q sit ad curvaturam in P, in ratione distantiæ Q R ad distantiam P S. Hoc posito erit acceleratio in Q ad accelerationem in P in eâdem ratione Q R ad P S (per Lem. superius 299.) ideóque initio motûs spatia simul percursa Q q, P p, erunt in eâdem ratione, et divisim spatia percurrenda q R, p S, erunt in eâdem ratione Q R ad P S; undè etiam accelerationes novæ in punctis q et p, erunt in eâdem ratione Q R ad P S (299, 298.) atque erunt ad accelerationes priores in Q et P, ut distantiæ q R et p S ad distantias Q R et P S (299, 298.). Ergò puncti cujusvis P, vel in eâdem curvâ A Q P C vel in diversis A Q P C et A q p c, spectati acceleratio semper est ut ejusdem distantia ac axe motûs A C. Quarè (per Prop. LI. Lib. I.) puncta omnia nervi ad axem simul perveniunt, simul redeunt et oscillationes singulas peragunt dato tempore ad instar corporis in cycloide oscillantis. Q. e. d.

*Cas.* 2. Si chorda plectro modò percussa nondum induerit formam curvæ in primo casu descriptæ, erit curvatura in P ad curvaturam in Q in majori vel minori ratione quàm distantiæ P S ad distantiam Q R. Sit in majori ratione, et erit velocitas in P, ad velocitatem in Q, in ratione majore quam P S ad Q R, (299) et spatium P p tempore minimo descriptum ad spatium Q q, eodem tempore descriptum in ratione majore quam P S ad Q R, ideóque divisim erit p S minor respectu P S, quàm q R, respectu Q R; et quia curvatura cum distantiis ab axe minuitur ac coincidente curvâ cum axe nulla evadit, erit etiam curvatura in p, minor respectu curvaturæ in P, quam curvatura in q, respectu curvaturæ in Q, et inde (299) acceleratio in p,




minor respectu accelerationis in P, quam acceleratio in q, respectu accelerationis in Q. Majoris igitur velocitatis acceleratione semper decrescente et minoris velocitatis acceleratione e contrà semper crescente, respectu distantiarum ab axe A C, motus inter se tandem ità temperabuntur, ut punctis P et Q pervenientibus in loca quædam m et n, tum velocitates, tum accelerationes futuræ sint distantiis m S, n R proportionales, ideóque curvâ A n m C, jam existente eâdem quam descripsimus in Casu 1., motus dehinc

omnes conspirabunt, atquè idem eveniet, si sit curvatura in P ad curvaturam in Q in minore ratione quam distantiæ P S ad distantiam Q R. Quarè quocumque modo percutiatur chorda musica, quam citissimè induet formam curvæ in Casu 1. descriptæ, atquè perget moveri more ibidem descripto. Q. e. d.

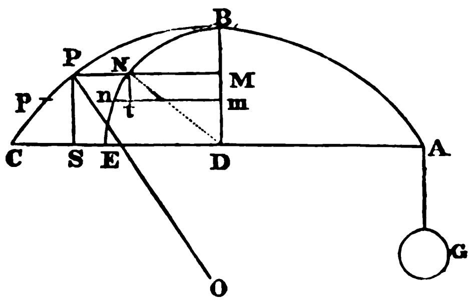
Cæterùm inflexiones seu distantias admodum parvas ab axe motûs tam in chordis musicis quam in laminis elasticis ex quibus corpora sonora compacta esse fingi potest, viribus acceleratricibus proportionales et proindè oscillationes esse isochronas experimentis ostendit clariss. Gravesandius in Elem. Phys. et Mersennus in Harmoniâ Universali longiorum chordarum vibrationes isochronas oculis observavit. Si verò chorda nimiâ vi pulsetur, vis acceleratrix in experimentis crescit in majori ratione quam distantiæ ab axe motûs et oscillationes breviori tempore absolvuntur.

301. *Corol.* 1. Datis axibus A C et B D curva musica sic potest describi. Centro D et radio D B describatur circuli quadrans B N E; ducatur ad B D, perpendicularis M N circulo occurrens in N, et producatur ad P, ut sit M P ad D C, in ratione arcûs B N, ad arcum quadrantalem B N E, dico punctum P esse in curvâ musicâ A B C.

Sit enim P punctum curvæ musicæ A B C, et dicantur $BD = a$, $AC = L$, $DC = \frac{1}{2}L$, $BM = x$, $PM = y$, arcus $BP = s$, $PS = MD = z = a - x$, radius curvaturæ in $B = r$: et si fluxio $ds$ sive $Pp$ constans sumatur, erit (126. Lib. I.) radius curvaturæ in P, seu $PO = \frac{dsdx}{ddy} = -\frac{dsdx}{ddy}$. Sed (ex dem.) B D est ad P S ut curvatura in B ad curvaturam in P, id est, ut radius curvaturæ in P ad radium curvaturæ in B, seu $a : a - x = -\frac{dsdx}{ddy} : r$. Quarè $raddy = xdxds - adxds$, et sumptis fluentibus, additâ constante $Qds$, fit $rady = \frac{1}{2}xxds - axds + Qds$. Evanescente B M seu x, fit $dy = ds$, seu $BP = PM$ (per Cor. 1. Lem. VII. Lib. I.) et æquatio in hanc abit $rads = Qds$, ideóque constans $Q = ra$. Quare in quovis curvæ puncto P erit $rady\,[ra + \frac{1}{2}xx - ax]\,ds$. Ponatur $ax - \frac{1}{2}xx = bb$, ut sit $rady = [ra - bb]\,ds$, et $rraady^2 = [ra - bb]^2 ds^2 = [ra - bb]^2 dy^2 + [ra - bb]^2 dx^2$; undè deducitur $[2rabb - b^4]\,dy^2 = [ra - bb]^2 dx^2$; et quia curva A B C ferè coincidit cum axe A C (per Hyp.) ac ideò quantitas $bb$ minima est respectu quantitatis $ra$ in quâ radius curvaturæ r maximus est, si conferatur cum a vel x æquatio in hanc abibit $2rabbdy^2 = rraadx^2$, ex quâ eruitur

$$dy = \frac{r^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}.$$

Ducatur in circulo altera ordinata m n priori M N proxima, et ex puncto N demittatur ad m n perpendiculum N t; evanescente M m, erit (ex naturâ circuli) $NM : ND = Nt : Nn$, sivè $\sqrt{2ax - xx} : a = dx : Nn = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Est igitur $dy = Nn \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, et sumptis fluentibus $y = BN \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, cui æquationi nihil addendum vel subducendum est, cum arcus B N, evanescente P M seu y evanescat. Verum ubi P M coincidit cum C D, seu ubi fit $y = \frac{1}{2}L$,




est $BN = BNE$, et propterea $\frac{1}{2}L = BNE \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, atquè adeò $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2}L}{BNE}$. Quarè in quolibet curvæ puncto P, est $y = \frac{BN \times \frac{1}{2}L}{BNE}$, et proindè $y : \frac{1}{2}L = BN : BNE$, hoc est, P M est ad C D ut arcus B N ad quadrantem B N E. Q. e. d.

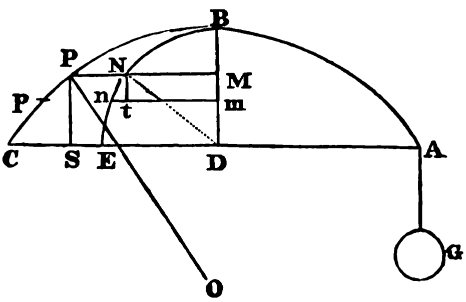
302. *Corol.* 2. Quia P S est ad B D seu ad a, ut radius r ad radium P O, erit $PO \times PS = ar$. Sit diameter circuli ad circumferentiam ut 1 ad c et ideò a ad B N E ut 1 ad $\frac{1}{2}c$, seu $BNE = \frac{1}{2}ac$, et cum sit (301) $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2}L}{BNE}$, erit $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{L}{ac}$ et $\frac{r}{a} = \frac{LL}{a^2c^2}$, et $r = \frac{LL}{ac^2}$; atquè $PO \times PS = ar = \frac{LL}{cc}$.

## PROPOSITIO.

303. *Si diameter circuli sit ad circumferentiam ut* 1, *ad* c, *et chordæ musicæ uniformiter crassæ longitudo sit* L, *pondus* P, *pondus quo tenditur* G *et penduli in cycloide oscillantis longitudo* D; *tempus quo chorda illa oscillationem unam perficit, erit ad tempus unius oscillationis penduli in ratione subduplicatâ* P L *ad* c c D G; *numerus verò oscillationum chordæ tempore unius oscillationis penduli erit* $c\sqrt{\frac{DG}{LP}}$.

Nam vis quâ particula P p in loco P, existens urgetur dicatur A, ejusdem pondus B et (per dem. 299.) erit A ad G, ut P p ad P O, et ob uniformem chordæ crassitudinem est P ad B, ut

L ad P p, et his rationibus conjunctis, P × A ad B × G ut L, ad P O; undè fit A ad B ut G × L ad P O × P. Jam si particula P p vi motrice ceu pondere A sollicitata oscillaretur in cycloide cujus perimeter tota æquaret duplam distantiam P S, tempus unius vibrationis in cycloide æquale esset tempori vibrationis unius chordæ musicæ seu particulæ P p; quia vis particulæ P p, in cycloide oscillantis semper decrescit in ratione distantiæ ejus a puncto infimo seu medio cycloidis, quemadmodum vis illa decrescit in ratione distantiæ a puncto S cum particula P p vibrationes suas agit in rectâ P S, et vis motrix particulæ in puncto cycloidis altissimo æqualis est vi motrici A, (per Cor. Prop. LI.




Lib. I.). Si verò particula P p pondere suo absoluto B oscilletur in cycloide cujus perimeter tota sit 2 D, erit hujus penduli longitudo D (per Cor. Prop. L. Lib. I.), et tempus unius vibrationis chordæ musicæ erit ad tempus unius oscillationis penduli in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione longitudinis P S ad longitudinem D, et subduplicatâ ratione ponderis B ad vim A (Cor. 5. Prop. XXIV. Lib. II.); id est, in ratione subduplicatâ quantitatis P O × P S × P, ad quantitatem G L D, atque ideò ob P O × P S $= \frac{L\,L}{c\,c}$ (202.) in ratione subduplicatâ P L ad c c G D. Q. e. d.

Quia verò numerus vibrationum isochronarum quas chorda vel pendulum tempore quovis dato peragunt sunt inversè ut oscillationum tempora, erit numerus vibrationum quas chorda musica tempore unius oscillationis penduli prædicti peragit ad unitatem ut tempus unius oscillationis penduli ad tempus unius vibrationis chordæ, ideóque in ratione subduplicatâ c c G D, ad P L, et proinde numerus vibrationum quas chorda musica peragit eo tempore quo pendulum cujus longitudo est D semel oscillatur est $c\sqrt{\frac{G\,D}{P\,L}}$. Q. e. d.

304. *Corol.* 1. Si longitudo chordæ L digitis pedis Parisiensis exprimatur, numerus vibrationum quas chorda tempore minuti unius secundi peragit, erit 19, 0341 $\sqrt{\frac{G}{P\,L}}$ quamproximè. Nam pendulum cujus longitudo D est pedum Parisiensium 3 et linearum $8\frac{1}{2}$, seu digit. $\frac{881}{24}$, singulas oscillationes tempore minuti unius secundi absolvit (471. Lib. I.) et præterea ut 113 ad 355; ità diameter 1 ad circuli circumferentiam c, quæ proinde erit $\frac{355}{113}$. Quarè si loco D et c scribantur ipsorum valores in formulâ, erit $c\sqrt{\frac{G\,D}{P\,L}} = \frac{355}{113}\sqrt{\frac{881\,G}{24\,L\,P}} = 19,0341$ $\sqrt{\frac{G}{P\,L}}$ quamproximè.

305. *Corol.* 2. Si conferantur variarum chordarum oscillationes, quia quantitates c et D in formulâ $c\sqrt{\frac{G\,D}{P\,L}}$ datæ sunt, numeri vibrationum dato tempore peractarum erunt ut $\sqrt{\frac{G}{P\,L}}$, et ideò tempora quibus singulæ vibrationes fiunt ut $\sqrt{\frac{P\,L}{G}}$ (473. Lib. I.).

306. *Corol.* 3. Iisdem positis, si prætereà chordæ sint homogeneæ, æquè crassæ et æquè tensæ, cum in eo casu pondus G datum sit et pondus P sit ut chordæ longitudo L, tempora quibus singulæ vibrationes fiunt, erunt ut $\sqrt{L\,L}$, seu ut chordarum longitudines; quod experimentis confirmavit clariss. Gravesande in Elem. Physices.

*Scholion.* Quæ de chordis vibrantibus huc usque diximus, ea ferè omnia, nonnullis tamen immutatis, mutuati sumus ex Tractatu de methodo incrementorum clariss. Taylor. Formulas nostris similes dedêre celeberrimi viri, Sauveur in Monumentis Acad. Paris. an. 1713. et Daniel Bernoulli tum in Actis Petropol. tum in Dissertatione de Propagatione Lucis, ab Academiâ Regiâ Paris. præmio condecoratâ an. 1736.

## PROPOSITIO.

307. *Si numeri vibrationum quas chordæ musicæ dato tempore peragunt, sint inter se ut numeri* 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, chordæ illæ tonos edent qui his notissimis vocibus significantur, UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, ut, initio sumpto a tono graviori. Hæc Propositio experimentis demonstrata est; nam nervi musici homogenei, æquè crassi eodemque pondere tensi, quorum longitudines sunt inversè ut numeri illi, tonos quos diximus edunt, et horum nervorum longitudines sunt inversè ut numeri vibrationum quas dato tempore absolvunt et directè ut singularum vibrationum tempora ideóque ut 180, 160, 144, 135, 120, 108, 96, 90: (306).

308. *Corol.* Sonorum differentia secundùm *grave* et *acutum*, a minori vel majori numero vibrationum quas chordæ musicæ dato tempore peragunt, pendet, et eò graviores sunt soni quò tardiores sunt singulæ chordarum vibrationes et contrà.

## PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

*Corpus omne tremulum in medio elastico propagabit motum pulsuum undique in directum; in medio verò non elastico motum circularem excitabit.*

*Cas.* 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo et redeundo, itu suo urgebunt et propellent partes medii sibi proximas, et urgendo compriment easdem et condensabunt; dein reditu suo sinent partes compressas recedere et sese expandere. Igitur partes medii corpori tremulo proximæ ibunt et redibunt per vices, ad instar partium corporis illius tremuli: et quâ ratione partes corporis hujus agitabant hasce medii partes, hæ similibus tremoribus agitatæ agitabunt partes sibi proximas, eæque similiter agitatæ agitabunt ulteriores, et sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum medii partes primæ eundo condensantur et redeundo relaxantur, sic partes reliquæ quoties eunt condensabuntur, et quoties redeunt sese expandent. Et propterea non omnes ibunt et simul redibunt (sic enim determinatas ab invicem distantias servando, non rarefierent et condensarentur per vices) sed accedendo ab invicem ubi condensantur, et recedendo ubi rarefiunt, (f) aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes et eundo condensatæ, ob motum suum progressivum, quo feriunt obstacula, sunt pulsus; et propterea pulsus successivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem distantiis, (g) ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus suis singulis singulos pulsus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant et redeant secundum plagam aliquam certam et determinatam, tamen pulsus inde per medium

PROPOSITIO.

309. *Corpora sonora homogenea et similia quorum latera homologa rationem habent inversam numerorum* 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, *tonos edunt, UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, ut.* Hanc Propositionem probant experimenta quæ in campanis, cylindris et prismatibus homogeneis et similibus habuerunt Mersennus in Harmoniâ Universali et D. Carré in Monum. Acad. Reg. an. 1709.

PROPOSITIO.

310. *Dum corpus sonorum percutitur, tremulus particularum motus ex ictu et vi elasticâ creatus, remotis obstaculis, per superficiem corporis propagatur:* quod quidem leviora chartæ frustula superficiei corporis resonantis imposita, tremore suo indicant.

PROPOSITIO.

311. *Campanæ figura ictu clavæ itâ mutari oculis cernitur ut cum rotunda esset, fiat ovata et quandiù auditur sonus, alternis mutatur oscillationibus.*

312. *Corol.* Ex tribus ultimis Propositionibus concludere licet, ut in chordis ita et in aliis corporibus resonantibus, tonos pendere a numero vibrationum seu undulationum quæ dato tempore peraguntur.

(f) *Aliquæ earum ibunt* (294).

(g) * *Ob æqualia temporis intervalla* (300).

propagati sese dilatabunt ad latera, per Propositionem præcedentem; et a corpore illo tremulo tanquam centro communi, secundum superficies propemodum sphæricas et concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in undis, quæ si digito tremulo excitentur, non solum pergent hinc inde secundum plagam motus digiti, sed, in modum circulorum concentricorum, digitum statim cingent et undique propagabuntur. Nam gravitas undarum supplet locum vis elasticæ.

*Cas.* 2. (h) Quod si medium non sit elasticum: quoniam ejus partes a corporis tremuli partibus vibratis pressæ condensari nequeunt, propagabitur motus in instanti ad partes ubi medium facillimè cedit, hoc est, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; sed in circulum eundo, pergit ad spatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; et quoties corpus regreditur ad locum priorem, medium inde repelletur et ad locum suum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non sit firmum, sed modis omnibus flexile, si tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus suis nequit medium ubivis urgere, quin alibi eidem simul cedat; efficiet ut medium, recedendo a partibus ubi premitur, pergat semper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. Q. e. d.

*Corol.* Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad pressionem, per medium ambiens, secundum lineas rectas propagandum conducere. Debebit ejusmodi pressio non ab agitatione solâ partium flammæ, sed a totius dilatatione derivari.

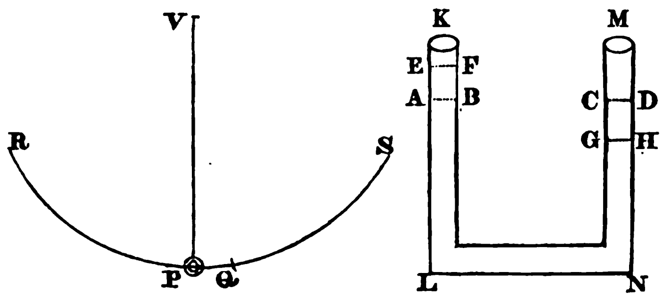
## PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

*Si aqua in canalis cruribus erectis* K L, M N *vicibus alternis ascendat et descendat; construatur autem pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis et centrum oscillationis æquetur semissi longitudinis aquæ in canali: dico quod aqua ascendet et descendet iisdem temporibus quibus pendulum oscillatur.*

Longitudinem aquæ mensuro secundum axes canalis et crurum, eandem summæ horum axium æquando; et resistentiam aquæ, quæ oritur ab attritu

(h) * *Quod si medium* continuum sit et *non elasticum*, &c.

canalis, hic non considero. Designent igitur A B, C D mediocrem altitudinem aquæ in crure utroque; et ubi aqua in crure K L ascendit ad altitudinem E F, descenderit aqua in crure M N ad altitudinem G H. Sit autem P corpus pendulum, V P filum, V punctum suspensionis, R P Q S cyclois quam pendulum describat, P ejus punctum infimum, P Q arcus altitudini A E æqualis. Vis, quâ motus aquæ alternis vicibus acceleratur et retardatur, est excessus ponderis aquæ in alterutro crure supra pondus in altero, ideóque, ubi aqua in crure K L ascendit ad E F, et in crure altero




descendit ad G H, ([i]) vis illa est pondus duplicatum aquæ E A B F, et propterea est ad pondus aquæ totius ut A E seu P Q ([k]) ad V P seu P R. Vis etiam, quâ pondus P in loco quovis Q acceleratur et retardatur in cycloide (per Corol. Prop. LI.) est ad ejus pondus totum, ut ejus distantia P Q a loco infimo P, ad cycloidis longitudinem P R. Quare aquæ et penduli, æqualia spatia A E, P Q describentium, vires motrices sunt ut pondera movenda; ([l]) ideóque, si aqua et pendulum in principio quiescunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco simul eant et redeant. Q. e. d.

*Corol.* 1. Igitur aquæ ascendentis et descendentis, sive motus intensior sit sive remissior, vices omnes sunt isochronæ.

*Corol.* 2. Si longitudo aquæ totius in canali sit pedum Parisiensum 6⅛.

([i]) * *Vis illa est pondus duplicatum*, &c. Est enim vis illa pondus tam aquæ E A B F, quam aquæ æqualis C G H D.

([k]) * *Ad V P seu P R.* Semi-cyclois P R, æqualis est longitudini penduli, (per Cor. Prop. L. Lib. I.).

([l]) 313. * *Ideóque, si aqua et pendulum*, &c. Id evidentissimum fit si pondus P quod, manente oscillationis unius tempore potest ad arbitrium assumi, capiatur æquale ponderi aquæ totius in canali; tùm enim vires motrices, massæ movendæ, et spatia describenda, ideóque et tempora quibus spatia illa describuntur, in canali et in cycloide æquantur respectivè. Sed observandum est superficiem A B, esse locum æquilibrii, ad quem cum aqua pervenit, nullâ amplius vi acceleratrice urgetur, sed velocitate tantum acquisitâ ulteriùs descendit vel ascendit; sicuti corpus pendulum P dum pervenit in locum cycloidis infimum P solâ velocitate acquisitâ movetur. Undè quo tempore aqua descensum unum absolvit in crure alterutro canalis, eodem tempore pendulum oscillationem unam ex descensu et ascensu compositam perficit, duas verò oscillationes absolvit intereadum aqua e loco E descendit et ad eundem redit.

aqua tempore minuti unius secundi descendet, et tempore minuti alterius secundi ascendet; et sic deinceps vicibus alternis in infinitum. (m) Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis tempore minuti unius secundi oscillatur.

*Corol.* 3. Auctâ autem vel diminutâ longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione subduplicatâ.

## ROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

*Undarum velocitas est in subduplicatâ ratione latitudinum.*

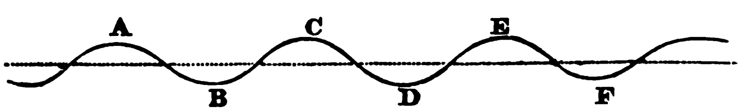
Consequitur ex constructione Propositionis sequentis.

## PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

*Invenire velocitatem undarum.*

Constituatur pendulum cujus longitudo, inter punctum suspensionis et centrum oscillationis, æquetur latitudini undarum: et quo tempore pendulum illud oscillationes singulas peragit, eodem undæ progrediendo latitudinem suam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco mensuram transversam, quæ vel vallibus imis, vel summis culminibus interjacet. Designet A B C D E F superficiem aquæ stagnantis, undis successivis ascendentem ac descendentem;




sintque A, C, E, &c. undarum culmina, et B, D, F, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ successivum ascensum et descensum, sic ut ejus partes A, C, E, &c. quæ nunc altissimæ sunt, mox fiant infimæ; et vis motrix, quâ partes altissimæ descendunt et infimæ ascendunt, est pondus aquæ elevatæ; alternus ille ascensus et descensus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, easdemque temporis leges observabit: et propterea (per Prop. XLIV.) si distantiæ inter undarum loca altissima A, C, E et infima B, D, F, (n) æquentur duplæ penduli longi-

(m) * *Nam pendulum ped.* $3\frac{1}{18}$, seu ped. 3. et lin. 8. quamproximè (471. Lib. I.). Clariss. Hermanus Tom. III. Comm. Acad. Petrop. motum aquæ in tubis crura quomodolibet ad basim inclinata habentibus definivit. Rem generaliùs pertractavit celeb. D. Bernoullius in Hydrodynamicâ. Hos authores, si lubet, adeat lector.

(n) * *Æquentur duplæ penduli longitudini.*

tudini; partes altissimæ A, C, E, tempore oscillationis unius evadent infimæ, et tempore oscillationis alterius denuo ascendent. Igitur inter transitum undarum singularum tempus erit oscillationum duarum; hoc est, unda describet latitudinem suam, quo tempore pendulum illud bis oscillatur; sed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla est, ideóque æquat undarum latitudinem, oscillabitur semel. Q. e. i.

*Corol.* 1. Igitur undæ, quæ pedes Parisienses $3\frac{1}{18}$ latæ sunt, (o) tempore minuti unius secundi progrediendo latitudinem suam conficient; ideóque (p) tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, et horæ spatio pedes 11000 quamproximè.

(q) *Corol.* 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in subduplicatâ ratione latitudinis.

Hæc ita se habent ex hypothesi quod partes aquæ rectà ascendunt vel rectà descendunt; sed ascensus et descensus ille (r) verius fit per circulum, ideóque tempus hâc Propositione non nisi quamproximè definitum esse affirmo.

Quoniam, ex dictis, unda percurrit latitudinem suam A C vel B D intereadum altitudo A transfertur in C, vel cavitas B in D, quod fieri non potest nisi aqua ab altitudine undarum descendat, et deindè ad eandem altitudinem ascendat, et quia cavitas quæ est infrà aquæ quiescentis superficiem quam in figurâ exhibet linea punctis distincta, est circiter æqualis elevationi aquæ suprà eandem superficiem quæ est æquilibrii locus, patet (313) totius aquæ movendæ longitudinem æqualem esse longitudini cavitatis vel elevationis aquæ infrà vel suprà locum illum æquilibrii, ac proinde cum longitudo cavitatis vel elevationis illius æqualis sit distantiæ A B, vel B C, pendulum cujus longitudo est $\frac{1}{4}$ A B vel $\frac{1}{4}$ B C, semel oscillabitur eo tempore quo aqua ascendit, et iterum oscillabitur, intereadum aqua descendit (313.) atque ità oscillabitur bis quo tempore unda describit latitudinem suam. Quoniam igitur numeri oscillationum quas pendula eodem tempore peragunt, sunt in ratione subduplicatâ longitudinis pendulorum inversè (474. Lib. I.) pendulum cujus longitudo est A B C D, quadrupla longitudinis $\frac{1}{4}$ A B semel oscillabitur quo tempore unda latitudinem suam percurrit. In undis verò latioribus quæ altiùs non elevantur, linea curva A B C, vix differt a rectâ A C, quæ est undæ latitudo, et propterea in eo casu unda latitudinem suam describit, intereadum pendulum cujus longitudo est recta A C, semel oscillatur.

(o) * *Tempore minuti unius secundi* (471. Lib. I.).

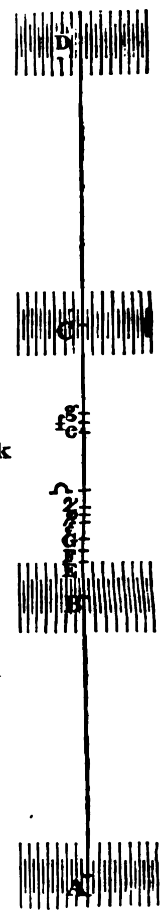
(p) * *Tempore minuti unius primi.* Quia undarum datæ latitudinis velocitas æquabilis est (ex dem.). Si undæ latitudo data ped. $3\frac{1}{18}$, ducatur in tempus 60″, factum $183\frac{1}{3}$ ped. erit spatium quod unda tempore minuti unius primi seu minutorum secundorum 60, describit et ducto rursus hoc numero $183\frac{1}{3}$ in 60′, producetur spatium 11000 ped. quod unda tempore horæ unius conficit.

(q) * *Corol.* 2. Undarum velocitates sunt ut earumdem latitudines directè et tempora quibus latitudines illas percurrunt inversè (5. Lib. I.). Sed tempora illa sunt in subduplicatâ ratione latitudinum undarum seu longitudinum pendulorum quæ eo tempore quo undæ latitudines suas describunt, semel oscillantur (472. Lib. I.). Undarum igitur velocitates sunt in ratione compositâ ex ratione latitudinum directè et ratione subduplicatâ earumdem latitudinum inversè, ideóque sunt in ratione subduplicatâ latitudinum directè.

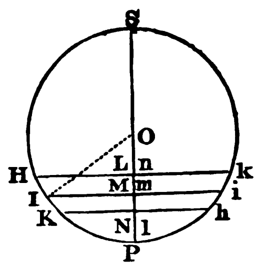
(r) * *Verius fit per circulum*, seu per arcum curvilineum qui magis accedit ad figuram arcûs circularis quàm ad figuram canalis rectilinei in quo aqua, rectà ascendit et descendit.

## PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XXXVII.

*Pulsibus per fluidum propagatis, singulæ fluidi particulæ, motu reciproco brevissimo euntes et redeuntes, accelerantur semper et retardantur pro lege oscillantis penduli.*



Designent A B, B C, C D, pulsuum successivorum æquales distantias; A B C plagam motus pulsuum ab A versus B propagati; E, F, G puncta tria physica, (s) medii quiescentis in rectâ A C ad æquales ab invicem distantias sita; E e, F f, G g spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco (t) singulis vibrationibus eunt et redeunt; $\epsilon$, $\varphi$, $\gamma$ loca quævis intermedia eorundem punctorum; et E F, F G lineolas physicas seu medii partes lineares punctis illis interjectas, et successivè translatas in loca $\epsilon$ $\varphi$, $\varphi$ $\gamma$ et e f, f g. Rectæ E e æqualis ducatur recta P S. Bisecetur eadem in O, centroque O et intervallo O P describatur circulus S I P i. Per hujus circumferentiam totam cum partibus suis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipsius partibus proportionalibus; sic ut com to tempore quovis P H vel P H S h, si demittatur ad P S perpendiculum H L vel h l, et capiatur E $\epsilon$ æqualis P L vel P l, punctum physicum E reperiatur in $\epsilon$. Hâc lege punctum quodvis E, eundo ab E per $\epsilon$ ad e, et inde redeundo per $\epsilon$ ad E, iisdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes singulas peraget (u) cum oscillante pendulo. Probandum est quod singula medii puncta physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu a causâ quâcunque cieri, et videamus quid inde sequatur.




(s) * *Medii quiescentis*, id est, nondum agitati vibrationibus corporis tremuli, aut indè productis aëris pulsibus.

(t) 314. * *Singulis vibrationibus eunt et redeunt.* Si corporis tremuli aut chordæ musicæ oscillantis particula incipiat moveri in E, et eundo secum transferat medii punctum E, in locum e, et deindè particula illa chordæ musicæ vi propriâ et punctum e, medii inter e, et C compressi ac condensati dilatatione redeant in locum E, unicus in medio elastico pulsus secundum directionem B C, producetur, et singulis aliis vibrationibus corporis tremuli vel chordæ musicæ ex itu et reditu compositis, singuli excitabuntur pulsus (Prop. XLIII.) atque adeò pulsus latitudinem suam describit intereadum punctum E, vibrationem unam ex itu et reditu per brevissimum spatium E e, compositam, absolvit.

(u) * *Cum oscillante pendulo* (Prop. LII. Lib. I.).

In circumferentiâ P H S h capiantur æquales arcus H I, I K vel h i, i k, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ E F, F G ad pulsuum intervallum totum B C. Et demissis perpendiculis I M, K N vel i m, k n; quoniam puncta E, F, G motibus similibus successivè agitantur, et vibrationes suas integras ex itu et reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur a B ad C; si P H vel P H S h sit tempus ab initio motûs puncti E, ([x]) erit P I vel P H S i tempus ab initio motûs puncti F, et P K vel P H S k tempus ab initio motûs puncti G; et propterea E $\iota$, F $\varphi$, G $\gamma$ erunt ipsis P L, P M, P N in itu punctorum vel ipsis P l, P m, P n in punctorum reditu, ([y]) æquales respectivè. Unde $\iota\,\gamma$ seu E G + G $\gamma$ — E $\iota$ in itu punctorum æqualis erit E G — L N, in reditu autem æqualis E G + l n. ([z]) Sed $\iota\,\gamma$ latitudo est seu expansio partis medii E G in loco $\iota\,\gamma$; et propterea expansio partis illius in itu est ad ejus expansionem mediocrem, ut E G — L N ([a]) ad E G; in reditu autem ut E G + l n seu E G + L N ad E G. Quare ([b]) cùm sit L N ad K H ut I M ad radium O P, ([c]) et K H ad E G ut circumferentia P H S h P ad B C, id est, si ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulsuum B C, ([d]) ut O P ad V; et ex æquo L N ad E G ut I M ad V: erit expansio partis E G punctive physici F in loco $\iota\,\gamma$ ad expansionem mediocrem, quam pars illa habet in loco suo primo E G, ([e]) ut V — I M ad V in itu, ut-

([x]) * *Erit P I vel P H S i.* Quoniam puncta E, F, G, et alia deinceps, motibus similibus per medii compressionem et dilatationem communicatis successivè agitantur, pulsus per æqualia spatia E F, F G, &c. æqualibus temporibus propagatur, ideóque tempus quo transfertur ab E ad F, vel ab F ad G, est ad tempus totum quo transfertur a B ad C, et quo singula puncta E, F, G vibrationes suas integras ex itu et reditu compositas perficiunt, ut spatium E F vel F G ad spatium B C, in quâ ratione etiam est arcus H I, vel I K, ad totam circumferentiam P H S P, (per Hyp.) quæ tempus totum quo pulsus a B ad C transfertur, exponit, et differentia inter tempus sumptum ab initio motûs puncti E et tempus sumptum ab initio motûs puncti F, est tempus illud quod pulsus transfertur ab E ad F. Quare *si P H vel P H S h exponat tempus ab initio motûs puncti E, P I vel P H S I, exponet tempus ab initio motûs puncti F*, cum H I vel h i exponat differentiam inter tempus ab initio motûs puncti E, et tempus ab initio similis motûs puncti F, &c.

([y]) * *Æquales respectivè* (per Prop. LII. vel XXXVIII. Lib. I.).

([z]) * *Sed $\iota\,\gamma$ est latitudo seu expansio partis medii E G, in loco $\iota\,\gamma$*, quia punctum E translatum est in locum $\iota$, et punctum G in locum $\gamma$.

([a]) * *Ad E G.* Nam cùm E, F, G sint puncta tria medii quiescentis seu motu impresso nondum condensati vel rarefacti, expansio medii in loco E G, mediocris seu quasi media est inter minimam ipsius expansionem in locis pulsuum densissimis, et maximam in locis rarissimis.

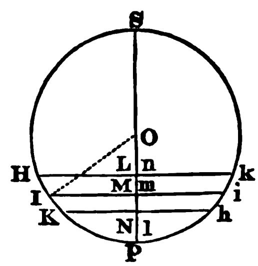
([b]) 315. * *Cum sit L N ad K H.* Anguli ad centrum I O P mensura est arcus I P æqualis dimidio arcui I P i, seu K P k, et anguli ad circumferentiam K H k, mensura est etiam dimidius arcus K P k, et ideò anguli I O P et K H L, æquales sunt. Hinc si ex puncto K, demissum intelligatur ad H L, perpendiculum æquale L N, hoc perpendiculum cum ordinatarum H L et K N differentiâ et cum arcu minimo K H triangulum constituet simile triangulo I O M. Est igitur L N ad K H, ut I M ad I O seu O P.

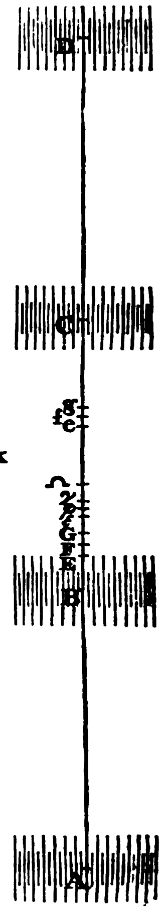
([c]) * *Et K H ad E G* (per Hyp. supra.).

([d]) * *Ut O P ad V.* Sunt enim circulorum peripheriæ P H S P et B C radiis suis O P et V proportionales.

([e]) * *Ut V — I M ad V.* Quia enim (ex dem.) $LN = \frac{EG \times IM}{V}$, erit $EG - LN = \frac{V \times EG - IM \times EG}{V}$, et hinc E G — L N ad E G ut V — I M ad V. Et similiter ob L N = l n, et I M = i m, erit E G + l n ad E G ut V + i m ad V.

que V + i m ad V in reditu. Unde vis elastica puncti F in loco $\varepsilon\gamma$ (f) est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco E G, ut $\frac{1}{V - I M}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V + i m}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires elasticæ punctorum physicorum E et G in itu, sunt ut $\frac{1}{V - HL}$ et $\frac{1}{V - KN}$ ad $\frac{1}{V}$; (g) et virium differentia ad medii vim elasticam mediocrem, ut $\frac{HL - KN}{VV - V \times HL - V \times KN + HL \times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc est, ut $\frac{HL - KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, sive ut H L — K N ad V, si




modo (h) (ob angustos limites vibrationum) supponamus H L et K N indefinitè minores esse quantitate V. Quare cùm quantitas V detur, differentia virium est ut H L — K N, hoc est (i) (ob proportionales H L — K N ad H K, et O M ad O I vel O P, datasque H K et O P) ut O M; id est, si F f bisecetur in Ω ut Ω φ. (k) Et eodem argumento differentia virium elasticarum punctorum physicorum ε et γ, in reditu lineolæ physicæ ε γ est ut Ω φ. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti ε supra vim elasti-

(f) * *Est ad vim ejus elasticam*, &c. Hic supponit Newtonus vim elasticam medii densitati proportionalem, quam quidem hypothesim in aëre nostro, cæteris paribus, quamproximè veram esse experimentis constat. At, datâ medii massâ, densitas est ut expansio seu volumen inversè; quarè cùm hic data sit massa medii in volumine E G vel ε γ, contenti, vis elastica est ut expansio reciprocè et ideò *vis elastica puncti F, in loco ε γ*, &c.

(g) * *Et virium differentia*, id est, excessus vis elasticæ puncti E, suprà vim elasticam puncti G erit ad medii vim elasticam mediocrem, &c.

(h) * *Ob angustos limites vibrationum*. Quoniam eo tempore quo punctum G vibrationem unam ex itu et reditu per brevissimum spatium E e compositam absolvit et quo pulsus transfertur a B ad C, innumeræ ferè medii particulæ per medii compressionem et dilatationem successivè agitantur, spatium illud E e, seu æquale P S, perbreve erit, si conferatur cum pulsuum intervallo B C, aut etiam cum radio V circuli qui circumferentiam habet æqualem B C. Rectè igitur supponitur, quantitates H L et K N, longè minores esse quantitate V.

(i) * *Ob proportionales*. Liquet (per not. 215.) esse H L — K N ad H K, ut est O M ad O I vel O P, undè $HL - KN = \frac{HK \times OM}{OP}$, et ideò ob datum radium O P, datumque arcum H K, qui est ad datam F G ut peripheria data P H S P ad datam B C, erit H L — K N ut variabilis O M. Sed F f = P S, F φ = P M, et propterea si F f bisecetur in Ω, ut sit O P = F Ω, erit O M = φ Ω. Est igitur H L — K N ut φ Ω.

(k) * *Et eodem argumento*. Nam in reditu,

cam puncti $\gamma$) ([l]) est vis quâ interjecta medii lineola physica $\iota\,\gamma$ acceleratur in itu et retardatur in reditu; et propterea vis acceleratrix physica $\iota\,\gamma$, est ut ipsius distantia a medio vibrationis loco $\Omega$. Proinde tempus (per Prop. XXXVIII. Lib. I.) rectè exponitur per arcum P I; et medii pars linearis $\iota\,\gamma$ ([m]) lege præscriptâ movetur, id est, lege oscillantis penduli: estque par ratio partium omnium linearium ex quibus medium totum componitur. Q. e. d. (†)

vis elastica puncti F in loco $\iota\,\gamma$ est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco E G, ut $\frac{1}{V + i\,m}$, ad $\frac{1}{V}$, et vires elasticæ punctorum physicorum G et E, in loco $\iota\,\gamma$, sunt ut $\frac{1}{V + h\,l}$, et $\frac{1}{V + k\,n}$, ad $\frac{1}{V}$, et virium differentia ad medii vim elasticam mediocrem ut $\frac{k\,n - h\,l}{V\,V + V \times h\,l + V \times k\,n + h\,l \times k\,n}$, ad $\frac{1}{V}$, hoc est, ut $\frac{k\,n - h\,l}{V\,V}$ ad $\frac{1}{V}$ sivè ut k n — h l ad V, &c.

([l]) * *Est vis quâ interjecta lineola.* Medium in $\iota$ et in $\gamma$ vi suâ elasticâ sese dilatare in plagas oppositas C et B nititur, his viribus interjecta lineola physica $\iota\,\gamma$, seu punctum physicum $\phi$, urgetur in utramque plagam, et excessu vis elasticæ in $\iota$, suprà vim elasticam in $\gamma$, acceleratur in itu et retardatur in reditu.

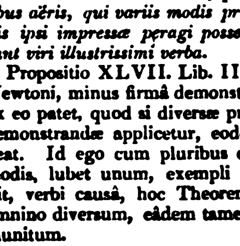
([m]) * *Lege præscriptâ movetur.* Demonstratum est quod si punctum physicum E ad legem oscillantis penduli moveatur, uti si vibrationibus partium corporis tremuli aut nervi musici (quemadmodum in not. 314 exposuimus) agitetur, tùm solâ vi elasticâ medii punctum physicum F, et alia deindè puncta secundum eandem legem oscillantis penduli successivè movebuntur.

(†) *Jam pridem vir acutissimus Eulerus, hanc Newtoni theoriam suspectam habuit, aliamque formulam dedit quâ soni celeritatem determinaret a Newtonianâ diversam, sed suæ formulæ demonstrationem, aut vitium Newtonianæ, palam non fecit, quod sciamus; observationes suas hanc in rem nobis communicavit vir doctissimus Gabriel Cramer, vir in his rebus expertissimus, sagacissimique ingenii, quas suâ cum veniâ, publici juris facimus, quasque doctorum attentione dignissimas credimus; certè planissimè ostendit aliquod subreptionis vitium in hac demonstrandi formâ, quam Newtonus adhibet latere; scilicet demonstrationem ipsam non ex rei naturâ, sed ex hypothesi assumptâ fluere. Ipsi verò motus aëris secundùm methodum Newtonianam assequi conabimur, nam ipsam ejus Propositionem veram esse, etsi ejus demonstratio vitio quodam laboret, persuasum habemus, sed eam ex naturâ motûs puncti elastici sonori esse deducendam, potius quàm ex motibus aëris, qui variis modis pro ratione agitationis ipsi impressæ peragi possunt. Hæc autem sunt viri illustrissimi verba.*

Propositio XLVII. Lib. II. Princip. Philos. Newtoni, minus firmâ demonstratione nititur, ut ex eo patet, quod si diversæ prorsus conclusioni demonstrandæ applicetur, eodem successu gaudeat. Id ego cum pluribus diversis tentassem modis, lubet unum, exempli gratiâ, apponere. Sit, verbi causâ, hoc Theorema a Newtoniano omnino diversum, eâdem tamen demonstratione munitum.

*Pulsibus per fluidum elasticum propagatis, singulæ fluidi particulæ, motu uniformiter retardato et accelerato euntes et redeuntes, oscillantur pro lege gravis ascendentis et descendentis.*

Designent A B, B C, C D, &c. pulsuum successivorum æquales distantias, A B C plagam motus pulsuum ab A versus B propagati, E, F, G, puncta tria physica medii quiescentis in recta B C ad æquales distantias sita, E e, F f, G g, spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu uniformiter retardato moventur; $\iota$, $\phi$, $\gamma$, loca





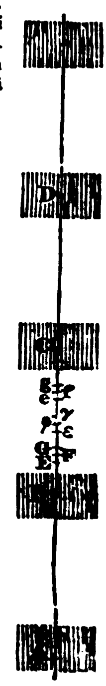

quævis intermedia illorum punctorum, et E F, F G lineolas physicas seu partes medii lineares punctis illis interjectas et successivè translatas in loca $\iota\,\phi$, $\phi\,\gamma$, et e f, f g. Rectæ E e æqualis ducatur recta P S, quâ tanquam axe describatur parabola S H I K. Per basim T t exprimatur totum tem-

pus unius vibrationis, et per ejus partes, partes temporis proportionales exprimantur, sic ut completo tempore quovis T R, vel T r, si erigatur normalis R H aut r h, et capiatur E $\iota$ æqualis R H vel P L, aut r h vel P l, punctum physicum E reperiatur in $\iota$. Hâc lege punctum quodvis E eundo ab E per $\iota$ ad e, et inde redeundo per $\iota$ ad E, iisdem retardationis et accelerationis gradibus vibrationem unam peraget cum ascendente et descendente corpore gravi, probandum est quod singula medii puncta physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu a causa quâcunque cieri, et videamus quid inde sequatur.

In recta T t, sumantur æquales partes O Q, Q R, vel o q, q r, eam habentes rationem ad rectam totam T t, quam habent æquales rectæ E F, F G ad pulsuum intervallum B C; et erectis O K, Q I, R H, vel o k, q i, r h: demissis etiam si placet K N, I M, H L; k n, i m, h l; quoniam puncta E, F, G, motibus similibus successive agitantur, et vibrationes suas integras itu et reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur ex B ad C, si T R vel T r sit tempus ab initio motûs puncti E, erit T Q vel T q tempus ab initio motûs puncti F, et T O vel T o, tempus ab initio motûs puncti G; et propterea E $\iota$, F $\phi$, G $\gamma$, erunt ipsis R H, vel P L, Q I vel P M, et O K vel P N in itu punctorum, vel ipsis r h aut P l, q i aut P m, et o k vel P n in reditu æquales respective: unde $\iota\,\gamma$ seu E G + G $\gamma$ — E $\iota$ in itu punctorum æqualis erit E G — L N: in reditu autem æqualis E G + l n. Sed $\iota\,\gamma$ latitudo est seu expansio partis medii E G in loco $\iota\,\gamma$, et propterea expansio partis illius in itu, est ad ejus expansionem mediocrem ut E G — L N ad E G; in reditu autem ut E G + l n seu E G + L N ad E G. Quare cum sit L N seu H X ad K X seu O R, ut L M ad semi parametrum parabolæ, et O R ad E G ut T t ad B C, id est (si ponatur V ad semi parametrum ut B C ad T t, vel si sit T t æqualis semi-parametro et V æqualis B C) ut semi-parameter ad V, et ex æquo L N ad E G ut I M ad V; erit expansio partis E G punctive physici F in loco $\iota\,\gamma$ ad expansionem mediocrem quam pars illa habet in loco suo primo E G, ut V — I M ad V in itu, utque V + i m ad V in reditu. Unde vis elastica puncti F in loco $\iota\,\gamma$ est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco E G, ut $\frac{1}{V - I M}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V + i m}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento itus punctorum physicorum E et G in itu sunt ut $\frac{1}{V - H L}$ et $\frac{1}{V - K N}$ ad $\frac{1}{V}$, et virium differentia ad vim elasticam mediocrem, ut

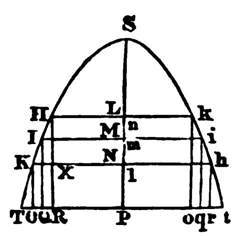
$$\frac{K N - H L}{V V - V \times H L - V \times K N + H L \times K N}$$

ad $\frac{1}{V}$, hoc est, ut $\frac{K N - H L}{V V}$ ad $\frac{1}{V}$ sive ut K N — H L ad V, si modo (ob angustos limites vibrationum) supponamus H L et K N indefinite minores esse quantitate V. Quare cùm quantitas V detur, differentia virium est ut K N — H L seu K X, seu O R, hoc est, ob proportionales O R, E F, et T t, B C, (datisque E F, T t et B C) constans. Et eodem argumento, differentia virium punctorum physicorum $\iota$ et $\gamma$ in reditu lineolæ physicæ $\iota\,\gamma$ est etiam constans. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti $\iota$ supra vim elasticam puncti $\gamma$) est vis qua interjecta medii lineola physica acceleratur aut retardatur, et propterea vis acceleratrix lineolæ physicæ $\iota\,\gamma$ est constans. Propterea tempus rectè exponetur per ordinatam I M et medii pars linearis $\iota\,\gamma$, lege præscripta movetur, id est, lege ascendentis descendentisque gravis, estque par ratio omnium linearum ex quibus medium totum componitur. Q. e. d.




Sed (quod sanè mirum) Prop. XLIX. in quâ ex sua hypothesi Newtonus soni velocitatem computat, eandem dabit conclusionem in nostra, et, ut arbitror, in aliâ quâcunque. Sic

Fingamus medium ab incumbente pondere, pro more aëris nostri, comprimi, sitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens et cujus




densitas eadem sit cum densitate medii compressi in quo pulsus propagatur. Et quo tempore corpus cadet ex altitudine æquali dimidio ipsius A eodem tempore pulsus percurret spatium æquale toti altitudini A. (Id quod congruit cum Corol. 1. dictæ Prop. XLIX.).

Nam stantibus quæ in Prop. XLVII. constructa sunt, si linea quævis physica singulis vibrationibus describendo spatium P S urgeatur in itu et reditu a vi elastica quæ ipsius ponderi, æquetur, peraget semi-vibrationem quo tempore corpus cadet ex altitudine P S, adeóque vibrationem, quo tempore corpus grave caderet ex altitudine 4 P S. Quare, cùm tempora descensus sint in subduplicata ratione longitudinum percursarum, fiet tempus vibrationis unius ad tempus descensus ex altitudine ½ A, in subduplicatâ ratione longitudinis 4 P S ad ½ A, seu 8 P S ad A. Sed vis quâ in singulis punctis urgetur particula E G erat ad ejus vim mediocrem elasticam, ut K N — H L seu K X vel O R ad V, et vis illa mediocris, hoc est pondus incumbens quo lineola

E G comprimitur, est ad pondus lineolæ E G, ut A ad E G, adeóque ex æquo, vis quâ lineola E G in singulis punctis urgetur, est ad ejus pondus, ut O R × A ad E G × V, seu ut semi-parameter in A, ad V V (est enim O R ad E G ut T t ad B C, atque ideò ut semi-parameter ad V) vel ut 8 P S × A ad B C², ob V q ad B C q ut semi-parametri quadratum ad T t quad. (atque ideò ut 8 P S ad semi-parametrum.) Quare cùm tempora quibus æqualia corpora per æqualia spatia impelluntur, sint reciproce in subduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illa elastica, ad tempus unius vibrationis urgente vi ponderis, in subduplicatâ ratione B C² ad 8 P S × A. Atque adeò ad tempus descensûs ex altitudine ½ A, in subduplicatâ ratione B C² ad 8 P S × A et subduplicata ratione 8 P S ad A, hoc est in ratione integra B C ad A. Sed tempore unius vibrationis pulsus progrediendo conficit latitudinem suam B C. Ergo tempus quo pulsus percurrit spatium B C est ad tempus descensûs ex altitudine ½ A, ut B C ad A. Tempus autem quo pulsus percurrit spatium A est ad tempus quo percurrit spatium B C, ut A ad B C, adeóque æquale tempori descensus ex altitudine ½ A.

Hîc notandum, quod absurda sit, et facilè refutanda hypothesis hîc assumpta, quod nempe pulsus propagetur, particulis euntibus et redeuntibus pro lege gravis ascendentis et descendentis. Verùm id ipsum est quod demonstrationem Newtonianam evertit, ostendendo nimirum eam ipsam absurdæ hypothesi probandæ æque inservire.

*Hactenus vir doctissimus; sequuntur ea quibus restitui posse Newtonianam demonstrationem credimus.*

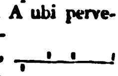
De Motibus in Fluido Elastico Genitis.

1. *Hypothesis.* Suppono medium elasticum constare punctis, quantitate exiguâ sed finitâ a se dissitis, et vi repulsivâ donatis quæ distantiæ illorum punctorum sit reciproce proportionalis; nec ad alia puncta præter ea quæ immediate proxima sunt sese extendit: hoc enim modo quæcumque sit partium medii elastici natura, satis feliciter repræsentantur effectus qui ex eorum elaterio pendent.

2. *Corol.* 1. Medii elastici status naturalis est ut puncta ejus elastica a se mutuò æqualiter distent.

3. *Corol.* 2. Puncta elastica velocitatem finitam suscipere possunt vel per immediatum contactum corporis moti, velocitate suâ finitâ punctum elasticum urgentis vel per actionem continuatam vis repulsivæ punctorum elasticorum si ab unâ parte fortior sit quàm ab aliâ. Reliquas causas motus, ut gravitatem, vires centrales, &c. hic non consideramus.

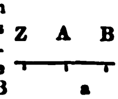
4. *Theor.* 1. Si velocitas finita quomodocumque excitetur in puncto elastico, distantiæ ejus a proximo puncto versus quod movetur minuetur finitâ quantitate antequam in reliquo medio factus sit ullus motus ullaque compressio: sint A, B, C, tria puncta medii elastici æquidistantia, moveatur A versus B velocitate finitâ, et tempore infinitè parvo describat spatium infinitè parvum primi ordinis A a, vis motrix puncti B erit differentia virium repulsivarum puncti A et C, est autem vis repulsiva puncti A ubi pervenit in a, ad vim puncti C (si immotum supponatur) ut B C ad B a, et dividendo vis motrix puncti B, ad vim repulsivam puncti C, ut B C — B a (= A a) ad B a. Sed




A a, est infinite parvum ex hypothesi et B a est finita quantitas, ergo vis motrix puncti B, est infinite parva vis respectu vis repulsivæ puncti C, quæ vis repulsiva pro ipsa vi naturali elaterii assumi potest; vis autem elasticitatis est ex genere pressionum, tempore infinitè parvo velocitatem infinitè parvam generaret, quæ velocitas infinite parva durante tempore infinitè parvo, spatium infinitè parvum secundi ordinis describere faceret: ergo siquidem vis motrix puncti B hujus vis respectu est infinitè parva, tempore infinitè parvo spatium infinitè parvum duntaxat tertii ordinis describere faceret; nullus ergo motus in puncto B generabitur nisi spatium descriptum A a sit finita quantitas, nulla ergo erit compressio inter puncta B et C. Q. e. d.

5. *Corol.* 1. Nullus ergo motus ex puncto medii elastici in punctum proximum transfertur nisi post tempus finitum, nam spatium finitum A a, nonnisi tempore finito percurri potest per velocitatem finitam.

6. *Corol.* 2. Et velocitas finita in puncto elastico excitata non mutabitur nisi post tempus finitum et postquam quantitate finitâ processerit. Sint enim medii particulæ Z, A, B, procedat punctum A velocitate finitâ utcumque in id punctum producta, et tempore infinitè parvo describat spatium infinitè parvum A a, vis quâ sistetur ea velocitas orietur ex differentia virium elasticarum puncti Z et puncti B, estque vis puncti B ad vim puncti Z ut A B + A a ad A B — A a, et dividendo vis sistens punctum A ad vim puncti Z, ut 2 A a ad A B — A a, sed A a est infinitè parvum respectu quantitatis A B — A a, ergo, vis sistens punctum A est infinitè parva, respectu vis puncti Z, quæ est vis elaterii naturalis, ideò (eodem modo ac in Theorematis demonstratum fuit) probabitur, vim illam tempore infinitè parvo spatium infinitè parvum tertii ordinis producturam: quare etiamsi singula puncta a parte B posita æquali vi agerent eorumque numerus infinitus foret, vires illæ omnes non nisi spatium infinitè parvum secundi ordinis infinitè parvo tempore ex spatio A a eodem tempore descripto detraherent, maneret itaque idem, velocitas ergo puncti A non mutabitur ex actione omnium punctorum medii elastici, nisi post tempus finitum et postquam finita quantitate processerit.




7. *Corol.* 3. Si considerentur innumera puncta elastica ordine in lineâ rectâ posita, nec attendatur ad alia quæ circumquáque solidum spatium constituunt, si unum velocitate finitâ quâcumque ex causâ urgeatur, quæ constans in eo maneat,

quoddam tempus finitum requiretur ut eadem velocitas in proximo puncto excitetur, paulo longius tempus ut in tertio producatur, sicque deinceps, nam per Cor. 1. nullus motus ex puncto medii elastici in punctum proximum transfertur nisi elapso finito tempore, velocitas ergo primi puncti ad secundum non transit nisi post finitum tempus ab initio motus primi puncti et velocitas secundi puncti ad tertium non transit nisi post finitum tempus ab initio motûs secundi ejus

A B C D E, &c.

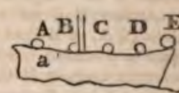
puncti. Breviori autem tempore excitari debet data velocitas in secundo puncto per actionem continuatam ab initio motûs primi puncti, quàm in tertio per actionem continuatam ab initio motûs puncti secundi: cùm enim velocitas primi puncti sit finita et æquabilis, compressio exinde orta ab initio ejus motûs est major quàm compressio quæ per motum secundi puncti ab initio ejus motus acquiritur, siquidem ad celeritatem primi puncti nonnisi per gradus pervenit, ergo vis motrix quæ urget secundum punctum ab initio, fortior est quam ea qua urgetur tertium punctum ab initio, ergo tertium punctum datam illam celeritatem tardius acquiret, et pari ratiocinio, cum vis motrix secundi puncti sub initio fortior sit quam vis motrix tertii, compressio inter secundum et tertium punctum major erit sub initio quàm inter tertium et quartum; unde vis motrix quæ urget tertium punctum sub initio, fortior est quàm ea quâ urgetur quartum punctum; ergo cùm punctum sequens aliqualem velocitatem suscipere non possit nisi postquam punctum præcedens spatium finitum descripserit, et longiori tempore ab initio motûs suscepti datam velocitatem possit suscipere, liquet quod ea data velocitas nonnisi successivè ad successiva medii elastici puncta pertingit.

8. *Schol.* Hinc patet discrimen inter motum in medio elastico excitatum et motum qui excitatur in medio non elastico cujus partes contiguæ sunt, in tali enim medio, pressio cuidam particulæ applicata ad omnes partes in directum positas, aut divaricantes, puncto temporis extendi debet; motus vero instanti in circulum propagari debet; at in medio elastico, pressio ab uno puncto ad alterum non continuatur nisi per accessum punctorum medii, sive per realem motum, qui antrorsum propagetur, et post tempus finitum a puncto primum moto ad reliquas partes fluidi successivè perveniat.

## PROBLEMA.

9. Si punctum medii elastici finitâ velocitate moveatur quæ constans maneat, definire motum punctorum sequentium in lineâ recta positorum, omissis aliis sphæricè circumquaque positis.

*Primus Casus.* Sint ordine puncta A, B, C, D, &c. fingatur ea omnia ad æquales distantias in navi pòsita, et punctum B ita adhærere malo ut ex ejus motu, navis motum suscipiat et reliqua puncta veniat; recipiat verò punctum A velocitatem finitam quæ constans maneat relatè ad navis punctum in quo versabatur, et ponatur primo eam versus B tendere; ex accessu puncti A versus B vis repulsiva particulæ A fortior fiet vi repulsivâ particulæ C, quare ex differentiâ virium nascetur vix motrix particulæ B; procedat enim A ad B quantitate A a, erit vis particulæ C in B, ad vim particulæ A in B, ut a B ad B C sive A B (quia particularum intervalla A B, B C initio erant æqualia) et dividendo, vis particulæ C, ad differentiam virium quæ est vis motrix puncti B ut a B ad A B — a B sive A a, sed vis particulæ C est vis ipsa elaterii in statu naturali, ex hypoth. Ergo vis elaterii est ad vim moventem punctum B, ut a B ad A a. Repræsentet itaque I H tempus quo distantia A B punctorum elasticorum per velocitatem datam puncti A percurritur, dicaturque




illud tempus a, ducatur deorsum ad angulos rectos linea H G quæ vim elasticam singulæ particulæ medii in statu naturali designet, ductaque F G parallela I H, asymptotis F G et G H et dignitate æquali a × H G describatur hyperbola, transibit per punctum I, (siquidem I F = H G et F G = I H = a, ideóque I F × F G = H G × a) et si I P repræsentet tempus quo durante A motum est, dicaturque x, dico quod P M repræsentabit vim motricem puncti B eo temporis momento. Erit enim ex naturâ hyperbolæ, G R : G F = F I (H G) : R M et dividendo G R (H P) : F R (I P) = H G : P M; spatia verò uniformiter descripta sunt ut tempora; ergo A B : A a = I H : I P et dividendo a B : A a = H P : I P, sed a B ad A a ut vis elaterii ad vim motricem puncti B; ergo H P : I P = H G : P M = vis elaterii ad vim motricem puncti B, sed H G repræsentat vim elaterii, ergo P M ubique repræsentat vim motricem puncti B.

Repræsentabit ergo etiam linea P M velocitatem momento P genitam, et area I P M totam velócitatem a puncto B acquisitam tempore I P sive tempore quo percurritur A a a puncto A.

Describatur verò ex puncto F logarithmica cujus axis sit linea H G producta, subtangens linea quævis G X quæ dicatur s, ductâque ex puncto P lineâ P T S dico quod linea T S repræsentabit velocitatem tempore I P acquisitam et area F T S spatium a puncto B descriptum.

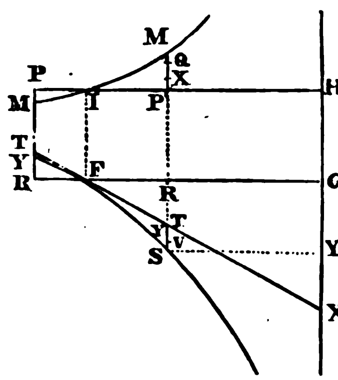
Est enim (per nat. logarith.) area I F R M, ad rect. I F G H ut R S ad G X, et rect. I F G H ad rect. I F R P ut F G ad F R ut G X ad R T, ideóque ex æquo area I F R M ad rect. I F R P ut R S ad R T, et dividendo, est I P M ad I F R P ut T S ad R T; ergo area I P M est ad T S in ratione datâ, ob datam P R et rationem F R ad R T datam, ut po

æqualem rationi F G ad G X, est ergo T S ut I P M, sive ut velocitas puncti B, et cùm perpendicula inter ordinatas T S sint æqualia momentis temporis in linea I P sumptis, area F T S erit ut spatium a puncto B percursum.

Eodem modo constabit, quod si vis elastica ageret more gravitatis tempore a, velocitas quam eo tempore generaret, designaretur per subtangentem s, et spatium descriptum foret $\frac{as}{2}$, dicatur verò m velocitas data puncti A, data erit ratio s ad m, intervallum particularum A B erit m a, et spatium A a velocitate datâ percursum est m x, notandum verò est quod ea velocitas s sit plusquam dupla velocitatis globi tormentarii, unde liquet quod in casibus sequentibus ubi velocitas puncti A longe minor velocitate globi tormentarii est intelligenda; quantitas $\frac{m}{s}$ est fractio satis parva.

Ad calculum verò facile revocatur linea F T S et area T S; 1. enim cùm subtangens sit s, ordinatarum F G, S Y differentia sit x, area tota F G Y S (ex nat. log.) est s x, intervallum R S est $s \times \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}$, &c. Rectang. R G $\times$ R S $= \overline{a - x} \times s \times \left(\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}\right.$, &c.) et quoniam est F G (a) : G X (s) = F R (x) : R T est R T $= \frac{sx}{a}$ et triang. F R T $= \frac{sx^2}{2a}$. Detrahantur ergo rectang. R G $\times$ R S et triang. F R T ex area F G S Y remanet area F T S $= sx - \overline{sa - sx} \times \overline{\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}}$, &c. $- \frac{sx^2}{2a} = sx \times \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}\right.$, &c.) $- sx \times \left(1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}\right.$, &c.) $- \frac{sx^2}{2a} = \frac{sx^2}{a} \times \left(\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3} +\right.$, &c.) erit itaque A a ad B b, ut m x, ad $\frac{sx^2}{a} \times \left(\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3}\right.$, &c.) vel ut m ad $\frac{sx}{a} \times \left(\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2}\right.$, &c.) erit verò recta T S = R S − R T $= \frac{sx}{a} \times \left(1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}\right.$, &c.) $- \frac{sx}{a} = \frac{sx}{a} \times \left(\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}\right.$, &c.) ideóque velocitas data puncti A erit ad velocitatem puncti B ut m ad $\frac{sx}{a} \times \left(\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}\right)$.

*Corol.* Si quæratur in hac hypothesi quo tempore et spatio descripto punctum B velocitatem puncti A obtineat, fiat $m = \frac{sx}{a} \times \left(\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}\right.$, &c.) sed cum spatium A a sit ad B b ut m ad $\frac{sx}{a} \times \left(\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2}\right.$, &c.) erit A a ad B b ut $\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}$, &c. ad $\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3}$, &c. cumque primus terminus, primæ seriei sit accuratè triplus primi termini alterius seriei, reliqui verò plusquam tripli; punctum A totam suam celeritatem puncto B communicat antequam id punctum B tertiam partem ejus spatii descripserit quod descripsit punctum A.




Tempus verò x exprimetur per radices hujus æquationis $o = \frac{ma}{s} - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3}$, &c. Ubi liquet quod quando $\frac{m}{s}$ est fractio, tunc x est minus quam a, et series est convergens, ideóque ex primo termino et proximo assumptis erit $x = a\sqrt{\frac{2m}{s}}$; rem accuratius expendere isto in casu, qui merè fictitius est, nihil est necesse.

*Casus secundus.* Si A moveatur uniformiter et acceleret punctum B quod etiam acceleret punctum C (nullâ habitâ ratione motûs puncti D) erit in hoc casu vis repulsiva A ad vim repulsivam C ut A B − B b + C c ad A B − A a + B b et differentia virium sive vis motrix puncti B ad vim repulsivam puncti C, ut A a − 2 B b + C c ad A B − A a + B b; est præterea vis repulsiva puncti C ad vim elaterii ut A B ad A B − B b + C c; et denique vis elastica est ad vim moventem punctum B in primo casu ut A B − A a ad A a; ideóque ex æquo vis vera motrix puncti B ad ejus vim in primo casu ut

A a B b C c D, &c.

$$\left\{\begin{array}{c} Aa - 2Bb + Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{array}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{array}{c} AB - Aa + Bb \\ AB - Bb + Cc \\ Aa \end{array}\right\}$$

In eâdem autem hypothesi vis motrix puncti C, hoc modo determinatur, est vis repulsiva puncti B ad vim repulsivam puncti D ut D c ad b c sive ut $AB - Cc$, ad $AB - Bb + Cc$, ergo vis motrix puncti C ad vim repulsivam puncti D, ut $Bb - 2Cc$ ad $AB - Bb + Cc$.

Hæc vis repulsiva puncti D est ad vim elasticam ut A B ad $AB - Cc$, denique vis elastica ad vim moventem punctum B in primo casu, ut $AB - Aa$, ad A a, ideóque ex æquo vis motrix puncti C, ad vim moventem punctum B in primo casu ut

$$\left.\begin{array}{l} Bb - 2Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{array}\right\} \text{ad} \left\{\begin{array}{l} AB - Bb + Cc \\ AB - Cc \\ Aa \end{array}\right.$$

Ut verò determinetur motus puncti B in isto casu (qui pro vero haberi potest ob exiguitatem motûs puncti D qui negligitur) concipiatur P M ad P Q ut

$$\left.\begin{array}{c} AB - Aa + Bb \\ AB - Bb + Cc \\ Aa \end{array}\right\} \text{ad} \left\{\begin{array}{l} Aa - 2Bb + Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{array}\right.$$

et idem P M ad P X ut

$$\left.\begin{array}{c} AB - Bb + Cc \\ AB - Cc \\ Aa \end{array}\right\} \text{ad} \left\{\begin{array}{l} Ab - 2Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{array}\right.$$

curvæ quæ transibunt per Q et X erunt loci virium motricium puncti B et puncti C, areæ I P Q, I P X erunt ut velocitates per illas vires dato tempore I P genitæ, et si sumantur ordinatæ T V et T Y, tales ut T S, T V, T Y sint ut areæ I P M, I P Q, I P X, areæ F T V, F T Y erunt ut spatia B b et C c: sit ergo $TV = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5$, &c.

et $TY = Ox^4 + Pa^5 + Ra^6$, &c.

erit $TVdx = Ax^2dx + Bx^3dx + Cx^4dx + Dx^5dx$, &c.

$TYdx = Ox^4dx + Px^5dx$

unde integrando, est area $FTV = \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^4}{4} + \frac{Cx^5}{5} + \frac{Dx^6}{6}$, &c. $= Bb$

et $FTY = \frac{Ox^5}{5} + \frac{Px^6}{6}$, &c. $= Cc$

fluxio autem $TV = 2Axdx + 3Bx^2dx + 4Cx^3dx + 5Dx^4dx$, &c.

Et fluxio $TY = 4Ox^3dx + 5Px^4dx$, &c.

Erat autem fluxio $TS = \frac{sxdx}{a^2} \times (1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4}$, &c.)

Sed P M ad P Q, ut fluxio T S ad fluxionem T V,

et P M ad P X ut fluxio T S ad fluxionem T Y,

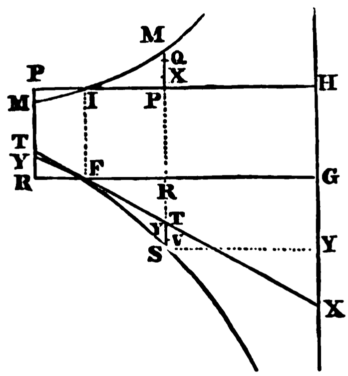
ergo fluxio T S ad fluxionem T V ut

$$\left.\begin{array}{c} AB - Aa + Bb \\ AB - Bb + Cc \\ Aa \end{array}\right\} \text{ad} \left\{\begin{array}{l} Aa - 2Bb + Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{array}\right.$$

et eadem fluxio T S ad fluxionem T Y ut

$$\left.\begin{array}{c} AB - Bb + Cc \\ AB - Cc \\ Aa \end{array}\right\} \text{ad} \left\{\begin{array}{l} Bb - 2Cc \\ AB \\ AB - Aa. \end{array}\right.$$

In his proportionibus multiplicatis extremis et mediis et terminorum collatione factâ, invenientur lineæ T V et T Y et areæ F T V et F T Y, sicque tempora quibus acquiruntur velocitates T V, T Y et spatia descripta dum acquiruntur, obtineri poterunt, calculum istum prolixissimum in compendio exhibebo; primò invenitur quod fluxio $TS \times AB \times \overline{AB - Aa} = sm^2xdx$, est præterea $Aa - 2Bb + Cc$ æquale $mx + * - \frac{2A}{3}x^3 - \frac{2B}{4}x^4 - \frac{2C - O}{5}x^5 - \frac{2D - P}{6}x^6$, &c. estque $Bb - 2Cc = \frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{4}x^4 + \frac{C - 2O}{5}x^5 + \frac{D - 2P}{6}x^6$, &c. quæ series multiplicatæ per $sm^2xdx$ dant facta extremorum in utrâque proportione.




Ut habeantur facta mediorum, in primâ proportione est $\overline{AB - Bb + C}c \times Aa = mx \times (ma + * + * - \frac{Ax^3}{3} - \frac{Bx^4}{4} - \frac{C - O}{5}x^5 - \frac{D - P}{6}x^6)$; ducatur in $AB - Aa + Bb = ma - mx + * + \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^4}{4} + \frac{Cx^5}{5} + \frac{Dx^6}{6}$ fit

$$m x \times \left\{ \begin{array}{l} m^2 a^2 - m^2 a x + * + * + \frac{m A x^4}{3} + \frac{m B x^5}{4} + \frac{C - O}{5} m x^6, \&c. \\ \qquad \frac{O m a x^5}{5} + \frac{P m a x^6}{6} \\ \qquad - \frac{A^2 x^6}{3 \times 3} \end{array} \right\}$$

Quod ducatur in fluxionem $T V =$
$d x \times (2 A x + 3 B x^2 + 4 C x^3 + 5 D x^4 + 6 E x^5 + 7 F x^6)$ factum erit

$$m x d x \times \left\{ \begin{array}{l} 2 m^2 a^2 A x - 2 m^2 a A x^2 - 3 m^2 a B x^3 + 4 m^2 a C x^4 + \frac{2 m A^2 x^5}{3} + \frac{18 m B A x^6}{3 \times 4} \\ \quad + 3 m^2 a^2 B x^2 + 4 m^2 a^2 C x^3 + 5 m^2 a^2 D x^4 - 5 m^2 a D x^5 + \frac{2 m a A O x^6}{5}, \&c. \\ \quad + 6 m^2 a^2 E x^5 - 6 m^2 a E x^6 \\ \quad + 7 m^2 a^2 F x^6 \end{array} \right\}$$

termini omnes hujus seriei dividantur per $s\, m$, et conferantur cum correspondentibus terminis seriei quam exhibet factum extremorum primæ proportionis et habebitur $m = \frac{2 m a^2 A}{s}$, ideóque $A = \frac{s}{2 a^2}$, tum $\frac{-2 m a A}{s} + \frac{3 m a^2 B}{s} = 0$, ideóque $B = \frac{s}{3 a^3}$, 3°. $- \frac{2 A}{3} = - \frac{3 m a B}{s} + \frac{4 m a^2 C}{s}$, unde invenitur $C = \frac{s}{4 a^4} - \frac{s}{3 \times 4 m a^4}$, 4°. $- \frac{2 B}{4} = - \frac{4 m a C}{s} + \frac{5 m a^2 D}{s}$ est ergo $D = \frac{s}{5 a^5} - \frac{6 s^2}{3 \times 4 \times 5 m a^5}$; 5°. $\frac{O - 2 C}{5} = + \frac{2 m A^2}{3 s} - \frac{5 m a D}{s} + \frac{6 m a^2 E}{s}$ est ergo $E = \frac{s}{6 a^6} - \frac{46 s^2}{3 \times 4 \times 5 \times 6 m a^6} + \frac{2 s^3}{3 \times 4 \times 5 \times 6 m^2 a^6} + \frac{s O}{5 \times 6 \times m a^2}$ et denique invenitur $F = \frac{s}{7 a^7} - \frac{252 s^2}{3. 4. 5. 6. 7 m a^7} + \frac{24 s^3}{3. 4. 5. 6. 7 m^2 a^7} + \frac{s P}{6. 7 m a^2}$.

In alterâ proportione resumatur factum $(A B - B b + C c) \times A a$ quod est $m x \times m (a + * + * - \frac{A x^3}{3} - \frac{B x^4}{4} - \frac{C - O}{5} x^5 - \frac{D - P}{6} x^6)$ ducatur in $A B - C c$ quod est

$$m a + * + * + * + * - \frac{O x^5}{5} - \frac{P x^6}{6}, \&c. \text{ fit}$$

$m x \times (m^2 a^2 + * + * - \frac{m a A x^3}{3} - \frac{m a B x^4}{4} - \frac{m a C x^5}{5} - \frac{m a D x^6}{6}, \&c.)$ Multiplicetur per fluxionem $T X$ quæ est $d x \times (4 O x^3 + 5 P x^4 + 6 Q x^5 + 7 R x^6, \&c.)$

$$\text{habetur } m x d x \times \left\{ \begin{array}{l} 4 m^2 a^2 O x^3 + 5 m^2 a^2 P x^4 + 6 m^2 a^2 Q x^5 + 7 m^2 a^2 R x^6 + 8 m^2 a^2 S x^7 \\ \qquad - \frac{4 m a A O x^6}{3} - \frac{4 m a B O x^7}{4} \\ \qquad - \frac{5 m a A O x^7}{3} \end{array} \right\}$$

termini omnes hujus seriei dividantur per $s\, m$ et conferantur cum terminis correspondentibus seriei quam exhibet factum extremorum secundæ proportionis, et habebitur $\frac{A}{3} = \frac{4 m a^2 O}{5}$ ideóque $O = \frac{s^2}{2 \times 3 \times 4 m a^4}$: 2°. $\frac{B}{4} = \frac{5 m a^2 P}{s}$ hinc $P = \frac{s^1}{3 \times 4 \times 5 m a^5}$ 3°. $\frac{C}{5} - \frac{2 O}{5} = \frac{6 m a^2 Q}{s}$, hinc $Q = \frac{s^2}{4 \times 5 \times 6 m a^6} - \frac{2 s^3}{3 \times 4 \times 5 \times 6 m^2 a^6}$, &c. unde tandem obtinentur hæ series, quibus velocitates et spatia descripta exprimuntur: exprimitur ergo velocitas puncti B, per

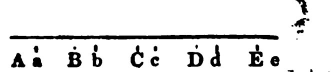
$$T V = \frac{s x^2}{2 a^2} + \frac{s x^3}{3 a^3} + \frac{s x^4}{4 a^4} + \frac{s x^5}{5 a^5} + \frac{s x^6}{6 a^6} + \frac{s x^7}{7 a^7}, \&c.$$
$$- \frac{2 s^2 x^4}{2.3 \times 4 m a^4} - \frac{6 s^2 x^5}{3 \times 4 \times 5 m a^5} - \frac{46 s^2 x^6}{3 \times 4 \times 5 \times 6 m a^6} - \frac{390 s^2 x^7}{3.4.5.6.7 m a^7}, \&c.$$
$$+ \frac{5 s^3 x^6}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 m^2 a^6} + \frac{50 s^3 x^7}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 m^2 a^7}, \&c.$$

$$\text{area } F T V = \frac{s x^3}{2 \times 3 a^2} + \frac{s x^4}{3 \times 4 a^3} + \frac{s x^5}{4 \times 5 a^4} + \frac{s x^6}{5 \times 6 a^5} + \frac{s x^7}{6 \times 7 a^6} + \frac{s x^8}{7 \times 8 a^7}, \&c.$$
$$- \frac{s^2 x^5}{3 \times 4 \times 5 m a^4} - \frac{6 s^2 x^6}{3 \times 4 \times 5 \times 6 m a^5} - \frac{46 s^2 x^7}{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 m a^6} - \frac{390 s^2 x^8}{3.4.5.6.7.8 m a^7}$$
$$+ \frac{5 s^3 x^7}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 m^2 a^6} + \frac{50 s^3 x^8}{2.3.4.5.6.7.8 m^2 a^7}$$

velocitas puncti C exprimitur per $T X = \frac{s^2 x^4}{2 \times 3 \times 4 m a^4} + \frac{s^2 x^5}{3 \times 4 \times 5 m a^5} + \frac{s^2 x^6}{4 \times 5 \times 6 m a^6}$, &c. $- \frac{2 s^3 x^5}{3 \times 4 \times 5 \times 6 m^2 a^6}$

area denique $F T X = \frac{s^2 x^5}{2 \times 3 \times 4 \times 5 m a^4} + \frac{s^2 x^6}{3 \times 4 \times 5 \times 6 m a^7} + \frac{s^2 x^7}{4 \times 5 \times 6 \times 7 m a^6}$, &c. $- \frac{2 s^3 x^7}{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 m^2 a^6}$

Punctorum sequentium motus determinari possent simili ratione; etenim vires motrices punctorum B, C, D, E, &c. sunt ut A a — 2 B b, B b — 2 C c, C c — 2 D d, D d — 2 E e, &c. Vis enim cujusvis puncti ut C est ad vim puncti E ut d e ad c d sive ut A B +




E e — D d ad A B + D d — C c et dividendo vis motrix puncti D ad vim puncti E ut C c — 2 D d + E e ad c d; vis puncti E est ad vim elasticam naturalem ut A B ad e d, ergo vis motrix puncti D ad vim elasticam naturalem ut

$\left.\begin{matrix} C c - 2 D d + E e \\ A B \end{matrix}\right\}$ ad $\left\{\begin{matrix} c d \\ e d \end{matrix}\right.$ sive ut C c — 2 D d

+ E e ad $\frac{c d \times d e}{A B}$, ergo alternando est vis motrix puncti D ad C c — 2 D d + E e ut vis elastica naturalis ad $\frac{c d \times d e}{A B}$, ideóque in paulò majori ratione quàm vis elastica ad A B quia tam c d quàm d e paulò minores sunt quàm A B, sed vis motrix puncti D est ad C c — 2 D d in majori ratione quam eadem vis motrix ad C c — 2 D d + E e, ergo vis motrix puncti D est semper ad C c — 2 D d in majori ratione quam vis elastica ad A B, cùmque id verum sit in omnibus punctis et hæc ultima ratio sit constans, ratio vis motricis puncti cujusvis ad spatium a præcedenti puncto descriptum dempto duplo spatii ab ipso hoc puncto descripti, erit semper major ratione constante, non tamen multo, ideò physicè pro constante assumi potest, hinc alternando vires illæ motrices, punctorum successivorum, sunt in ratione indicatâ.

Sed calculum pro illis punctis instituere necesse non est, per analogiam enim ex motu duorum priorum punctorum B et C reliquorum motum statuere, sufficiens videtur.

10. Si, missis cæteris casibus, quæratur intervallum temporis quo velocitas data m, in punctis successivis B, C, generetur, ut et ratio spatiorum A a, B b, C c eo tempore descriptorum; fiat $T V = m$, et utroque ducto in $\frac{a^2}{s}$, erit $\frac{a^2 T V}{s} = \frac{a^2 m}{s}$, dicatur $\frac{a^2 m}{s} = z^2$ et in serie $\frac{a^2 T V}{s}$, ponatur ubique $\frac{m}{z^2}$ loco $\frac{s}{a^2}$, hæc series in hanc formam migrabit $z^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3 a} + \frac{x^4}{4 a^2} + \frac{x^5}{5 a^3} + \frac{x^6}{6 a^4}$, &c.

$\frac{-2 x^4}{2. 3. 4 z^2} - \frac{6 x^5}{3. 4. 5 a z^2} - \frac{46 x^6}{3. 4. 5. 6 a^2 z^2}$, &c.

$\frac{+ 5 x^6}{2. 3. 4. 5. 6 z^4}$, &c.

Juxta analyseos Newtonianæ methodum sumantur omnes termini in quibus differentiæ exponentium x et z minimum efficiunt valorem, fiantque æquales $z^2$ reliqui termini seriei $\frac{a^2 T V}{s}$ negligi possunt, quia per dignitates quantitatis $\frac{x}{a}$ respectu eorum qui assumpti fuerunt multiplicantur; (in hypothesi quæ velocitatem m alicujus momenti assumeret hi termini negligendi non forent, sed in casu præsenti velocitatem m minimam supponere nobis licet cùm de tali tantum in futurum simus acturi) erit ergo $z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{2 x^4}{2. 3. 4 z^2} + \frac{5 x^6}{2. 3. 4. 5. 6 z^4} - \frac{14 x^8}{2.3.4.5.6.7.8 z^6} + \frac{41 x^{10}}{2.5.4.5.6.7.8.9.10 z^8} - \frac{122 x^{12}}{2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12 z^{10}}$, &c. (qui termini continuatâ serie T V inveniuntur) et æquatione per approximationem soluta invenietur $x^2 = 3. 57 z^2 = \frac{3. 57 a^2 m}{s}$.

Jam verò in areâ F T V quæ spatium B b exprimit, loco $\frac{s}{a^2}$ ponatur ut prius $\frac{m}{z^2}$ et assumantur termini in quibus differentia exponentium quantitatum x et z minima evadit, ii sunt $\frac{m x^3}{2 \times 3 z^2} - \frac{2 m x^5}{2. 3. 4. 5 z^4} + \frac{5 m x^7}{2. 3. 4. 5. 6. 7 z^6} - \frac{14 x^8}{2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9 z^7}$ in quibus si valor $x^2 = 3.57 z^2$ substituatur, fiet hæc series $m x \times \left(\frac{3. 57}{2 \times 3} - \frac{2 \times 3.57 \times 3.57}{2. 3. 4. 5} + \frac{5 \times 3.57 \times 3.57 \times 3.57}{2. 3. 4. 5. 6. 7} - \frac{14 \times 3.57 \times 3.57 \times 3.57 \times 3.57}{2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9}\right.$, &c. sive $B b = m x \times .428$.

Eodem modo valor C c invenietur ex hac serie $\frac{m x^5}{2 \times 3. 4. 5 z^4} - \frac{2 m x^7}{3 \times 4. 5. 6. 7 z^6}$ sive substituto valore $x^2$, erit $C c = m x \times \left(\frac{3.57 \times 3.57}{2. 3. 4. 5} - \frac{2 \times 3.57 \times 3.57}{3. 4. 5. 6. 7}\right.$, &c.)

sive $C c = m x \times .07$ sive circiter sexta pars intervalli a puncto B descripti eodem tempore quo acquirit celeritatem m.

Et celeritas a puncto C tunc temporis acquisita erit iisdem substitutionibus factis $m \times (\frac{3.57 \times 3.57}{2.\ 3.\ 4.} - \frac{2 \times 3.57 \times 3.57 \times 3.57}{3.\ 4.\ 5.\ 6}$, &c.) $= m \times .279$, &c. circiter $\frac{1}{4}$ celeritatis m.

11. Quod si eventus quæratur in hypothesi velocitatem m non esse quamminimam; supponatur illa æqualis ipsi s; si quæratur spatium descriptum a puncto B, dum ejus velocitas fit m, fiat series T V = m, et utroque ducto in x, erit x T V = m x, ergo collatâ serie x T V, et F T V habebitur ratio spatiorum percursorum A a et B b, sed illæ series posito $\frac{s}{m} = 1$. sunt

$$x T V = \frac{s x^3}{2 a^2} + \frac{s x^4}{3 a^3} + \frac{s x^5}{6 a^4} + \frac{s x^6}{10 a^5} + \frac{s x^7}{30 a^6}, \text{ \&c.}$$

$$\text{et } F T V = \frac{s x^3}{6 a^2} + \frac{s x^4}{12 a^3} + \frac{s x^5}{30 a^4} + \frac{s x^6}{60 a^5} + \frac{11 s x^7}{2160 a^6}, \text{ \&c.}$$

Ubi liquet quod primus terminus primæ seriei sit triplus primi termini secundæ, reliqui verò termini primæ seriei reliquorum terminorum secundæ seriei plusquam tripli, unde liquet quod A a est magis quam triplum spatii per punctum B descripti usque dum celeritatem m recipiat; ex quo consequitur, quod siquidem B eo momento non est in medio inter puncta A et C, sed vicinius puncto A ad minimum sextâ parte spatii a puncto A descripti ab eo ulterius urgetur et acceleratur, celeritatemque majorem quam m recipit donec ad medium inter A et C perveniat, ibique cum celeritate majore quàm A feratur, versus C magis accedet, sicque vim repulsivam puncti C sentiet, dumque ultra medium inter A et C promovebitur sensim tardabitur, tandem destructo ejus excessu celeritatis supra celeritatem m, cùm sit vicinius puncto C quam puncto A diminuetur ulterius ejus celeritas m, ideóque puncto A vicinius gradatim fiet, in medio inter A et C iterum occurret, sed cum velocitate diminutâ, quare perget vicinius fieri puncto A, sicque ab ipso velocitatis incrementum de novo accipiet, sicque perpetuò oscillabitur punctum B circa medium inter punctum A et punctum C ad morem fibræ sonantis; eâque ratione fit ut particulæ aëris magnâ velocitate pulsæ sonum edant sponte, ut in tonitru, pulvere fulminante, flagellis, tapetibus aut lodicibus fortiter excussis, &c.

Sed ubi m minima fit, punctum B eam celeritatem m acquisivit eo tempore quo parùm abest a medio inter puncta A et C, (per hujus n. 10.) una circiter vicesima spatii a puncto A descripti, ideóque agitationes supra dictas exiguas suscipit quas pro nullis habere physicis licere debet, quamvis mathematicè non omninò nullæ sint.

12. Supposito ut prius velocitatem datam m esse minimam, ut obtineatur intervallum temporis quo punctum C celeritatem eam datam m acquiret sumpto ut prius $z^2 = \frac{a^2 m}{s}$ fiat T X $= m$ et $\frac{a^4 m^2}{s^2}$ T X $= m z^4$ et ponatur ubique in serie T X, $\frac{m}{z^2}$ pro $\frac{s}{a^2}$ fiet $m z^4 = \frac{m x^4}{2.3.4} + \frac{m x^5}{3.4.5}$, &c. sive sumptis terminis in quibus exponentes quantitatum x et z differentiam minimam habent, erit

$$m z^4 = \frac{m x^4}{2.\ 3.\ 4} - \frac{4 m x^6}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6 z^2} + \frac{13 m x^8}{2.3.4.5.6.7.8 z^4} - \frac{40 m x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10 z^6},$$

&c. et æquatione per approximationem solutâ, invenitur $x^2 = 9\frac{2}{3} x^2$. Et seriem F T X ulterius continuando et calculum instituendo ut pro serie F T V factum est, invenitur quod via a puncto A emensa, dum punctum C velocitatem m acquirit, est ad viam quam ipsum punctum C emetitur, ut 100 ad 32 sive fere ut 3 ad 1. Quod quidem paulo majus est vero, quia omissa est consideratio motus puncti D, quod cum discedat a puncto C efficit ut vis B in ipsum C sit fortior, breviorique tempore motum m ipsi impertiatur.

13. Hinc, cùm tempus quo punctum B celeritatem datam m acquisivit sit $z\sqrt{3.57}$ et tempus quo punctum C eam celeritatem acquisivit sit $z\sqrt{9\frac{2}{3}}$, illa tempora sunt ut $\sqrt{3.57}$ ad $\sqrt{9\frac{2}{3}}$ sive ut 19 ad 30 fere 2 ad 3; cùm ergo punctum A uniformiter moveatur, spatium quod punctum A describit dum C acquirit velocitatem m, est ad spatium quod idem punctum A descripserat dum B eamdem velocitatem m acquisiverat, sicut 3 ad 2; spatium verò quod C descripsit dum eam celeritatem acquisivit, est proximè tertia pars spatii eodem tempore ab A descripti, et spatium quod B describit dum eamdem celeritatem m acquirit est fere dimidia pars spatii eo tempore ab A descripti, ergo illa spatia a punctis C et B descripta, donec velocitatem m singula acquirant sunt æqualia.

14. Ex analogiâ verò deducetur quòd spatium quod punctum quartum D describit, dum velocitatem m attingit, erit quarta pars spatii ab A descripti, siquidem spatium a secundo puncto descriptum est dimidia pars spatii ab A descripti, spatium a tertio puncto descriptum tertia pars spatii descripti ab A, &c. Imo eum ordinem accuratius observari in punctis remotioribus statuere licet quod punctum C tertiam partem spatii ab A descripti dum velocitatem m acquirit, accuratius describat quàm B dimidiam partem spatii ab A descripti dum velocitatem m suscipit. Calculum tentare potest qui hac analogiâ rem sufficienter demonstrari non censebit, et B. L. ignoscere rogamus quod talem laborem subire piguerit.

Ex eadem analogiâ (Art. 13.) deducetur, spatia quæ percurrunt successiva puncta D, E, dum velocitatem m acquirunt, æqualia esse iis quæ puncta singula B et C descripserunt.

15. Quibus admissis sequitur diminutionem

intervalli inter particulas medii, cum motu communi cum puncto A feruntur, esse ubicumque eamdem, et æqualem dimidio spatio ab A descripto dum B celeritatem m acquirit.

Nam cùm A bis id dimidium spatium descripserit et B semel dum B communem cum A motum suscipit, contrahitur spatium inter A et B dimidio illo spatio; A processit ter illo dimidio spatio et C semel dum C communem cum B et A motum suscipit, ergo intervallum inter A et C duplo ejus dimidii spatii diminutum est, sed inter A et C duo sunt particularum intervalla A et B, B et C, et primum intervallum est contractum dimidio illo spatio, ergo intervallum inter B et C eodem dimidio intervallo diminutum esse debet, sicque de cæteris.

16. Ideò si quolibet tempore elapso sumatur via tota puncti A, ea via æqualis erit summæ diminutionum intervallorum inter omnes particulas ad quas celeritas m communicata fuit; cùm ergo motus puncti A sit uniformis, uniformiter etiam crescit numerus particularum ad quas celeritas m communicatur; et numerus earum particularum æqualis erit viæ a puncto A percursæ divisæ per diminutionis intervalli unius quantitatem.

17. Manente autem fluido eodem, sed mutatâ celeritate puncti A, tempora quibus puncta successiva medii celeritatem ejus puncti A suscipiunt eadem tamen manent: nam si in formula $x^2 = \frac{3.57\, a^2\, m}{s}$ quâ determinatur quadratum temporis quo punctum B recipit celeritatem puncti A substituantur loco m et s quantitates ipsis æquipollentes, formula hæc fiet quantitas constans (manente elaterio medii et intervallo particularum) quæcumque sit velocitas puncti A; etenim dicatur f vis elastica medii, quoniam, ex hypothesi Problematis hujusce, uniformiter agere censetur tempore quod exprimitur per a ut celeritatem s generet, erit $s = a\,f$; præterea quoniam particularum intervallum BA $\frac{3.57\, a^2\, m}{s} = \frac{3.57\, a^2\, \frac{A\,B}{a}}{a\,f} = \frac{3.57\ A\,B}{f}$ quæ quantitas constantes tantùm continet à celeritate m independentes; hinc, tempus quo punctum B celeritatem puncti A recipit idem est quæcumque sit velocitas puncti A; idem demonstrabitur de tempore quo punctum C eam celeritatem recipit, nam habet (not. 13.) rationem constantem ad tempus quo punctum B eam celeritatem acquirit, est nempe ad id tempus ut 3 ad 2, et sic de cæteris punctis. Q. e. d.

18. Diminutiones intervallorum inter partes medii elastici (manente eodem fluido) sunt ut celeritas puncti A; nam spatium A a percursum a puncto A tempore quo certa quædam particula medii elastici celeritatem m recipit est semper m x, (x designante tempus quo illa particula medii celeritatem m suscipit) sed illud tempus est constans (n. 17. hujusce) quæcumque sit celeritas puncti A, ergo spatium A a est semper ut velocitas m; sed illud spatium A a est summa diminutionum intervallorum inter partes ad quas celeritas m pervenit (n. 16.), singulæ autem diminutiones sunt æquales (n. 15.) ergo singulæ diminutiones sunt ut illud spatium A a, sive ut velocitates.

19. Et vice versâ, numerus partium compressarum quæ dato tempore celeritatem puncti A receperunt est semper idem quæcumque sit puncti A velocitas; nam ille numerus est ut spatium A a divisum per unius partis diminutionem, spatium A a dato tempore est ut celeritas puncti A, diminutio unius partis est etiam ut ea celeritas; ergo numerus partium quæ dato tempore celeritatem puncti A receperunt, est ut celeritas per celeritatem divisa, hoc est, in ratione constanti; unde, in diversis temporibus numerus particularum ad quas celeritas m perveneri, erit directè ut tempus.

20. Quod si particulæ datâ celeritate jam sint dimotæ, et certum gradum compressionis susceperint, postea verò nova velocitas addatur (vel detrahatur) puncto A, novus ille celeritatis gradus eodem tempore ab unâ particulâ ad aliam propagabitur quo prima celeritas propagata fuit, (in hypothesi quod tam velocitas m quàm hæc nova velocitas addititia exiguæ sunt) idque hoc modo demonstrari potest.

Fingatur omnes particulas primâ celeritate motas et compressas in navi positas esse quæ ipsâ particularum earum celeritate feratur, ita ut illæ particulæ in eâ nave respectivè quiescant, urgeatur verò prima pars per excessum novæ celeritatis super primam, communicatio istius excessus celeritatis ad omnes partes in nave positas ut et nova compressio particularum determinabitur ut in præcedenti Problemate, mutatis celeritate, intervallo particularum medii, et ejus elasticitate; si ergo prima celeritas fuerit ut prius m; a tempus quo intervallum particularum A B eâ celeritate percurrebatur, ideóque sit $A\,B = m\,a$, sit ut prius s velocitas genita tempore a per vim elasticam medii in statu naturali considerati et uniformiter agentis, inventum est quod tempus quo punctum B celeritatem m acquisiverat erat $a \sqrt{\frac{3.57\, m}{s}}$ (n. 10.) quo spatium A a interea a puncto A descriptum erat $m\,a \sqrt{\frac{3.57\, m}{s}}$ et spatium B b erat $.428\, m\,a \sqrt{\frac{3.57\, m}{s}}$, ita ut compressio particularum sit $A\,a - B\,b = .572 \times m\,a \sqrt{\frac{3.57\, m}{s}}$, ideóque novum intervallum inter particulas in nave positas erit $m\,a \times \left(1 - .572 \times \sqrt{\frac{3.57\, m}{s}}\right)$; est autem vis elastica prior ad vim elasticam novam inversè ut partium intervalla, sive ut $m\,a \times \left(1 - .572 \sqrt{\frac{3.57\, m}{s}}\right)$ ad $m\,a$, sive ut $1 - .572 \sqrt{\frac{3.57\, m}{s}}$ ad 1. Et, si excessus novæ velocitatis super priorem dicatur n, tempus quo novum intervallum inter particulas describeretur per hanc celeritatem n, est

$\frac{a\,m}{n} \times (1 - .572 \sqrt{\frac{3.57\,m}{s}})$, nam tempus a, quo prius intervallum m a describebatur velocitate m debet esse ad istud tempus directè ut intervalla m a et m a $\times (1 - .572 \sqrt{\frac{3.57\,m}{s}})$ et inversè ut velocitates m et n. Denique, subtangens logarithmicæ quæ designabatur per s in casu priore, est in isto $\frac{m\,s}{n}$, cùm enim designet velocitatem uniformiter genitam ab elaterio, tempore quo intervallum particularum describitur, est directè ut vis elastica et ut tempus, habetur ergo hæc proportio, est

$$\left.\begin{matrix} 1 - .572\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}} \\ a \end{matrix}\right\} \text{ad} \left\{\begin{matrix} 1 \\ \frac{a\,m}{a}.(1 - .572\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}) \end{matrix}\right.$$

ut s ad $\frac{m\,s}{n}$.

In seriebus ergo supra inventis loco m ponatur n; loco a ponatur $\frac{a\,m}{n} \times (1 - .572\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}})$; loco s ponatur $\frac{m\,s}{n}$, et tempus quo punctum B celeritatem n acquirit, invenietur (substituendo hos valores in formula a $\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}$)

$$\frac{a\,m}{n} \times (1 - .572\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}) \times \sqrt{\frac{3.57\,n}{\frac{m\,s}{n}}} = \frac{a\,m}{n} \times$$
$$(1 - .572\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}) \times \sqrt{\frac{3.57\,n\,n\,m}{m\,m\,s}} = a \times$$
$$(1 - .572\sqrt{\frac{3.57\,m}{r}}) \times \sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}.$$

Ideóque tempus a $\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}$ quo in præcedenti casu punctum B acquirebat celeritatem m, est ad tempus quo in hoc casu acquirit celeritatem n, ut 1 ad $1 - .572 \sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}$, sed hæc ratio, existente m quantitate minimâ ut suppositio fert, est fere æqualitatis. Quare nova celeritas, sive excessus novæ celeritatis supra præcedentem, propagabitur ad punctum proximum medii elastici eodem temporis intervallo quo præcedens celeritatis gradus in eo puncto genitus fuerat, ideóque etiam ad puncta successiva iisdem temporibus perveniet.

21. Si per datum aliquod tempus primum punctum A medii elastici constanti celeritate m fuerit motum, postea urgeatur majori celeritate m + n durante æquali tempore, omnes particulæ quæ primam celeritatem m susceperant, altero isto tempore celeritatem novam m + n suscipient, et interea totidem particulæ ulteriores priorem celeritatem m accipient; nam incrementum celeritatis n ad eas omnes particulas a primâ propagari potest dato tempore, ad quas eo ipso tempore celeritas m propagata fuerat (hujusce 20). Interea verò uniformiter propagata fuisset velocitas pristina m ab ultimis particulis quæ eam susceperant ad totidem ulteriores. Si itaque successive post æqualia tempora velocitas crescat, totidem formabuntur portiones medii elastici, æquali numero partium constantes, quæ successivas illas celeritates habebunt, portio proxima puncto A ultimam celeritatem habebit, secunda penultimam, et sic deinceps.

22. Hinc, si medium elasticum urgeatur per successivos velocitatis gradus, imprimi potest ejus partibus velocitas satis magna ut sensibiliter in aures agat nec tamen excitetur in medii elastici partibus sensibilis ea vibratio quæ juxta n. 11. nasceretur si simul et semel tota illa velocitas ipsi imprimeretur; et hinc intelligitur differentia inter aërem sonum generantem, aërem sonum propagantem, et aërem ventum deferentem; si magna velocitas particulæ aëreæ imprimatur, particula ipsi proxima tremores suscipit, fitque punctum sonorum; si velocitas minor excitetur quæ constans maneat nec per gradus augeatur aër uniformiter transfertur et fit ventus; sed si ab exiguâ velocitate ad magnam assurgatur, aëris particulæ successivos illos gradus recipiunt, et quia singula velocitas accepta est exigua tremores sensibiles non excitantur in particulis aëreis, quæ velocitatem illam magnam suscipientes et ad aurem deferentes sensationem soni producunt.

23. Si autem velocitas nova minor sit velocitate præcedente, eodem modo constabit quod decrementum illud velocitatis eodem tempore ad proximum punctum transibit quo præcedens velocitatis gradus ab eo acquisitus fuerat, et ad successiva puncta iisdem etiam temporibus perveniet quibus priorem celeritatem acquisiverant, imo solutio per constructionem Problematis ipsius productâ logarithmicâ ultra punctum F quæri potest, eademque obtinebuntur ac prius.

24. Quibus positis intelligitur effectus vibrationis fibræ flexæ et redeuntis in aërem. *Primus Casus.* Dividatur tempus ejus reditus in partes æquales quam minimas, et durante singulâ temporis parte, fibræ velocitas uniformis manere censeatur. Prima velocitas, ad certum numerum partium dato eo tempore communicabitur qui partium numerus dicatur N; altero instanti secunda velocitas eidem partium numero N communicabitur dum prima velocitas ad totidem particulas ulteriores N perveniet, tertio instanti primus partium numerus N tertiam velocitatem habebit, ulterior numerus N secundam velocitatem, numerus N adhuc ulterior primam; hinc ergo si fibra dimidiam vibrationem absolverit, hoc est ultra statum suum naturalem discesserit quantum potest, erunt in aëre totidem successivæ portiones, quæ particulas numero N continebunt, quot successivæ velocitates erunt genitæ, et particulæ remotissimæ a fibrâ primum celeritatis gradum habebunt, proximæ fibræ ultimum, mediæ verò medium, qui maximus est; diminutiones intervallorum correspondebunt illis celeritatum gradibus, ut sint minimæ tam in particulis a fibrâ remotissimis, quam in particulis ipsi proximis, maximæ in mediis.

Regrediente fibrâ, eadem omnino lex observabitur, nisi quod partes aëris fibræ proximæ retrò movebuntur et compressiones in dilatationes

mutabuntur, dum in portiones ulteriores medii celeritates primo receptæ propagantur, ideóque tota vibratione absolutâ numerus particularum agitatarum duplus erit ejus quem in dimidia vibratione notaveramus, pars dimidia remotior est planè æqualis illi de quâ primo actum est et similiter constituta, pars citerior verò negativam celeritatem obtinebit et dilatationem; ejus citerioris partis portio remotissima a fibrâ primum celeritatis fibræ regredientis gradum habebit, et portio fibræ proxima ultimum (quietem nempe), media portio medium, hoc est retrocedet eâ ipsâ celeritate quâ medium ulterioris partis procedit et dilatationes illis celeritatibus negativis correspondebunt, ideóque in medio illius proximæ portionis maxima erit dilatatio ut et maximus regressus.

*Secundus Casus.* Quod si singula tempuscula, quibus durantibus velocitas fibræ uniformis fingitur, æqualia non sint, eâdem ratione intelligentur effectus fibræ in partes medii, nisi quod portiones medii quæ singulis successivis velocitatis gradibus gaudent non sint æquales, sed (per not. 19.) sint sicut tempora quibus durantibus singulæ illæ velocitates in fibrâ permanserunt.

*Tertius Casus.* Quamvis autem fibræ velocitas nullo tempusculo uniformis maneat sed continuo acceleretur, eodem tamen modo fibra aget in medium ac si reverâ velocitas ejus cresceret per intervalla temporis, et durante tempusculo quam minimo (sed finito) uniformis maneret; idque propterea quod intervalla inter particulas medii sunt finitæ quantitates non verò infinitè parva; nam per notas 4. et 5. nullus motus ex puncto A in punctum B transire potest, nisi punctum A processerit finitâ quantulâcumque quantitate, ideóque, nisi fibra quæ urget punctum A velocitatem finitam in eo generaverit (ut fert hypothesis Problematis not. 9.); pari ratiocinio punctum B non sentiet incrementa velocitatis puncti A, nisi postquam incrementum finitum velocitatis in eo genitum fuerit (not. 5. et 20). Ergo fibra agit in medium quasi singulo tempusculo (æquali vel inæquali) ejus velocitas uniformis perstitisset; intelligitur ergo effectus vibrationis fibræ in aërem per primum et secundum casum hujusce demonstrationis. Q. e. i.

25. Totum autem spatium cujus particulæ commotæ fuerunt durante integrâ fibræ vibratione a Newtono pulsus vocatur, et si vibratione absolutâ fibra quiesceret, semper ulterius propagaretur ille pulsus; nam totus ille pulsus (momento quo absolvitur vibratio) divisus intelligatur in portiones totidem quot temporis intervalla in vibrationis duratione fuerunt assumpta, quæ temporis intervalla facilitatis ergo æqualia supponantur, singula portio medii eam velocitatem habebit quam habuit chorda in momento ipsi respondenti, ultima portio sive remotissima a fibra eam habebit celeritatem quam fibra habuerat primo instanti, penultima portio eam celeritatem habet quam fibra habuit secundo instanti, &c.; sequenti verò tempusculo ultima portio pulsus ad novam portionem sibi æqualem et ulteriorem suam velocitatem propagabit (hujus 21.) dum ipsa suscipiet penultimæ portionis celeritatem, penultima verò portio celeritatem antepenultimæ, &c., postea altero temporis intervallo ad alteram novam portionem ulteriorem prima celeritas propagabitur, et secunda celeritas in primâ portione novi istius pulsus generabitur, sicque deinceps: novus ergo pulsus formabitur plane similis priori æqualiter extensus, æquali celeritate in singulis partibus donatus (semotâ ut dixi consideratione partium circumquâque positarum remque considerando quasi de partibus in linea rectâ positis unicè ageretur).

26. Ipse autem primus pulsus penitus quiescit quando in secundum totus transiit si nulla nova chordæ agitatio succedat, nam celeritas portionis pulsus quæ fibræ proxima est successivè ad sequentes portiones transit dum novus pulsus formatur, sed celeritas ejus portionis fibræ proximæ est ultima fibræ celeritas quæ in hâc hyp. est quies, sed ubi pulsus secundus totus formatus est, celeritas portionis pulsus quæ fibræ proxima erat ad initium secundi pulsus est translata et per omnes partes pulsus primi successivè transiit, ideóque in quiete eas constituit in quâ permanserunt nullâ succedente novâ agitatione.

27. Quòd si chorda novam vibrationem faciat, ut evenit, restituetur primus pulsus æqualis præcedenti qualiscumque sit ejus vibrationis velocitas initialis, nam dividatur totius vibrationis hujusce tempus in totidem partes æquales partibus in quas tempus primæ vibrationis divisum fuerat, quod fieri potest cum vibrationes sint isochronæ, istæ partes temporis æquales erunt iis quæ in præcedenti vibratione assumptæ fuerunt; dato autem tempore numerus particularum compressarum est semper idem qualiscumque sit velocitas (n. 19. hujusce). Ergo siquidem singulo instanti dato totidem partes comprimuntur, totidemque sunt instantia data in vibrationibus isochronis, pulsus ad totidem particulas in quâvis vibratione isochronâ extendetur.

28. Si per velocitatem pulsûs intelligatur (cum Newtono) distantia ad quam pulsus extenditur divisa per tempus quo pulsus ad eam distantiam pervenit, dico pulsus in eodem medio esse omnes æquiveloces quæcumque sit fibræ pulsum producentis vibratio: id jam liquet de vibrationibus isochronis in quibus tempore unius vibrationis ad totidem partes pulsus propagatur, ideóque æquale spatium æquali tempore percurrit, postea verò idem pulsus similiter propagatur, sed id pariter verum est de vibrationibus eterochronis; dividantur enim inæqualia vibrationum tempora in totidem utrinque tempuscula minima quæ totis temporibus sint proportionalia, numerus partium compressarum singulis tempusculis diversis sunt illis tempusculis proportionales (n. 19. hujusce) ideóque totis vibrationum temporibus proportionales, sed in singulâ vibratione totidem tempuscula assumpta sunt, ergo totus numerus partium quæ singulum pulsum constituunt est proportionalis tempori vibrationis. Sed distantia ad quam pervenit pulsus est semper numero partium proportionalis. Ideóque distantia ad quam pervenit pulsus est tempori vibrationis proportionalis, sed velocitas pulsus est distantia ad quam pervenit divisa per tempus quo

ad eam distantiam pervenit, ergo ea velocitas est constans. Ergo in eodem medio omnes pulsus sunt æquiveloces; quod de sono per experimenta verum esse demonstravit Derhamus.

29. Quòd si medium diversum sit, velocitates pulsuum erunt inversè in ratione subduplicatâ densitatis et directè in ratione subduplicatâ vis elasticæ, quippe (n. 17. hujusce) deprehendimus quadratum temporis quo celeritas puncti A transit in punctum B esse $\frac{3.57\ AB}{f}$ designante A B particularum intervallo et f vi elasticâ, et uniformiter procedere motum in pulsu ab unâ particulâ ad sequentem, sumantur ergo totidem partes in utroque medio, tempora quibus motus pulsus a primâ ad ultimam perveniet erit ut $\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{f}}$ (neglectâ quantitate constanti 3.57.) Velocitas verò pulsus est directè ut spatium quod occupant illæ omnes particulæ et inversè ut tempus quibus motus a primâ ad ultimam transit, spatium verò quod occupant illæ particulæ cum sint totidem est ut intervallum A B singulæ particulæ, ideóque est velocitas pulsus ut $\frac{AB}{\sqrt{\frac{AB}{f}}} = \sqrt{\overline{AB}} \times \sqrt{\overline{f}}$. Intervallum particularum est inversè ut densitas medii (rem considerando ut in n. 25. hujusce) ergo velocitas pulsus est inversè in ratione subduplicatâ densitatis medii, et directè in ratione subduplicatâ vis elasticæ (quod Prop. XLVIII. statuit Newtonus).

30. His de toto pulsu dictis, nunc de motu singulæ particulæ pulsûs observandum est, in singulâ particulâ omnes velocitatis successivos gradus quos habuit prima particula A produci, et tantùmdem temporis in eâ particulâ durare, quantùm in ea particula A, hoc cum discrimine quod tardius eos velocitatis gradus suscipiat quam particula A, et quidem eò tardius quò ab ea remotior est; *Primus Casus.* Dividatur, ut prius, vibrationis tempus in tempuscula, et durante uno tempusculo æquabilis manere censeatur velocitas impressa particulæ A, fingamus singulo tempusculo velocitatem ad viginti particulas pervenire, et spectemus speciatim motum quem decema particula a puncto A suscipiet, quæ particula dicatur X, illa particula X motum puncti A non suscipit nisi post novem particulas antecedentes, tum ipsa particula X motum puncti A suspicit et uniformiter cum eo movetur durante reliquo tempusculo, tunc ex hypothesi mutatur celeritas puncti A, interea tamen uniformis manet celeritas puncti X donec nova ea celeritas ad ipsam pervenire potuerit, hoc est postquam successivè pervenit ad particulas novem antecedentes, sed nova hæc celeritas per novem particulas antecedentes particulam X propagatur eodem tempore quo prima celeritas per easdem novem particulas propagata fuerat; ergo prima celeritas tantò diutius permanet in particulâ X quantò tardius eam receperat, ergo ea prima celeritas tamdiù durat in particulâ X quamdiù duraverat in particulâ A; cumque idem de singulis successivis motibus puncti A dici possit, hinc quælibet particula X ipsissimum habet motum ac particula A, nisi quod tardius in eâ incipiat et desinat. Ideóque etiam manifestum est in hoc casu, spatia a particulis A et X descripta æqualia fore et similiter descripta.

*Secundus Casus.* Ponatur nunc quod motus puncti A æquabilis non maneat durante singulo tempusculo, velocitates tamen successivæ puncti X erunt illæ quas in fine singuli tempusculi quam minimi punctum A acquisiverit, ut liquet ex tertio casu notæ 24, ideóque punctum X suscipiet velocitates correspondentes velocitatibus puncti A sumptis per saltus, sed quoniam cùm primùm punctum A spatium finitum descripsit, agere incipit in punctum proximum, saltus illi quamminimi intelligi debent, ideóque physicè nulli, hinc physicè particula X et particula A eosdem motus habebunt.

Pariter describent spatia æqualia et similia; quippe abscissæ curvæ cujusvis repræsentent tempus quo durante punctum A movetur, et ejus ordinatæ repræsentent correspondentes velocitates, et dividatur axis curvæ in partes quamminimas sed finitas, eriganturque ordinatæ, illæ repræsentabunt velocitates æquabiles puncti X initio singuli tempusculi, et parallelogrammata contenta sub ordinata et portione axis respondente repræsentabunt spatia a puncto X descripta, areæ verò mixtilineæ inter easdem ordinatas easdem axis portiones et arcus curvæ comprehensæ repræsentabunt spatia correspondentia a puncto A descripta, sed quando portiones axis sunt quamminimæ, summæ omnium eorum parallelogrammatum et arearum mixtilinearum correspondentium pro æqualibus habentur. Ergo spatia a particulis A et X descripta sunt æqualia et similiter descripta saltem quàm proximè.

31. Ideò uniformiter motus fibræ propagatur trans particulas medii; singulæ verò ejus particulæ successivè motum fibræ suscipiunt et ejus ad instar moventur, sed in fibrâ elasticâ vires sunt semper proportionales distantiæ fibræ a puncto medio motus sui, ut per experimenta constat, et illarum virium actio sensibiliter non turbatur per resistentiam aëris, propter ejus raritatem, nec per ejus elaterium quia hinc inde a fibrâ aër datur qui ferè æqualiter premit, ideò fibra elastica ac per consequens particulæ ipsæ medii moventur secundum legem Prop. XXXVIII. Lib. I. Sed eadem est lex motus penduli in cycloide oscillantis Prop. LI. Lib. I. Ergo *pulsibus per fluidum propagatis singulæ particulæ motu reciproco brevissimo euntes et redeuntes accelerantur semper et retardantur pro lege oscillantis penduli.* Q. e. d.

32. Sumatur tempus quodvis, simulque illud intervallum inter particulas pulsus, quod tale est ut eo tempore assumpto motus fibræ a primâ particulâ ejus intervalli ad ultimam perveniat. Dico, quod tempus illud erit ad totum vibrationis tempus ut illud intervallum ad totius pulsus longitudinem; res est evidentissima ex præcedentibus; nam cùm motus propagetur in pulsu uniformiter qualiscumque sit celeritas, hoc est, cum ad totidem particulas dato tempore perveniat, manifestum est quod sic ut est totum vibra-

*Corol.* Hinc patet quod numerus pulsuum propagatorum idem sit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum pro-

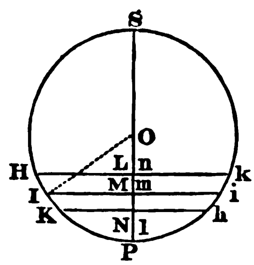
tionis tempus, sive totum tempus quo pulsus formatur ad omnes particulas quæ pulsum constituunt, ita portio quævis ejus temporis ad numerum particularum quæ eâ temporis portione motum receperunt.

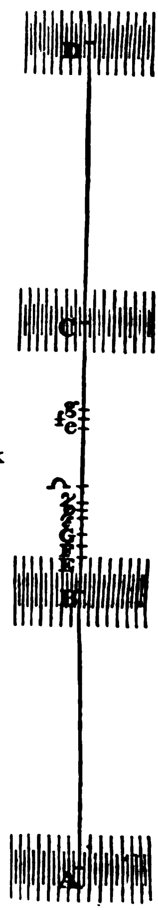
53. Ut melius horum cum Newtonianis nexus pateat, hic adjungere lubet Prop. XLIX. demonstrationem ex XLVII. desumptam, quamvis vix diversa sit ab iis quæ in ipso textu leguntur, et primo quidem, sit P S spatium quod fibra unâ vibratione eundo percurrit, ex ejus medio O ut centro describatur circulus P K S k ejus circumferentia repræsentet totum vibrationis ex itu et reditu compositæ tempus, partes ejus circumferentiæ ut K H repræsentabunt tempora quibus fibra per spatium correspondens N L movebitur; H L, K N repræsentabunt velocitates fibræ in punctis N et L, et H L — K N velocitatum incrementa vel decrementa, actioni elaterii fibræ proportionalia, hæc omnia patent ex Prop. XXXVIII. et LI. Lib. I.

2. Sit B C longitudo pulsus, et dicatur V radius circuli cujus circumferentiæ illa longitudo B C æqualis foret, dico quod vis naturalis elaterii medii erat ad vim acceleratricem fibræ ut V — K N ad H L — K N.

Sint enim duo puncta E et G in suo naturali situ in medio elastico, quæ post aliquod tempus in locis $\iota$ et $\gamma$ occurrant, suscepto nempe motu fibræ secundum leges a nobis expositas, singula seorsim eumdem motum ac fibra habebunt, ideóque si sumptum fuerit $E\iota = PL$ erit P H tempus elapsum a momento quo punctum E motum fibræ suscepit et erit H L ejus velocitas in $\iota$, pariter sit $G\gamma = PN$ erit P K tempus elapsum a momento quo G motum fibræ suscepit, et erit K N ejus velocitas in $\gamma$, sint verò E et G puncta proxima; compressio spatii E G ubi in $\iota\gamma$ pervenit oritur ex eo quod plus processit $\iota$ quam $\gamma$, itaque diminutio ejus spatii erit æqualis spatio L N, ideóque $\iota\gamma$ erit æqualis E G — L N, utque vires quibus urgentur puncta medii, eorum densitati est proportionalis, vis tota quâ urgetur punctum $\gamma$ est ad eam quâ urgebatur punctum G (quæ erat vis naturalis elaterii) inversè ut spatium $\iota\gamma$ ad E G seu ut $\frac{1}{EG - LN}$ ad $\frac{1}{EG}$. Sed est L N ad K H ut I M ad radium P O, et cum K H designet intervallum temporis quo pulsus a puncto E ad punctum G pervenit, est (per n. 32.) K H ad E G ut tota circumferentia P K S k ad B C, sive ut P O ad V; ergo ex æquo est L N ad E G ut I M ad V et convertendo E G — L N ad E G ut V — I M ad V ideóque $\frac{1}{EG - LN} : \frac{1}{EG} = \frac{1}{V - IM} : \frac{1}{V}$ ac per consequens vis tota quâ urgetur punctum $\gamma$ est ad vim naturalem elaterii ut $\frac{1}{V - IM}$ ad $\frac{1}{V}$.

Vis illa tota quâ urgetur punctum $\gamma$ est vis naturalis elaterii medii cui superaddita est tota vis motrix fibræ quæ ad id punctum pervenit, ergo dividendo et reducendo ad communem denominatorem, vis motrix fibræ in puncto N, est ad vim naturalem elaterii ut I M ad V — I M, sive invertendo, vis naturalis elaterii ad vim totam motricem fibræ in puncto N ut V — I M ad I M, vel quia I M et K N pro se mutuo sumi possunt ubi puncta N et L sunt proxima est vis naturalis elaterii ad vim totam motricem fibræ ut V — K N ad K N; sed vis tota motrix fibræ est ad vim ejus acceleratricem durante tempusculo K H ut K N ad



H L — K N, ergo ex æquo, est vis naturalis elaterii ad vim acceleratricem fibræ ut V — K N ad H L — K N. Q. e. d.

3. In ipso motûs fibræ initio, vis elaterii fluidi in statu suo naturali est ad vim acceleratricem fibræ ut V ad H K; nam ipso motus initio si P H sit infinitè parvum, ac per consequens etiam $E\iota$ infinitè parvum nullus adhuc motus ad particulam proximam G communicatur (per n. 4.) ergo omninò evanescit K N ideóque V — K N = V, et H L — K N = H L sed arcus infinitè parvus et ejus sinus æquantur, ergo H L = H K; ergo vis elaterii fluidi in statu naturali est ad vim acceleratricem fibræ ipso ejus motus initio ut V ad H K.

Ex quibus fluit demonstratio Prop. XLIX. Q. e. i.

gressu. Nam lineola physica $\iota\gamma$, quamprimum ad locum suum primum redierit, (n) quiescet; neque deinceps movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulsuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quiescet igitur quamprimum pulsus a corpore tremulo propagari desinunt.

## PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

*Pulsuum in fluido elastico propagatorum velocitates sunt in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione vis elasticæ directè et subduplicatâ ratione densitatis inversè; si modo fluidi vis elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur.*

*Cas.* 1. Si media sint homogenea, et pulsuum distantiæ in his mediis æquentur inter se, sed motus in uno medio intensior sit: contractiones et dilatationes partium analogarum (o) erunt ut iidem motus. Accurata qui-

(n) * *Quiescet; neque deinceps movebitur.* Quamprimùm lineola physica $\iota\gamma$ ad locum suum primum redierit, ipsius velocitas quam ordinata, m i, semper exponit (Prop. XXXVIII. Lib. I.) extinguetur; et ejusdem lineolæ densitas visque elastica eadem erit cum densitate et vi elasticâ partis E G medii quiescentis; ideóque quiescet, &c. * Id liquet ex n. 20. additionis nostræ de Motibus in Fluido Elastico Genitis.

316. Ex his intelligitur quomodò per vibrationes isochronas corporis resonantis producantur in aëre pulsus quibus ad aurem appulsis, fit in nobis perceptio soni, et cur soni, cessante motu tremulo corporis sonori, statim cessent. Liquet etiam tonos a numero pulsuum qui in aëre tempore dato excitantur, pendere, cùm (per Cor. Prop. hujus) numerus pulsuum æqualis sit numero vibrationum ex itu et reditu compositarum quas chorda musica peragit, et ab isto numero tonorum diversitas oriatur (308).

317. Patet etiam quomodo aëris pulsus sonum et tremores in aliis corporibus unisonis aut consonantibus creare possint. Nam cùm aëris pulsus in nervum musicum incurrit qui vibrationem unam ex itu et reditu compositam absolvere aptus sit, eo tempore quo pulsus suam percurrit latitudinem, commovetur nervus et oscillatur per exiguum licet spatium, et recurrentibus novis atque conspirantibus aëris pulsibus celeriùs agitatur sonumque reddit. At si nervus vibrationes suas integras seu ex itu et reditu compositas perficere nequeat quo tempore pulsus aëris latitudinem suam describit, possit tamen in partes aliquotas hujusmodi vibrationibus peragendis aptas dividi; partes illæ, quiescentibus divisionum punctis, congruenter ad pulsuum recursum sensim agitabuntur, vibrationesque suas cum pulsibus unisonas singulæ perficient. Si verò nervi duo proximì in eas partes aliquotas dividi possint quæ sint inter se ad unisonum, aut quod idem est, quæ vibrationes isochronas peragant, et horum nervorum unus pulsetur sonumque edat, nervi duo sese in partes suas aliquotas veluti divident ut ad unisonum reducantur. Ut si ejusdem nervi capiantur partes duæ quarum sit ratio 2 ad 3 et æqualiter tendantur, alteraque pars pulsetur, dividetur minor nervus in partes duas, et major in partes tres æquales quæ singulæ seorsim oscillabuntur. Nam brevior nervus duarum nempe partium, ter oscillando dum nervus longior partium trium, duas oscillationes absolvit (306) frequentiores in aëre pulsus excitat quorum recursu nervus longior citiùs quàm par est agitatur; et cum utriusque nervi aërisque motus congruere non possint nisi singulæ nervorum partes aliquotæ et æquales seorsim oscillentur, motus ille conspirans tam in nervis quàm in aëre tandem producitur. Et hæc quidem in experimentis musicis ità contingere observarunt Joan. Wallis Operum in fol. Tom. II. pag. 466. Et deinde Acusticæ instaurator D. Sauveur in Monum. Acad. Paris. an. 1701. ubi alia experimenta refert quæ ex prædictis facile possunt explicari; * et inde ingeniosissimi systematis de tonorum productione et harmoniâ fundamenta derivavit ill. de Mairan omni laude superior, quod ad praxim felicissimè revocavit vir inter eruditos Orpheos illustrissimus D. Rameau.

(o) * *Erunt ut iidem motus.* Motus enim illi sunt vel causæ vel effectus contractionis et dilatationis partium in pulsibus correspondentium. Hæc tamen proportio accurata non est, si contractiones et dilatationes sint valde intensæ, quemadmodum si chorda musica nimiâ vi pulsetur, vis motrix particularum ejus non est amplius proportionalis spatiis per quæ debet moveri, et

dem non est hæc proportio. Verumtamen nisi contractiones et dilatationes sint valde intensæ, non errabit sensibiliter, ideóque pro physicè accuratâ haberi potest. (p) Sunt autem vires elasticæ motrices ut contractiones et dilatationes; et velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires. Ideóque æquales et correspondentes pulsuum correspondentium partes itus et reditus suos per spatia contractionibus et dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia, simul peragent: et propterea pulsus, qui tempore itûs et reditûs unius latitudinem suam progrediendo conficiunt, et in loca pulsuum proximè præcedentium semper succedunt, ob æqualitatem distantiarum, æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.

*Cas.* 2. Sin pulsuum distantiæ seu longitudines sint majores in uno medio quàm in altero; (q) ponamus quod partes correspondentes spatia latitudinibus pulsuum proportionalia singulis vicibus eundo et redeundo describant: et (r) æquales erunt earum contractiones et dilatationes. Ideóque si media sint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ elasticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda est ut pulsuum latitudo; et in eâdem ratione est spatium per quod singulis vicibus eundo et redeundo moveri debent. (s) Estque tempus itûs et reditûs unius in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ materiæ et ratione subduplicatâ spatii, atque ideò ut spatium. Pulsus

aëris densitas vi ipsius elasticæ proportionalis non manet, si nimiâ vi comprimatur vel dilatetur aër. * Singulæ diminutiones intervallorum sunt ut velocitates (n. 19.) non tamen ex eo sequitur contractiones esse ut velocitates, (hunc verò casum et reliquos demonstravimus n. 29. additionis de Mot. Fluid. Elast.)

(p) * *Sunt autem vires elasticæ motrices.* Nam vires elasticæ motrices sunt ut partium analogarum densitates, hoc est, datâ materiæ quantitate, ut contractiones; et contractiones sunt ut dilatationes quæ viribus elasticis medii contracti producuntur; *et velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires* (13. Lib. I.), hoc est, ut contractiones et dilatationes, *ideóque* cum spatia simul descripta sint ut velocitates simul genitæ, *æquales et correspondentes pulsuum correspondentium partes itus et reditus suos*, seu motus suos *per spatia contractionibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia simul peragent; et propterea pulsus qui tempore itûs et reditûs latitudinem suam progrediendo conficiunt* (314.) *et in loca pulsuum proximè præcedentium semper succedunt, ob æqualitatem distantiarum* æqualibus temporibus *descriptarum æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.*

(q) *Ponamus quod partes correspondentes.* Quoniam (per Cas. 1.) in eodem medio homogeneo et datâ pulsuum latitudine spatium quod partes medii oscillando describunt, manente tempore oscillationis, minui potest in datâ ratione; nihil obstat quominùs in hoc secundo casu supponatur quod partes mediorum correspondentes spatia latitudinibus pulsuum proportionalia, iisdem manentibus oscillationum in unoquoque medio temporibus, eundo et redeundo percurrant.

(r) * *Æquales erunt.* Si media sint homogenea, uti in hoc secundo casu supponitur, vires elasticæ motrices sunt ut partium correspondentium contractiones et dilatationes quas producunt, sed quia quantitates materiæ in partibus correspondentibus sunt ut pulsuum latitudines, seu ut partium analogarum volumina, et partes illæ analogæ eundo et redeundo dilatantur et contrahuntur per spatia quantitatibus materiæ proportionalia (per Hyp.) contractiones et dilatationes ideóque vires elasticæ motrices æquales erunt.

(s) * *Estque tempus itûs et reditûs.* Nam tempus quo materia viribus æqualibus ad legem oscillantis penduli agitatur, est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione materiæ et subduplicatâ ratione spatii (per Cor. 5. Prop. XXIV. Lib. II.)

autem temporibus itûs et reditûs unius eundo latitudines suas conficiunt, hoc est, spatia temporibus proportionalia percurrunt; et propterea sunt æquiveloces.

*Cas.* 3. In mediis igitur densitate et vi elasticâ paribus, pulsus omnes sunt æquiveloces. Quod si medii vel densitas vel vis elastica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis elasticæ, et materia movenda in ratione densitatis augetur; (t) tempus, quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in subduplicatâ ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicatâ ratione vis elasticæ. Et propterea velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis medii inversè et ratione subduplicatâ vis elasticæ directè. Q. e. d.

Hæc Propositio ulterius patebit ex constructione sequenti.

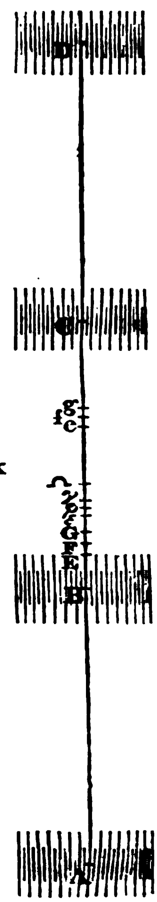
## PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

*Datis medii densitate et vi elasticâ, invenire velocitatem pulsuum.*

Fingamus medium ab incumbente pondere pro more aëris nostri comprimi; sitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, et cujus densitas eadem sit cum densitate medii compressi, in quo pulsus propagantur. Constitui autem intelligatur pendulum, cujus

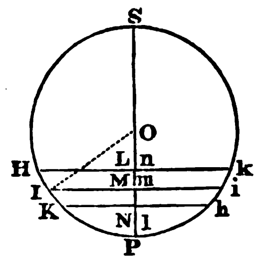
(t) *Tempus, quo motus iidem peragantur,* &c. Tempus quo motus per æqualia spatia peraguntur est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione materiæ movendæ directè et subduplicatâ ratione vis motricis inversè (per Cor. 5. Prop. XXIV.) ideóque in hoc tertio casu, tempus, manente spatio descripto, augebitur in subduplicatâ ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicatâ ratione vis elasticæ, et propterea velocitas quæ est ut spatium directè et tempus inversè, (ob datum spatium per Hyp.) erit in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis medii inversè, et ratione subduplicatâ vis elasticæ directè; sed datis medii densitate et vi elasticâ, velocitas pulsuum, utcumque varietur spatium, data est, (per Cas. 1. et 2.) ergò velocitas pulsuum erit semper in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis medii inversè et ratione subduplicatâ vis elasticæ directè.

318. Ex hâc Propositione patet cur soni omnis generis, gravis et acutus, intensus et remissus, pari velocitate in eodem aëre propagentur. Nam sonorum diversitas, quoad *grave* et *acutum*, a numero pulsuum qui in aëre tempore dato excitantur, pendet (316); at (per hanc Prop.) pulsus aëris, seu plures seu pauciores dato tempore producantur, eâdem semper velocitate diffunduntur et dato tempore datum spatium conficiunt: soni verò in eodem aëre producti eo intensiores sunt, manente tono, quo majus est spatium quod aëris particulæ eundo et redeundo describunt dato tempore; ut si chorda musica validius pulsetur, majores vibrationes dato tempore peragit, majoresque oscillationes particularum aëris excitat, et sonus intensior percipitur, licet tonus idem maneat et proindè pulsuum latitudo ac velocitas non mutentur. Cùm ergo tanta sit velocitas lucis ut per atmosphæram in instanti quoad sensum propagetur (per schol. ad Prop. XCVI. Lib. I.); si sonus et lux eodem puncto temporis excitentur, uti in machinis bellicis flamma et fragor producuntur simul, et spectator spatium quo a corpore resonante distat, tempusque quod inter luminis et soni perceptiones intercedit, dimediatur, soni velocitas innotescet. Atque eo modo in variis regionibus varia observata est velocitas soni, et in Angliâ eâ celeritate ferri, Flamstedio et Halleyo visum est, quâ pedes Londinenses plus minus 1142, Parisienses verò 1070, tempore minuti unius secundi percurreret. Quia verò densitas et vis elastica aëris in variis Terrarum locis, diversisque anni tempestatibus in eodem loco mutantur, inde quoque mutari oportet soni velocitatem. Diu creditum est, observantibus Mersenno, Gassendo, et Academicis Florentinis, sonum neque



longitudo inter punctum suspensionis et centrum oscillationis sit A: et quo tempore pendulum illud oscillationem integram ex itu et reditu compositam peragit, eodem pulsus eundo conficiet spatium circumferentiæ circuli radio A descripti æquale.

Nam stantibus quæ in Propositione XLVII. constructa sunt, si linea quævis physica E F, singulis vibrationibus describendo spatium P S, urgeatur in extremis itus et reditus cujusque locis P et S, a vi elasticâ (u) quæ ipsius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes singulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini P S æqualis est, oscillari posset: id adeò quia vires æquales æqualia corpuscula per æqualia spatia simul impellent. Quare cùm oscillationum tempora (x) sint in subduplicatâ ratione longitudinis pendulorum, (y) et longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oscillationis penduli, cujus longitudo est A, in subduplicatâ ratione longitudinis $\frac{1}{2}$ P S seu P O ad longitudinem A. Sed vis elastica, quâ lineola physica E G, in locis suis extremis P, S existens, urgetur, erat (in demonstratione Propositionis XLVII.) (z) ad ejus vim totam elasticam ut H L — K N ad V, hoc est (cum punctum K jam incidat in P) (a) ut H K ad V: (b) et vis illa tota, hoc est pondus incumbens, quo lineola E G comprimitur, est ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A (c) ad lineolæ longitudinem E G; ideóque ex æquo, vis




conspirante vento accelerari, neque adverso retardari; sed D. Derham experimentis accuratè institutis, falsum id esse asserit.

(u) * *Quæ ipsius ponderi æquetur*, et quæ decrescat ut ipsius distantia a centro O; peraget hæc vibrationes singulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini P S æqualis est, oscillari posset; quia particulæ E F in hujusmodi cycloide oscillantis vis motrix est semper ut distantia ipsius a puncto cycloidis infimo seu medio, et in altissimis seu extremis punctis cycloidis ponderi ipsius æquatur, per Cor. Prop. LI. Lib. I.

(x) * *Sint in subduplicata ratione longitudinis pendulorum* (472. Lib. I.)

(y) * *Et longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius*, per Cor. Prop. L. et Cor. 2. Prop. LII. Lib. I.

(z) * *Ad ejus vim totam elasticam* in loco E G ubi medium quiescit, ut, &c.

(a) * *Ut H K ad V.* Cùm punctum K incidit in P, evanescit K N et fit H L — K N = H L = H K, per Cor. 1. Lem. VII. Lib. I.

(b) * *Et vis illa tota, hoc est, pondus incumbens, quo*, &c. Vis elastica tota partis E G est in æquilibrio cum pondere comprimente, ubi medium quiescit.

(c) * *Ad lineolæ longitudinem E G.* Cùm enim medium homogeneum, cujus altitudo est A, sit (per Hyp.) ejusdem densitatis cum medii parte E G, pondera sunt ut volumina, hoc est, ut lineæ A et E G.

quâ lineola E G in locis suis P et S urgetur, est ad lineolæ illius pondus ut H K × A ad V × E G, sive ut P O × A ad V V, (d) nam H K erat ad E G ut P O ad V. Quare cùm tempora, quibus æqualia corpora per æqualia spatia impelluntur, sint (e) reciprocè in subduplicatâ ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illâ elasticâ, ad tempus vibrationis, urgente vi ponderis, in subduplicata ratione V V ad P O × A, (f) atque ideò ad tempus oscillationis penduli cujus longitudo est A in subduplicatâ ratione V V ad P O × A, et subduplicatâ ratione P O ad A conjunctim; id est, in ratione integrâ V ad A. Sed tempore vibrationis unius ex itu et reditu compositæ, pulsus progrediendo conficit latitudinem suam B C. Ergo tempus, quo pulsus percurrit spatium B C, (g) est ad tempus oscillationis unius ex itu et reditu compositæ, ut V ad A, (h) id est, ut B C ad circumferentiam circuli cujus radius est A. Tempus autem, quo pulsus percurret spatium B C, est ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, (k) in eâdem ratione; ideóque tempore talis oscillationis pulsus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. Q. e. d.

*Corol.* 1. Velocitas pulsuum ea est, quam acquirunt gravia æqualiter accelerato motu cadendo, et casu suo describendo dimidium altitudinis A. Nam tempore casus hujus, cum velocitate cadendo acquisitâ, pulsus percurret spatium (l) quod erit æquale toti altitudini A; ideóque tempore oscillationis unius ex itu et reditu compositæ percurret spatium æquale circumferentiæ circuli radio A descripti: (m) est enim tempus casûs ad tempus oscillationis ut radius circuli ad ejusdem circumferentiam.

(d) * *Nam H K erat ad E G ut P O ad V*, in dem. Prop. XLVII.

(e) * *Sint reciprocè in subduplicatâ ratione virium.* Patet per Cor. 3. Prop. XXIV. Lib. hujus.

(f) * *Atque ideò ad tempus*, &c. Patet per compositionem rationum et ex æquo; quia (ex demonstratis) tempus unius vibrationis particulæ E F, urgente vi ponderis ipsius, est ad tempus oscillationis penduli cujus longitudo est A, in subduplicatâ ratione P O ad A.

(g) * *Est ad tempus oscillationis unius ex itu et reditu compositæ*, penduli cujus longitudo est A.

(h) * *Id est, ut B C ad circumferentiam circuli cujus radius est A.* Nam (in demonstr. Prop. XLVII.) erat V radius circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo B C; unde est V ad A ut B C ad circumferentiam circuli cujus radius est A.

(k) * *In eâdem ratione.* Quoniam tempus quo pulsus percurrit spatium B C, est ad tempus datum oscillationis integræ penduli cujus longitudo A, datis medii densitate et vi elasticâ datâ, est ut spatium B C ad datam peripheriam circuli radio A descripti; liquet, quod tempus, quo pulsus percurrit spatium B C, aut eadem celeritate percurreret datam peripheriam circuli radio A descripti, fore eis spatiis proportionalem. Quare tempus quo pulsus percurrit spatium B C, est ad tempus oscillationis unius ex itu et reditu compositæ penduli cujus longitudo est A, ut tempus quo pulsus percurrit idem spatium B C, ad tempus quo percurrit longitudinem æqualem circumferentiæ circuli cujus radius est A; ideóque tempore talis oscillationis pulsus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem.

(l) * *Quod erit æquale toti altitudini A* (30. Lib. I.)

(m) * *Est enim tempus casûs*, per dimidiam altitudinem A ad tempus oscillationis unius ex solo itu, vel solo reditu constantis, ut diameter circuli ad ejus circumferentiam (470. Lib. I.), ideóque ad tempus duplum oscillationis unius ex itu et reditu compositæ, ut radius circuli ad ejus

*Corol.* 2. Unde cum altitudo illa A sit ut fluidi vis elastica directè et densitas ejusdem inversè; ([n]) velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione densitatis inversè et subduplicatâ ratione vis elasticæ directè.

## PROPOSITIO L. PROBLEMA XII.

*Invenire pulsuum distantias.*

Corporis, cujus tremore pulsus excitantur, inveniatur numerus vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur spatium quod pulsus eodem tempore percurrere possit, et pars inventa ([o]) erit pulsus unius latitudo. Q. e. i.

### *Scholium.*

Spectant Propositiones novissimæ ad motum lucis et sonorum. ([p]) Lux enim cùm propagetur secundum lineas rectas, in actione solâ (per Prop.

circumferentiam. Quare cùm velocitates uniformes sint ut spatia eodem tempore descripta, pulsus verò propriâ velocitate æquabili peripheriam circuli radio A descripti tempore oscillationis unius ex itu et reditu compositæ percurrat, et grave cum uniformi velocitate, quam acquirere potest cadendo per dimidiam altitudinem A, eodem tempore idem spatium describat; patet velocitates illas pulsus et gravis esse æquales.

([n]) * *Velocitas pulsuum erit,* &c. Velocitas pulsuum, ut pote æqualis (per Cor. 1.) velocitati quam gravia per dimidiam altitudinem A cadendo acquirunt, est in ratione subduplicatâ altitudinis illius A (28. Lib. I.); sed altitudo A medii homogenei, cujus densitas eadem est cum densitate medii E G et pondus in æquilibrio cum ejusdem medii E G vi elasticâ, manente densitate est ut pondus seu ut vis elastica directè, et manente vi elasticâ seu pondere est ut densitas inversè, quia densitas est semper ut pondus directè et volumen seu altitudo A inversè; et propterea conjunctis his rationibus altitudo A est semper in ratione compositâ ex ratione vis elasticæ directè et ratione densitatis inversè. Quare velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione densitatis inversè et subduplicatâ ratione vis elasticæ directè.

([o]) * *Erit pulsus unius latitudo.* Quoniam pulsus omnes uniformi cum velocitate propagantur (ex dem. Prop. XLVIII. et XLIX.) et tot pulsus æquales producuntur in aëre, quot sunt corporis tremuli vibrationes isochronæ ex itu et reditu compositæ (per Cor. Prop. XLVII.); si spatium quod pulsus seu sonus dato tempore percurrere possit, per numerum vibrationum, quas corpus sonorum eodem tempore perficit, dividatur, quotus erit pulsûs unius latitudo. Sed dato sono, numerus vibrationum quas corpus sonorum dato tempore peragit, invenitur (per formulas 303, 304); si nimirum chorda musica ad unisonum vel ad notam consonantiam cum sono dato reducatur. Cùm enim tonorum differentia a numero vibrationum quas corpus resonum dato tempore absolvit, pendeat (308 et 312); iidem toni eodem vibrationum isochronarum numero producuntur. Notum verò est spatium quod sonus dato tempore describit (318).

Exempli causâ, si sonus omnium acutissimus, quem possimus distinguere, vibrationibus integris 6400 tempore minuti unius secundi absolutis producatur, et omnium gravissimus vibrationibus $12\frac{1}{2}$ excitetur, uti D. Sauveur in Historia Acad. Scient. Paris. an. 1700. arbitratus est; divide spatium 1142. pedum Londinensium, quod sonus tempore minuti unius secundi conficit, per numeros 6400. et $12\frac{1}{2}$ successivè, et quoti, videlicet digiti 2, 14, et pedes 91, 36, erunt latitudines pulsuum, quibus soni acutissimus et gravissimus producuntur.

([p]) * *Lux enim cùm propagetur secundùm lineas rectas,* et interpositis corporibus opacis intercipiatur, in actione solâ, seu pressione, motuve per medium quodlibet fluidum propagato, consistere nequit; quia pressio et motus per medium omne fluidum propagata divergunt a recto tramite in spatia immota et pone obstacula circumquaque diffunduntur, per Prop. citatas. Cùm igitur lumen sit corpus, ut pote motu progressivo præditum, ab obstaculis reflexum et refractum,

XLI. et XLII.) consistere nequit. Soni verò propterea quod a corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quam aëris pulsus propagati per Prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modo vehementes sint et graves, quales sunt soni tympanorum. ([q]) Nam tremores celeriores et breviores difficilius excitantur. Sed et sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cùm pondera specifica aquæ pluvialis et argenti vivi sint ad invicem ut 1 ad 13$\frac{2}{3}$ circiter, et ubi mercurius in barometro altitudinem attingit digitorum Anglicorum 30, pondus specificum aëris et aquæ pluvialis sint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: ([r]) erunt pondera specifica aëris et argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi sit 30 digitorum, altitudo aëris uniformis, cujus pondus aërem nostrum subjectum comprimere posset, erit 356700 digitorum, seu pedum Anglicorum 29725. Estque hæc altitudo illa ipsa quam in constructione superioris Problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum descripti ([s]) circumferentia est pedum 186768. Et cùm pendulum digitos 39$\frac{1}{5}$ longum oscillationem ex itu et reditu compositam tempore minutorum duorum secundorum, uti notum est, ([t]) absolvat; pendulum pedes 29725 seu digitos 356700 longum ([u]) oscillationem consimilem tempore minutorum secundorum 190$\frac{3}{4}$ absolvere debebit. Eo igitur tempore sonus progrediendo ([x]) conficiet pedes 186768, ideóque tempore minuti unius secundi pedes 979.

motumque in corporibus quæ inflammat excitans, necesse esse videtur ut a corporibus luminosis tenuissima corpuscula incredibili fere velocitate quaquaversum emittantur. Spatia igitur cœlestia, quæ astrorum omnium lux immensâ illâ celeritate permeat, materiâ quâdam æthereâ densissimâ, quæ radiorum lucis motum interciperet, plena esse non possunt.

([q]) 319. * *Nam tremores celeriores et breviores difficilius excitantur.* Corpora enim majora et minus elastica majoribus soni gravioris, cum quo consonare possunt, vibrationibus facilius concutiuntur et congruenter ad pulsuum motum agitantur; nam debet esse proportio quædam inter pulsuum aëris latitudinem et corporum circumjectorum magnitudinem, densitatem et vim elasticam, ut sonus iis communicetur; et quo fibræ breviores sunt, tenuiores et magis tensæ, eo facilius acuto sono seu brevioribus aëris pulsibus agitantur et contremunt. Quæ omnia patent per notam 317.

([r]) * *Erunt*, ex æquo et per compositionem rationum, pondera specifica sive densitates aëris et argenti vivi ut 1 ad 11890. Sed fluidorum in se homogeneorum, eidem basi incumbentium, et in æquilibrio consistentium altitudines sunt inversè ut densitates (173. Lib. II.): est igitur 1 ad 11890 ut 30 digit. ad altitudinem aëris uniformis qui cum 30 digitis argenti vivi æquiponderat; et ideò altitudo hæc est digitorum 356700, seu, dividendo per 12, pedum Anglicorum 29725.

([s]) * *Circumferentia est pedum* 186768. Est enim radius ad circumferentiam ut 113 ad 710, sive ut 29725 ad 186768 quàm proximè.

([t]) * *Absolvat.* Pendulum cujus longitudo est pedum Parisiensium 3 et linearum 8$\frac{1}{2}$, oscillationem unam ex itu et reditu compositam tempore minutorum duorum secundorum absolvit (471. Lib. I.); et pes Londinensis est ad pedem Parisiensem ut 15 ad 16 quam proximè, et ita sunt pedes 3 cum lineis 8$\frac{1}{2}$ ad digitos 39$\frac{1}{6}$, vel 39$\frac{1}{5}$ quam proximè.

([u]) * *Oscillationem consimilem tempore*, &c. Oscillationum tempora sunt in subduplicatâ ratione longitudinis pendulorum (472. Lib. I.), et propterea ut 39$\frac{1}{5}$ ad 356700, ita 4 ad quadratum numeri minutorum secundorum, qui quæritur, et peracto calculo invenitur esse 190$\frac{3}{4}$ quam proximè.

([x]) * *Conficiet pedes*, &c. Per Prop. XLIX.

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio crassitudinis solidarum particularum aëris, per quam sonus utique ([y]) propagatur in instanti. Cùm pondus aëris sit ad pondus aquæ ut 1 ad 870, et sales sint fere duplo densiores quàm aqua; si particulæ aëris ponantur esse ejusdem circiter densitatis cum particulis vel aquæ vel salium, et raritas aëris oriatur ab intervallis particularum: ([z]) diameter particulæ aëris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, et ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979, quos sonus tempore minuti unius secundi juxta calculum superiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{979}{9}$ seu 109 circiter, ob crassitudinem particularum aëris: et sic sonus tempore minuti unius secundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde quod vapores in aëre latentes, cùm sint alterius elateris et alterius toni, ([a]) vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo soni propagantur. His autem quiescentibus, motus ille celerius propa-

([y]) * *Propagatur in instanti.* Nam corpus solidum quod condensari non potest, dum movetur, totum simul movetur, et ideò motus ab uno corporis illius extremo ad alterum extremum propagatur in instanti.

([z]) * *Diameter particulæ aëris erit*, &c. Fingantur cubi duo æquales, quorum alter aëre plenus sit, alter medio continuo ejusdem circiter densitatis cum aquâ vel salibus. Hoc medium continuum divisum sit in particulas æquales, tenuissimas et sese mutuo contingentes; aër verò ex hujusmodi particulis, quæ æqualibus intervallis distinctæ sint, constet. Harum particularum diameter dicatur D, spatium inter illas in aëre interceptum S, et ideò intervallum inter centra particularum aëris $S + D$, numerus particularum aëris in uno cubi latere N, et proinde earum numerus in cubo toto aëreo $N^3$, et latus cubi $N S + N D$. Sit M numerus particularum alterius medii continui in uno latere cubi, et propterea $M^3$ earum numerus in cubo toto, ac $M D$ cubi latus. Quia duo cubi æquales supponuntur, erit $N S + N D = M D$. Si densitas aëris sit ad densitatem alterius medii continui ut 1 ad A; quia paribus voluminibus, densitates sunt ut quantitates materiæ, quæ sunt ut numeri particularum magnitudine et densitate æqualium, erit $1 : A = N^3 : M^3$, et hinc $1 : A^{\frac{1}{3}} = N : M$, ideóque $M = N A^{\frac{1}{3}}$. Quare cùm sit $N S + N D = M D = N D A^{\frac{1}{3}}$, erit $S + D = D A^{\frac{1}{3}}$, et $S = D \times [A^{\frac{1}{3}} - 1]$, ideóque $D : S = 1 : A^{\frac{1}{3}} - 1$ ac $D : S + D = 1 : A^{\frac{1}{3}}$. Jam si ponatur A fere æqualis numero 870, erit fere $A^{\frac{1}{3}} = 9$; si verò ponatur $A = 1000$, vel $A = 1100$, vel $A = 1200$, erit fere $A^{\frac{1}{3}} = 10$; unde diameter D solidæ particulæ aëris erit ad intervallum $S + D$ inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, et ad intervallum S inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde spatium totum quod particulæ solidæ in lineâ rectâ datâ positæ occupant, erit ad spatium reliquum quod intervalla particularum in eâdem lineâ tenent, ut 1 ad 8 vel 9 circiter, et ad totam lineam ut 1 ad 9 vel 10. Sed si nulla habeatur ratio crassitudinis solidarum particularum aëris, sonus lineam rectam pedes 979 longam tempore minuti unius secundi describit: quare cùm sonus per spatium totum quod solidæ particulæ aëris occupant, in instanti propagetur, et sit 9 ad 1 ut linea pedes 979 longa ad ipsius partem quam particulæ solidæ aëris occupant, partem illam, quæ est $\frac{979}{9}$, seu 109 pedum circiter, addere licet spatio 979 pedum.

([a]) * *Vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo soni propagantur.* Nam vibratorius particularum aëris motus, quo sonus producitur, corporibus ejusdem toni facile, at corporibus alterius elateris et alterius toni ægrè aut nullo modo communicari potest (317). Unde si atmosphæra constet ex decem partibus aëris veri et unâ parte vaporum, sitque proirde totum pondus atmosphæræ ad pondus vaporum ut 11 ad 1, et ad pondus aëris veri, subducto pondere vaporum, ut 11 ad 10, minuenda est quantitas materiæ movendæ in ratione 11 ad 10. Sed si densitas medii, sive quantitas materiæ sub dato volumine contentæ, cæteris paribus, minuatur, velocitas soni augetur in eâdem ratione subduplicatâ (per Prop. XLVIII.). Quare (in Hyp. Newt.) velocitas soni augenda est in ratione subduplicatâ 10 ad 11, vel in integrâ circiter ratione 20 ad 21; et ideò spatium dato tempore minuti unius secundi descriptum, quod erat 1088 pedum, augendum in ratione 20 ad 21. Est autem fere 20 ad 21 ut 1088 ad 1142.

gabitur per solum aërem verum, idque in subduplicatâ ratione minoris materiæ. Ut si atmosphæra constet ex decem partibus aëris veri et unâ parte vaporum, motus sonorum celerior erit in subduplicatâ ratione 11 ad 10, vel in integrâ circiter ratione 21 ad 20, quam si propagaretur per undecim partes aëris veri: ideóque motus sonorum supra inventus, augendus erit in hâc ratione. Quo pacto sonus, tempore minuti unius secundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita se habere debent tempore verno et autumnali, ubi aër per calorem temperatum rarescit, et ejus vis elastica nonnihil intenditur. At hyberno tempore, ubi aër per frigus condensatur, et ejus vis elastica remittitur, motus sonorum tardior esse debet in subduplicatâ ratione densitatis; et vicissim æstivo tempore debet esse velocior.

Constat autem per experimenta quod soni tempore minuti unius secundi eundo conficiunt pedes Londinenses plus minus 1142, Parisienses vero 1070.

Cognitâ sonorum velocitate innotescunt etiam intervalla pulsuum. ([b]) Invenit utique D. Sauveur, factis a se experimentis, quod fistula aperta, cujus longitudo est pedum Parisiensium plus minus quinque, sonum edit ejusdem toni cum sono chordæ quæ tempore minuti unius secundi ([c]) centies recurrit. Sunt igitur pulsus plus minus centum in spatio pedum Parisiensium 1070, quos sonus tempore minuti unius secundi percurrit; ideóque pulsus unus occupat spatium pedum Parisiensium quasi $10\frac{7}{10}$, id est, duplam circiter longitudinem fistulæ. ([d]) Unde verosimile est quod latitudines pulsuum, in omnium apertarum fistularum sonis, æquentur duplis longitudinibus fistularum.

Porro cur soni cessante motu corporis sonori statim cessant, neque diutius audiuntur ubi longissimè distamus a corporibus sonoris, quàm cùm proximè absumus, patet ex Corollario Prop. XLVII. Libri hujus.

([b]) * *Invenit utique D. Sauveur* in Historiâ Acad. Scient. Paris. an. 1700.

([c]) * *Centies recurrit*, hoc est centum oscillationes ex itu et reditu compositas tempore minuti unius secundi absolvit. Idem D. Sauveur in Monumentis Acad. Paris. an. 1713. oscillationes 101 vel 102 pro ejusdem fistulæ sono posuit.

([d]) * *Unde verosimile est*, &c. Idem confirmatur alio experimento ejusdem D. Sauveur, qui loco mox citato invenit quod fistula aperta, cujus longitudo est pedum Parisiensium plus minus 2, sonum edit ejusdem toni cum sono chordæ quæ 243 oscillationes integras tempore minuti unius secundi perficit. Unde si dividatur numerus 1070 per 243, prodit pulsus unius latitudo ped. Paris. $4\frac{2}{5}$ circiter, id est, dupla circiter longitudo fistulæ. Est autem in organis pneumaticis fistula aperta, quæ patet in superiori et latiori extremo, alteri quo aër fistulam ingreditur, opposito. Si occludatur fistula, octavâ gravius sonat.

Huc usque de sono directo plura diximus, de reflexo pauca adjungenda sunt.

## PROPOSITIO.

320. Sonus percipitur tanquam ex eo loco procedens ex quo quasi centro pulsus aëris propagantur. Constat experientiâ.

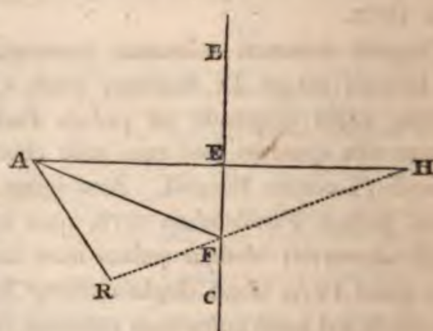
Sed et cur soni in tubis stentorophonicis valde augentur, ex allatis principiis manifestum est. Motus enim omnis reciprocus singulis re-

321. *Corol.* 1. Hinc si sonus e centro quovis A directe propagatus in obstaculum planum satis magnum B C incurrat, et ex A ducatur ad B C perpendicularis A E, producaturque ad H ut sit E H æqualis A E; sonus reflexus eodem fere modo percipietur ac si ex loco H tanquam centro directè propagaretur (194).

322. *Corol.* 2. Similiter si sonus a centro quovis propagatus in obstaculum quodlibet impingat, a quo ita reflectatur ut post reflexionem radii soni in centrum aliud convergant; sonus reflexus tanquam ex hoc secundo centro propagatus audietur.

323. *Corol.* 3. Unde si radii sonori satis densi ad aurem appellentes et soni unius sensationem producentes, ab aure in diversa centra convergant; locus ex quo sonus propagatur, non bene distinguetur.

324. Si sonus producatur in A, et deinde ab obstaculo quovis B C reflectatur tanquam ex centro H propagatus; auditor in loco R sonum directum per A R propagatum percipiet primùm; deinde sonum reflexum quasi ex centro H procedentem, postquam motu directo spatium A F, et motu reflexo spatium F R descripsit, audiet. Idem igitur sonus audietur bis, modò tamen distantiarum A R et A F R differentia tanta sit ut sonus directus et sonus reflexus eodem sensibili momento organum auditûs non afficiant; nam si sonus reflexus ad aurem perveniret eo tempore, quo soni directi impressio adhuc in eâ perseverat, non geminus, sed intensior tantùm sonus audiretur. Porrò experientiâ constat sonos vix posse distingui; si plures quâm 9 circiter syllabæ tempore minuti unius secundi successivè producantur; et ideò ne sonus reflexus cum directo confundatur, inter eorum ad aurem appulsus intercedere oportet partem nonam minuti unius secundi, quo tempore sonus describit spatium 127 pedum Londinensium circiter. Hoc igitur spatio minor esse non debet distantiarum A R et A F R differentiâ, ut sonus reflexus distinctè percipi possit in R. Quod si auditor in A locetur, ubi sonus directus producitur, et spatium 2 A E quod sonus describit ut ad centrum A post reflexionem in E redeat, sit 127 pedum Londinensium, ideóque A E 63 vel 64 pedum circiter, distingui poterit sonus reflexus a directo. Si plura sint obstacula justis intervallis dissita, in quæ sonus directe offendat, is quasi ex variis locis pluries repetitus audietur; ut cum machinarum bellicarum fragorem vel tonitru boatum circumjecta ædificia vel crassiores nubes pluries referunt. Sæpe etiam obstacula sonum directum mutant, dum vehementiori aëris tremore concussa variè contremunt et aërem repercutiendo detonant.




325. Ex iisdem principiis explicari potest tubæ vocalis seu stentorophonicæ efficacia ad vocem articulatam in loca maxime dissita propagandam. Sunt hujusmodi tubæ variarum figurarum, sed omnes satis angustæ, oblongæ et intus perpolitæ, quo sonus in arctum coactus in latius spatium sese diffundere et virium detrimentum pati prohibeatur, ac radii sonori in determinatam plagam confertiores dirigantur. Fabrefiunt ex materiâ ad concipiendum motum tremulum, quo sonus producitur, aptâ, ut sonus hoc partium tubæ et aëris ab ipsis agitati tremulo motu multiplicatus impetum majorem acquirat et longius progrediendi vim habeat. Optima tubarum vocalium figura, auctore clar. Joh. Matthia Hasio, illa censetur, quæ fit ex conversione parabolæ circa ipsius axem, orificio exiguo tubæ, quod os loquentis suscipit, in ipso foco parabolæ constituto. Hâc enim tubâ radii sonori, saltem magnam partem, reflectuntur ad axem tubæ paralleli (194. Lib. II. et Theor. III. de Parabola Lib. I.). Idem Hasius, quo tubam longiorem, non nimium auctâ amplitudine, reddat, tubum ellipticum oblongum parabolico ita jungit, ut elliptici focus unus concidat cum foco parabolici, et os loquentis in altero elliptici foco constituatur; quâ ratione fit ut radii soni ab ore in tubo elliptico ad focum parabolici partim directi, partim reflexi dirigantur (per Theor. IV. de Ellipsi), et deinde in tubo parabolico, ut modò dictum est, progrediantur. Limbus tubæ, qua parte amplissima est, quâque sonus emittitur, ad formam labiorum recurvandus est, quo minus effectum tubæ turbare possit aëris externi in tubam irruentis motus. Hæc omnia fusè et accuratè exposita vides, in ipsa laudati auctoris Dissertatione Physico-Mathematicâ de Tubis Stentoreis.

* Tubis stentoreis annumerandæ sunt omnes tubæ militares aut venatoriæ sive rectæ sive incurvæ, exiguus enim sibilus quem edit tubicen

cursibus a causa generante augeri solet. Motus autem in tubis dilatationem sonorum impedientibus, tardius amittitur et fortius recurrit, et propterea a motu novo singulis recursibus impresso magis augetur. Et hæc sunt præcipua phænomena sonorum.

constricto aëre inter labium et tubæ oram, in prodigiosum erumpit sonum, et observabile videtur ea instrumenta ita a parabolâ discrepare ut axis suæ respectu convexa potius sit tuba quàm concava. Incrementum itaque soni non tam pendere videtur ex eo quod sonus secundùm axis tubæ directionem parallelus exeat, quàm ex eo ipso quod indicat Newtonus, nempe ex motus reciprocatione, ita ut forma tubæ ea esse debeat ut sonus ab uno pariete ad alterum repellatur, extrinsecus sonum derivando, ita tamen ut nonnisi per innumeras reflexiones sive reciprocationes foras emittatur.

# SECTIO IX.

## *De motu circulari fluidorum.*

## HYPOTHESIS.

*Resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, quâ partes fluidi separantur* (c) *ab invicem.*

## PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

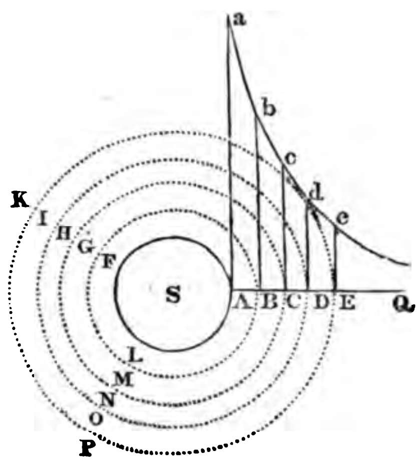
*Si cylindrus solidus infinitè longus in fluido uniformi et infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, et ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico quod tempora periodica partium fluidi sunt ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri.*

Sit A F L cylindrus uniformiter circa axem S in orbem actus, et circulis concentricis B G M, C H N, D I O, E K P, &c. distinguatur fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos solidos ejusdem crassitudinis. Et quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuo factæ erunt (per Hypothesin) (a) ut eorum

(c) * *Ab invicem.* Resistentia quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, est semper eadem in spatiis æqualibus, quæcumque fuerit mobilis velocitas; cùm in omnibus spatiis æqualibus idem defectus lubricitatis superandus sit. Est igitur hæc resistentia, cæteris paribus, ut spatium quod mobile describit, hoc est, dato tempore, ut velocitas. Quia verò partes contiguæ quæ simul pari velocitate moventur, sese mutuo non atterunt; capienda hic est velocitas partium relativa, quâ partes separantur ab invicem. Sed de hâc Hypothesi vide scholium sequens.

(a) 326. * *Ut eorum translationes ab invicem et superficies contiguæ*, &c. Si superficies contiguæ nullâ velocitate relativâ inter se moverentur, aut si essent perfectè lubricæ, nulla foret earum frictio: at si superficies sint asperæ et alia super aliam incedat, nascetur ex partium attritu resistentia, quæ, dato tempore et cæteris paribus, velocitati superficierum relativæ proportionalis est (per Hyp.). Unde si superficies contiguæ, homogeneæ et æqualis ubique asperitatis sese viribus æqualibus premant, et præterea superficies quæ super alias sibi contiguas incedunt, æquales sint; resistentiæ ex attritu dato tempore genitæ proportionales erunt translationibus superficierum contiguarum ab invicem, cùm hujusmodi translationes sint spatia velocitatibus relativis dato tempore descripta. Si verò translationes illæ seu velocitates relativæ superficierum contiguarum ponantur æquales; resistentiæ, cæteris paribus, erunt ut superficies contiguæ quæ sese mutuo atterunt. Quare si nec superficies contiguæ, nec earum velocitates relativæ seu translationes ab invicem æquantur; resistentiæ, cæteris paribus, erunt in ratione compositâ ex ratione superficierum contiguarum et ratione translationum ab invicem dato tempore factarum. Impressiones verò contiguorum orbium in se mutuo factæ, sunt ut resistentiæ quibus producuntur.

translationes ab invicem, et superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concavâ quam ex parte convexâ; prævalebit impressio fortior, et motum orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari et fieri in regiones contrarias. ([b]) Unde cum impressiones sunt ut contiguæ superficies et harum translationes ab invicem, erunt translationes inversè ut superficies, hoc est, inversè ut superficierum distantiæ ab axe. ([c]) Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directè et distantiæ inversè; hoc est, conjunctis rationibus, ut quadrata distantiarum inversè. Quarè si ad infinitæ rectæ S A B C D E Q partes singulas erigantur perpendicula A a, B b, C c, D d, E e, &c. ipsarum S A, S B, S C, S D, S E, &c. quadratis reciprocè proportionalia, et per terminos perpendicularium duci intelligatur ([d]) linea curva hyperbolica; erunt summæ diffe-

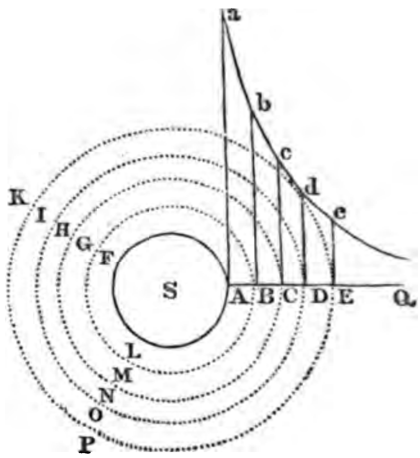



([b]) * *Unde cùm* (per Hyp.) orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, et proinde impressiones ex utraque parte cujusque orbis in plagas contrarias factæ æquales sint; impressiones illæ, dato tempore, datæ sunt, et ideò ratio composita ex rationibus translationum et superficierum contiguarum, quæ est ut impressio, data est. Translationes igitur dato tempore factæ, sunt inversè ut superficies, hoc est, inversè ut superficierum distantiæ ab axe: nam cylindrorum ejusdem longitudinis superficies sunt ut distantiæ ab axe cylindri, et hic omnes superficies cylindricæ; quæ circa axem infinitum revolvuntur, sunt ejusdem longitudinis infinitæ (per Hyp.)

([c]) * 327. *Sunt autem differentiæ motuum angularium*, &c. Motus angulares dicuntur ii, quibus singula puncta A, B, C, D, E, &c. radiis ad axem cylindri perpendiculariter ductis angulos describunt. Sunt igitur anguli illi quasi spatia uniformi motu descripta, et ideò motus angulares sunt ut anguli descripti directe et tempora quibus describuntur inversè, et dato tempore sunt ut anguli descripti. Hinc, dato tempore, motuum angularium differentiæ sunt ut differentiæ angulorum descriptorum, hoc est (154. Lib. I.) ut translationes punctorum seu superficierum ab invicem directè et distantiæ ab axe inversè: nam translationes illæ sunt arcus circulares quos singula puncta per suam velocitatem relativam describunt, et distantiæ ab axe sunt illorum arcuum radii. Sed translationes dato tempore factæ, sunt (ex demonstr.) ut distantiæ ab axe inversè. Quarè differentiæ motuum angularium, dato tempore, sunt ut quadrata distantiarum inversè.

([d]) * *Linea curva hyperbolica*. Quoniam ordinatæ A a, B b, &c. sunt inversè ut abscissarum S A, S B, &c. quadrata; crescente abscissâ ac sine fine productâ; correspondens ordinata decrescit et numquam evanescit, et ideò recta S Q est curvæ asymptotus; et simili ratione patet rectam per S ductam normaliter ad S Q esse alteram curvæ asymptotum.

rentiarum, (e) hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum A a, B b, C c, D d, E e, id est, si ad constituendum medium uniformiter fluidum, orbium numerus augeatur et latitudo minuatur in infinitum, ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ A a Q, B b Q, C c Q, D d Q, E e Q, &c. Et (f) tempora motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis D reciprocè ut area D d Q, hoc est (per notas curvarum quadraturas) (g) directè ut distantia S D. Q. e. d.




(h) *Corol.* 1. Hinc motus angulares particularum fluidi sunt reciprocè ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri, et velocitates absolutæ sunt æquales.

*Corol.* 2. Si fluidum in vase cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, et cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, sintque revolutionum tempora ut ipsorum semi-diametri, et perseveret fluidi pars unaquæque in motu suo:

(e) • *Hoc est, motus toti angulares.* Quoniam solo cylindri A F L impulsu agitur fluidum in orbem (per Hyp.), necesse est ut motus angularis partium fluidi, crescente earum distantia ab axe cylindri, continuo decrescat, ac tandem ad distantiam infinitam evanescat. Unde motus totus angularis puncti A seu orbis A F L est omnium maximus, et motus totus angularis puncti cujuslibet C æqualis est summæ omnium differentiarum motuum angularium punctorum D, E et sequentium in infinitum (106. Lib. I.); ideóque motus toti angulares sunt ut respondentes summæ linearum A a, B b, C c, D d, E e, &c. in infinitum.

(f) • 328. *Tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia.* Motus angulares sunt ut anguli descripti directè et tempora quibus describuntur inversè (326); et propterea si anguli descripti capiantur æquales quatuor rectis, ut totus circulus describatur et tempora fiant temporibus periodicis æqualia, motus angulares erunt ut tempora periodica inversè.

(g) • *Directè ut distantia S.D.* Areæ D d Q momentum est D d $\times$ D E; et ideò, ob ordinatam D d quadrato abscissæ S D reciprocè proportionalem, momentum illud est ut $\frac{DE}{SD^2}$, et (per Cas. 4. Lem. II. Libri hujus) area D d Q est ut $\frac{1}{SD}$ quæ quantitas negativa prodit, quia area D d Q abscissæ D S non adjacet, sed ad partes contrarias vergit in infinitum. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis D reciprocè ut $\frac{1}{SD}$, hoc est, directè ut S D.

(h) • *Corol.* 1. Ex demonstratis, motus angulares partium fluidi sunt reciprocè ut tempora periodica, hoc est, reciprocè ut illarum distantiæ ab axe cylindri. Velocitates verò absolutæ, utpote uniformes, sunt ut circumferentiæ descriptæ, seu ut distantiæ ab axe cylindri directè et tempora periodica inversè, hoc est, ut distantiæ directè et distantiæ inversè, ideóque sunt in ratione æqualitatis. Hinc verò (per Cor. 5. Prop. IV. Lib. I.) vires centrifugæ particularum æqualium fluidi sunt reciprocè ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri; et propterea vis quà tota superficies cylindrica nititur ab axe cylindri re-

(l) erunt partium singularum tempora periodica ut ipsarum distantiæ ab axe cylindrorum.

*Corol.* 3. Si cylindro et fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

*Corol.* 4. Unde si toti cylindrorum et fluidi systemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, (k) habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.

*Corol.* 5. Igitur si fluido et cylindro exteriore quiescentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, et paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius desinet augeri quam fluidi partes singulæ motum Corollario quarto definitum (l) acquirant.

*Corol.* 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus; et accelerabitur ejus motus (m) quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; et nisi cylindrus inte-

cedere, est ut eadem superficies directè et distantia ejus ab axe inversè, et ideò data est.

(l) * *Erunt partium singularum tempora periodica ut*, &c. Patet, quia cylindrus exterior uniformi velocitate motus locum tenet superficiei cylindricæ, quæ in demonstratione adhibita est.

(k) * *Habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.* Sit E K P cylindrus exterior, cujus tempus periodicum in hypothesi Corollarii 2. dicatur t E; et quoniam in eadem hypothesi velocitates particularum absolutæ sunt æquales (per Cor. 1.), singulæ illæ particulæ spatia æqualia eodem tempore t E describent, hoc est, spatia æqualia peripheriæ E K P, quam punctum E tempore t E percurrit. Jam si toti cylindrorum et fluidi systemati auferatur motus omnis angularis. Cylindri exterioris; ex spatio E K P, quod singulæ particulæ tempore t E describunt, auferenda erit integra circuli peripheria, quam particula quælibet seorsim describit, ut habeatur spatium quod eadem particula eodem tempore t E percurrit in cylindro quiescente. Erit igitur E K P — D I O spatium quod particula quævis D tempore t E describit, postquam motus omnis angularis cylindri exterioris ablatus est. Quia verò particulæ singulæ revolvuntur æquabiliter (per Hyp.), erit spatium E K P — D I O ad D I O, sive S E — S D ad S D, ut tempus t E ad tempus periodicum particulæ D in cylindro quiescente; et ideò si hoc tempus dicatur T D, erit $TD = \frac{SD \times tE}{DE}$; et simili modo tempus periodicum particulæ A in eàdem hypothesi (quod dicatur T A) = $\frac{SA \times tE}{AE}$; unde habetur $tE = \frac{AE \times TA}{SA}$, et ideò $TD = \frac{SD \times AE \times TA}{SA \times DE}$. Dato igitur tempore periodico cylindri interioris, datur tempus periodicum particulæ cujusvis fluidi in cylindro quiescente. Quia verò A E, S A et T A datæ sunt, erit T D ut $\frac{SD}{DE}$, hoc est, particularum fluidi tempora periodica sunt ut distantiæ ipsarum ab axe cylindri interioris directè et distantiæ earumdem a superficie cylindri quiescentis inversè.

(l) * *Acquirant.* Patet per Cor. 3.

(m) * *Quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur.* Tamdiu enim cylindrus interior atterit et urget fluidi partes, motumque ipsis eà actione communicat qui ad cylindrum exteriorem transit, quamdiu omnium partium contiguarum motus angulares inæquales sunt, seu quamdiu tempora periodica non æquantur inter se.

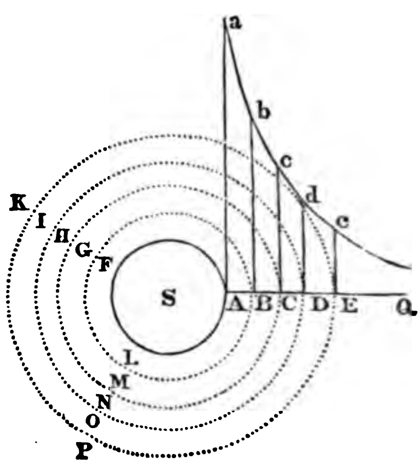
rior vi aliquâ extrinsecus impressâ motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in aquâ profundâ stagnante experiri licet.

## PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

*Si sphæra solida, in fluido uniformi et infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, et ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem; perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata distantiarum a centro sphæræ.*

*Cas.* 1. Sit A F L sphæra uniformiter circa axem S in orbem acta, et circulis concentricis B G M, C H N, D I O, E K P, &c. distinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem orbes illos esse solidos; et quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuo factæ, erunt (per hypothesin) ut eorum translationes ab invicem et superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concavâ quàm ex parte convexâ; prævalebit impressio fortior, et velocitatem orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debebunt impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari, et fieri in regiones contrarias. Unde cùm impressiones sint ut contiguæ superficies et harum translationes ab invicem; erunt translationes inversè ut superficies, (n) hoc est, inversè ut quadrata distantiarum superficierum a centro. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distan-




(n) * *Hoc est, inversè ut quadrata distantiarum superficierum a centro.* Nam superficies sphæricæ, ut pote similes, sunt ut quadrata radiorum seu distantiarum a centro.

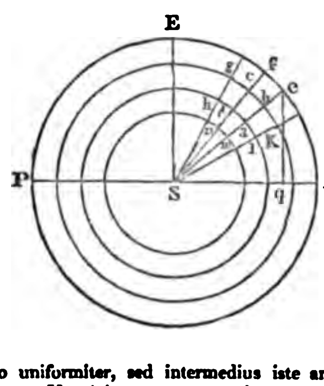
tias, sive ut translationes directè et distantiæ inversè; hoc est, conjunctis rationibus ut cubi distantiarum inversè. Quare si ad rectæ infinitæ S A B C D E Q partes singulas erigantur perpendicula A a, B b, C c, D d, E e, &c. ipsarum S A, S B, S C, S D, S E, &c. cubis reciprocè proportionalia, erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum A a, B b, C c, D d, E e: id est (si ad constituendum medium uniformiter fluidum, numerus orbium augeatur et latitudo minuatur in infinitum) ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ A a Q, B b Q, C c Q, D d Q, E e Q, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis D I O reciprocè ut area D d Q, hoc est, per notas curvarum quadraturas, (°) directè ut quadratum distantiæ S D. (ᵖ) Id quod volui primò demonstrare.

(q) *Cas.* 2. A centro sphæræ ducantur infinitæ rectæ quàm plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuo

(°) * *Directè ut quadratum distantiæ S D.* Areæ D d Q momentum est D d × D E, ideóque, ob ordinatam D d cubo abscissæ S D reciprocè proportionalem, momentum illud est ut $\frac{\text{D E}}{\text{S D}^3}$, et propterea (per Cas. 4. Lem. II. Libri hujus) area fluens D d Q est ut $\frac{1}{\text{S D}^2}$, quæ negativa prodit, quia non adjacet abscissæ D S, sed in plagam contrariam D Q vergit. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis D I O reciprocè ut $\frac{1}{\text{S D}^2}$, hoc est, directè ut quadratum distantiæ S D.

(ᵖ) * *Id quod volui primò demonstrare.* Casûs primi demonstratio valet, si medium sphæræ circumfusum ex innumeris orbibus solidis, tenuissimis ac concentricis constare fingatur. In casibus secundo et tertio singuli illi orbes sphærici in innumeros annulos, et annuli singuli in tenuissimas particulas, ad constituendum medium fluidum, dividuntur.

(q) * *Cas.* 2. A centro sphæræ S ducantur rectæ quam plurimæ, longitudine infinitæ S k, S b, S c, S g, &c, quæ æquales angulos k S b, b S c, c S g, &c. complectantur; et his rectis circa axem P X revolutis et superficies conicas describentibus, concipe orbes in annulos innumeros secari. Nam cùm superficies P f e X circa axem P X revolvitur, singuli arcus k b, b c, c g, e f, a l, &c. portiones superficierum sphæricarum annulares describunt, et particula quælibet ut b c d a, describit annulum solidum. Annulus unusquisque, ut ille qui revolutione superficiei a b c d describitur, habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem ex revolutione figuræ m a d n, alterum exteriorem ex revolutione figuræ b e f c, et duos laterales ex revolutione figurarum k b a l et c g h d. Attritu interioris et exterioris non potest annulus unusquisque nisi in motu juxta legem casûs primi facto, æqualiter et in partes contrarias urgeri. Alioquin partes fluidi non perseverarent in motu




suo uniformiter, sed intermedius iste annulus (contra Hyp.) in motu suo accelerearetur vel retardaretur, ut de orbibus integris ostensum est in casu primo. *Et propterea annulorum series quælibet a globo in infinitum recta pergens et inter duas proximas superficies conicas comprehensa, qualis est series annulorum quos figuræ m a d n, a b c d, b e f c, &c. circa axem P X rotatæ describunt, movebitur pro lege casûs primi, nisi, &c.*

superantes; et his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros secari; et annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem et duos laterales. Attritu interioris et exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi facto, æqualiter et in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus primi. Et propterea annulorum series quælibet a globo in infinitum rectà pergens, movebitur pro lege casus primi, nisi quâtenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hâc lege facto attritus annulorum ad latera nullus est; neque ideò motum, quo minus hâc lege fiat, impediet. Si annuli (r) qui a centro æqualiter distant, vel citius revolverentur vel tardius (s) juxta polos quàm juxta eclipticam; tardiores accelerarentur, et velociores retardarentur ab attritu mutuo, et sic vergerent semper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege casûs primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat secundum legem casus primi, et propterea lex illa obtinebit: hoc est, annulorum singulorum tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum a centro globi. Quod volui secundò demonstrare.

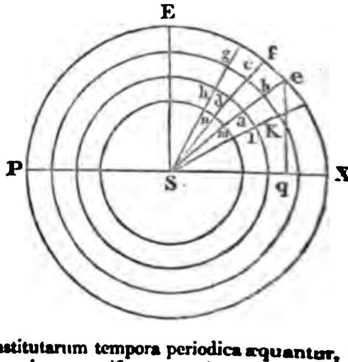
*Cas.* 3. Dividatur jam annulus unusquisque sectionibus transversis in particulas innumeras constituentes substantiam absolutè et uniformiter fluidam; et quoniam hæ sectiones non spectant ad legem motûs circularis, sed ad constitutionem fluidi solummodo conducunt, perseverabit motus circularis ut prius. His sectionibus annuli omnes quam minimi asperitatem et vim attritus mutui aut non mutabunt, (t) aut mutabunt æqualiter. Et manente causarum proportione manebit effectuum proportio, hoc est, proportio motuum et periodicorum temporum. Q. e. d. Cæterum cùm motus circularis, et inde orta vis centrifuga, (u) major sit ad eclipticam

(r) * *Qui a centro æqualiter distant*, seu qui sunt ex eodem orbe resecti, quales sunt annuli ex figurarum l k b a, a b c d, d c g h, et revolutione descripti.

(s) * *Juxta polos* X et P, quam juxta æquatorem, quem recta S E ad axem P X perpendicularis rotata describit.

(t) * *Aut mutabunt æqualiter.* Quoniam enim hæ sectiones non nisi ad fluiditatem singulis annulis conciliandam factæ sunt, et fluidum homogeneum supponitur; si inde mutetur annulorum asperitas et vis attritus mutui, mutabitur æqualiter seu in data ratione. Et idcirco manente resistentiarum et impressionum, quæ ex mutuo partium attritu oriuntur, proportione, manebit effectuum inde productorum proportio, hoc est, proportio motuum et periodicorum temporum; et propterea partium singularum tempora periodica erunt, ut in superioribus casibus, proportionalia quadratis distantiarum ipsarum a centro globi.

(u) * *Major sit ad eclipticam quàm ad polos.* Quoniam particularum E et e in eodem orbe




constitutarum tempora periodica æquantur, ipsarum vires centrifugæ sunt inter se ut radii cir-

quàm ad polos; debebit causa aliqua adesse quâ particulæ singulæ in circulis suis retineantur; ne materia, quæ ad eclipticam est, recedat semper a centro et per exteriora vorticis migret ad polos, indeque per axem ad eclipticam circulatione perpetuâ revertatur.

(x) *Corol.* 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a centro globi, et velocitates absolutæ reciprocè ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

*Corol.* 2. Si globus in fluido quiescente similari et infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem vorticis, et motus iste paulatim propagabitur in infinitum; neque prius cessabit in singulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica singularum partium sint ut quadrata distantiarum a centro globi.

*Corol.* 3. Quoniam vorticis partes interiores (y) ob majorem suam velocitatem atterunt et urgent exteriores, motumque ipsis eâ actione perpetuo communicant, et exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores simul transferunt, eâque actione (z) servant quantitatem motûs sui planè invariatam; patet quod motus perpetuo transfertur a centro ad circumferentiam vorticis, et per infinitatem circumferentiæ absorbetur. Materia inter sphæricas duas quasvis superficies vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quòd motum omnem a materiâ interiore acceptum transfert semper in exteriorem.

*Corol.* 4. Proinde ad conservationem vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum, a quo globus eandem

culorum quos describunt (per Cor. 3. Prop. IV. Lib. I.), hoc est, ut perpendiculares ad axem E S et e q. Vis igitur centrifuga eo major est, quo magis particula accedit ad æquatorem seu eclipticam S E, et in æquatore maxima est, in polo nulla.

(x) 328. • *Corol.* 1. Motus angulares sunt reciproce ut tempora periodica (327), ideóque (ex demonstratis) reciprocè ut quadrata distantiarum a centro globi. Velocitates absolutæ particularum sunt ut peripheriæ circulorum quas describunt, seu ut ipsarum distantiæ ab axe directè, et tempora periodica inversè; et propterea sunt ut distantiæ ab axe directè et quadrata distantiarum a centro globi inversè, ac proinde sunt reciprocè ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe. Unde velocitates absolutæ particularum in æquatore sunt reciprocè ut ipsarum distantiæ a centro globi, et earum vires centrifugæ reciproce ut cubi distantiarum a centro globi (per Cor. 1. Prop. IV. Lib. I.)

(y) • *Ob majorem suam velocitatem*, &c. Velocitates angulares orbium a centro globi minus distantium majores sunt (per Cor. 1.) quàm velocitates angulares orbium exteriorum et a centro vorticis remotiorum; sed orbes interiores excessu velocitatis angularis, quo relative ad orbes exteriores moventur, hos atterunt et urgent, *motumque ipsis*, &c.

(z) • *Servant quantitatem motûs sui planè invariatam.* Quia (per Hyp.) ea est vorticis conditio, ut unaquæque fluidi pars perseveret in suo motu uniformiter, et in eâdem a centro distantia eodem semper tenore moveatur; et tamen, propter orbium interiorum majorem velocitatem angularem attritumque continuum, orbes exteriores perpetuò urgentur et ad motum accelerandum incitantur; necesse est ut motus perpetuo transferatur a centro ad circumferentiam vorticis, et per infinitatem extimæ circumferentiæ absorbeatur. Quâ ratione fit ut orbium singulorum, qui eamdem motûs quantitatem in alios exteriores simul et semper transferunt, idem sit perpetuò motus.

semper quantitatem motûs accipiat, quam imprimit in materiam vorticis. Sine tali principio necesse est ut globus et vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim et in orbem agi desinant.

*Corol.* 5. Si globus alter huic vortici ad certam ab ipsius centro distantiam innataret, et interea circa axem inclinatione datum vi aliquâ constanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: et primo revolveretur hic vortex novus et exiguus unà cum globo circa centrum alterius, et interea latius serperet ipsius motus, et paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eâdem ratione, quâ hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuo ob motum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, et omnia legibus mechanicis permitterentur, languesceret paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3. et 4. assignatam) et vortices tandem conquiescerent.

*Corol.* 6. Si globi plures datis in locis circum axes positione datos certis cum velocitatibus constanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi singuli eâdem ratione quâ unus aliquis motum suum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus suos in infinitum, adeò ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus resultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, sed in se mutuo paulatim excurrent; globique per actiones vorticum in se mutuo, perpetuo movebuntur de locis suis, uti in Corollario superiore expositum est; neque certam quamvis inter se positionem servabunt, nisi per vim aliquam retenti. Cessantibus autem viribus illis quæ in globos constanter impressæ conservant hosce motus, materia ob rationem in Corollario tertio et quarto assignatam, paulatim requiescet et in vortices agi desinet.

*Corol.* 7. Si fluidum similare claudatur in vase sphærico, ac globi in centro consistentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem et vas in eamdem partem circa axem eundem revolvantur, sintque eorum tempora periodica ut quadrata semi-diametrorum: partes fluidi non prius perseverabunt in motibus suis sine acceleratione et retardatione, quàm sint eorum tempora periodica ut quadrata distantiarum a centro vorticis. ([a]) Alia nulla vorticis constitutio potest esse permanens.

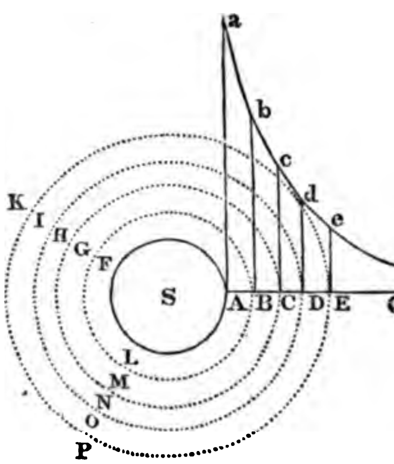
([a]) • *Alia nulla vorticis constitutio potest esse permanens.* Nam (ex demonstr.) ea debet esse vorticis constitutio, ut pars quælibet fluidi possit in suo motu uniformiter perseverare, et ut attra

*Corol.* 8. Si vas, fluidum inclusum, et globus servent hunc motum, et motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in se invicem, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium inter se pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quàm acceleretur attritu ex altero.

([b]) *Corol.* 9. Unde si vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum transire per axem globi et motu contrario

ex uno latere non magis tardetur quàm acceleratur attritu ex altero latere.

([b]) * *Corol.* 9. Fluidum similare in vase sphærico E K P clausum ita agatur in vorticem, ut tandem partes fluidi in motibus suis sine acceleratione et retardatione perseverent, quemadmodum in Corollario 7. expositum est. In hâc hypothesi velocitates particularum in æquatore existentium sunt ut distantiæ a centro S inversè (328), et ideò ut S D ad S E, sive, ut peripheria D I O ad peripheriam E K P ita est peripheria E K P (quam particula E tempore suo periodico t E describit) ad spatium quod alia quævis particula D eodem tempore conficit, quod proinde spatium erit $\frac{EKP^2}{DIO}$. Quiescat jam vas sphæricum, hoc est, toti systemati vorticis auferatur vasis motus angularis, et particula D tempore t E describet spatium $\frac{EKP^2}{DIO} - DIO$. Sed hoc spatium est ad circumferentiam D I O, aut quod idem est, $SE^2 - SD^2$ est ad $SD^2$, ut tempus t E ad tempus periodicum (T D) particulæ D in vase quiescente, quod proinde tempus erit $\frac{SD^2 \times tE}{SE^2 - SD^2}$. Et simili modo tempus periodicum particulæ A, quod dicatur T A, erit in vase quiescente $\frac{SA^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$. Si itaque detur motus globi, seu tempus periodicum T A, dabitur tempus $tE = \frac{TA \times [SE^2 - SA^2]}{SA^2}$, et inde dabitur tempus periodicum $TD = \frac{SD^2 \times tE}{SE^2 - SD^2} = \frac{SD^2 \times TA \times [SE^2 - SA^2]}{SA^2 \times [SE^2 - SD^2]}$. Si igitur vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi ad quamlibet datam a centro distantiam. Concipe nunc planum transire per axem globi et motu contrario revolvi; et pone summam temporis revolutionis hujus et revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semi-diametri vasis ad quadratum semi-diametri globi; sive pone $SA^2$ ad $SE^2$ ut T A ad quartum, quod erit $\frac{SE^2 \times TA}{SA^2} = \frac{SE^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$; et tempus periodicum plani erit $\frac{SE^2 \times tE}{SE^2 - SA^2} - \frac{SA^2 \times tE}{SE^2 - SA^2} = tE$, quia $TA = \frac{SA^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$. Quare planum, quo hic utitur Newtonus, ita movetur ut revolutionem suam absolvat eodem tempore t E, quo vas suam revolutionem perficit in hyp. Cor. 7. Sit X tempus periodicum particulæ D respectu plani in vase quiescente; et quia planum et vortex in regiones contrarias moventur, erit T D ad X ut circumferentia

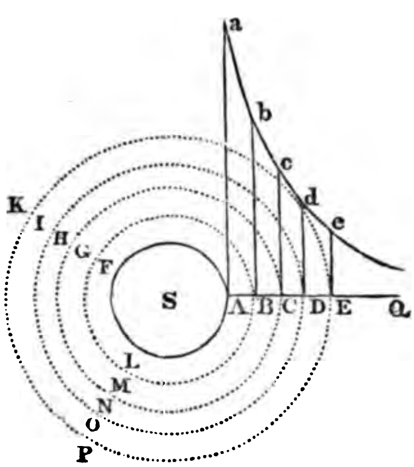



D I O, quam particula D tempore periodico T D describit, ad ejusdem circumferentiæ partem quam eadem particula tempore X percurrit; et ideò pars illa erit $\frac{X \times DIO}{TD} = \frac{X \times DIO \times [SE^2 - SD^2]}{SD^2 \times tE}$, et pars residua circumferentiæ D I O, quam planum eodem tempore X conficit, erit $DIO - \frac{DIO \times X}{TD} = \frac{SD^2 \times DIO \times tE - X \times DIO \times [SE^2 - SD^2]}{SD^2 \times tE}$.

revolvi; et pone summam temporis revolutionis hujus et revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semi-diametri vasis ad quadratum semi-diametri globi; et tempora periodica partium fluidi, respectu plani hujus, erunt ut quadrata distantiarum suarum a centro globi.

*Corol.* 10. Proinde si vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diversum aliquem datâ cum velocitate quâcumque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam si systemati toti auferatur vasis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter se qui prius, per Corol. 8. (c) Et motus isti per Corol. 9. dabuntur.

Quia verò planum tempore t E uniformi motu revolutionem suam D I O absolvit, est t E ad X ut D I O ad spatium modo inventum, seu ut $SD^2 \times tE$ ad $SD^2 \times tE - X \times [SE^2 - SD^2]$; unde habetur $SD^2 \times X \times tE = SD^2 \times tE^2 - X \times tE \times [SE^2 - SD^2]$, et ideò $SE^2 \times X = SD^2 \times tE$, ac proinde tempus $X = \frac{SD^2 \times tE}{SE^2}$. Cùm ergo t E et S E sint quantitates datæ, tempus periodicum X particulæ fluidi D respectu plani prædicti est ut $SD^2$, sive ut quadratum distantiæ a centro globi. Et quia omnium particularum in eodem




orbe constitutarum tempora periodica æquantur inter se; earum omnium tempora periodica respectu plani sunt ut quadrata distantiarum suarum a centro globi. Q. e. d.

(c) * *Et motus isti per Corol. 9. dabuntur,* proindeque si cum iis motibus datis componatur vasis motus angularis datus, dabitur motus fluidi in vase data cum velocitate moto.

## PROBLEMA.

329. Sphæra solida in fluido infinito et in eâdem a centro distantiâ similari, sed in diversis distantiis in datâ quâvis distantiarum ratione inæqualiter denso circà axem positione datum uniformi cum motu revolvatur et a sphæræ impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo, sitque resistentia quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, in ratione compositâ ex ratione quâlibet densitatis et ratione etiam quâcumque velocitatis relativæ, oportet invenire tempora periodica partium fluidi.

Distinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis ut in demonstratione Prop. LII. factum est; dicanturque A D $= x$, fluidi densitas in loco D $= \delta$, translatio orbium ab invicem tempore dato $= v$, densitas $\delta$ sit proportionalis dignitati $x^n$, et resistentia, cæteris paribus, sit ut $\delta^m v^p$, seu ut $x^{mn} v^p$. Quia superficies sphærica D I O, est ut $x^2$, erit impressio orbis D I O, in orbem contiguum ut $x^{2+mn} v^p$; sed ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari et fieri in regiones contrarias, ac proindè quantitas $x^{2+mn} v^p$, debet esse constans. Quarè erit $v^p$ ut $\frac{1}{x^{2+mn}}$, et $v$ ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}}}$. Sunt autem differentiæ motuum angularium circà axem ut translationes orbium applicatæ ad distantias, hoc est, ut $\frac{v}{x}$, sive ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}}$. Sit jam D E $= dx$, et ordinata D d, ad curvam a b d e, sit ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}}$ erit summa differentiarum, hoc est, motus totus angularis ut area D d Q, quæ est ut $\int \frac{dx}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}} = -\frac{p}{2+mn} \times$

*Corol.* 11. Si vas et fluidum quiescant et globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, et circumagetur vas nisi violenter detentum, neque prius desinent fluidum et vas accelerari, quàm sint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod si vas vi aliquâ detineatur vel revolvatur motu quovis constanti et uniformi, deveniet medium paulatim ad statum motûs in Corollariis 8. 9. et 10. definiti, nec in alio unquam statu quocunque perseverabit. Deinde verò si, viribus illis cessantibus quibus vas et globus certis motibus revolvebantur, permittatur systema totum legibus mechanicis; vas et globus in se invicem agent mediante fluido, neque motus suos in se mutuo per fluidum propagare prius cessabunt, quàm eorum tempora periodica æquentur inter se, et systema totum ad instar corporis unius solidi simul revolvatur.

$\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}}}$; et tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia, sunt ut $x^{\frac{2+mn}{p}}$, neglectâ quantitate constante $\frac{p}{2+mn}$. Q. e. i.

330. *Corol.* 1. Si resistentia, cæteris paribus, sit ut velocitas, et tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ distantiarum a centro, erit $p = 1$, et $\frac{2+mn}{p} = \frac{3}{2}$, ideóque $n = -\frac{1}{2m}$. Sed cùm resistentia proportionalis supponatur densitatis dignitati cujus index est m, et crescente densitate crescat, necesse est ut m sit numerus positivus, ac proindè n numerus negativus. Quarè densitas, ut pote proportionalis dignitati $x^n$, crescente distantiâ in hypothesi Corollarii hujus decrescet. Hoc autem repugnat. Non materia vorticis eò densior esse debet quò longius distat a centro. Conatur enim materia per motum suum circularem recedere ab axe vorticis et propterea premit materiam omnem ulteriorem, eamque condensat, si condensari possit. Præterea velocitas absoluta partium fluidi in æquatore vorticis est ut earum distantia a centro globi directè et tempus periodicum inversè, hoc est, in hypothesi Cor. hujus ut $\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, ideóque vis centrifuga partium (per Cor. I. Prop. IV. Lib. I.) cæteris paribus est ut $\frac{1}{xx}$, et proindè decrescit in ratione duplicatâ distantiæ auctæ. Ut igitur vortex ad statum permanentem reducatur, oportet ut partes densiores a centro recedant et rariores ad illud accedant, quo vis centrifuga partium centro propiorum, quæ ob majorem velocitatem et minorem distantiam nimia est, per minorem densitatem minuatur.

331. *Corol.* 2. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ distantiarum a centro, hoc est, si $\frac{2+mn}{p} = \frac{3}{2}$, erit $p = \frac{4+2mn}{3}$, et ideò resistentia, cæteris paribus, ut velocitatis dignitas cujus exponens est $\frac{4+2mn}{3}$. Sed (ex dem. Cor. 1.) m et n sunt numeri positivi. Quarè tempora periodica non possunt esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum a centro, quin index $\frac{4+2mn}{3}$ sit unitate major, et quin proindè resistentia, cæteris paribus, in majori ratione crescat quàm in ratione velocitatis auctæ.

332. *Corol.* 3. Si spatium quo vortex continetur sit ubique plenum et propterea medii densitas uniformis supponatur, littera z quæ densitatem exponebat, significet jam fluiditatis defectum, sitque resistentia, cæteris paribus, ut dignitas $z^m$. His positis ostendetur ut in Cor. 1. et 2. factum est, quod si tempora periodica statuantur in ratione sesquiplicatâ distantiarum a centro, materia vorticis eò fluidior erit quò longius distat a centro, vel resistentia augebitur in majori ratione quàm ea est in quâ velocitas relativa augetur.

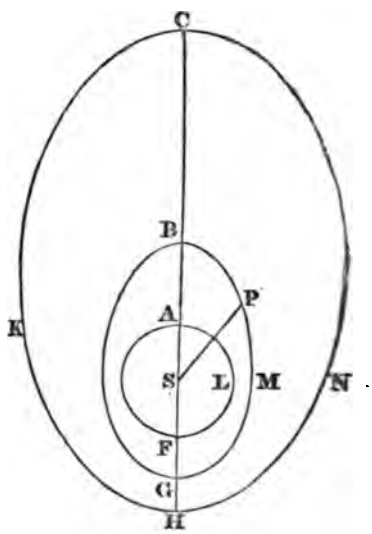
333. *Corol.* 4. Si resistentia, cæteris paribus, augeatur in ratione minore quàm in ratione velocitatis, hoc est, si index p, sit unitate minor, erit $\frac{2+mn}{p}$ binario major, et proindè tempora periodica partium vorticis erunt in majori ratione quàm duplicatâ ratione distantiarum a centro. Nam vel est $mn = 0$, quod contingit dùm eadem est ubique fluidi densitas ac fluiditas, vel m n, est numerus positivus, quia defectus fluiditatis vel densitas, auctis distantiis a centro augetur (per Cor. 1.)

*Scholium.*

In his omnibus suppono fluidum ex materiâ quoad densitatem et fluiditatem uniformi constare. Tale est in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus similes et æquales, ad æquales semper a se distantias, ubivis in fluido constitutus, propagare possit. Conatur quidem materia per motum suum circularem recedere ab axe vorticis, et propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hâc pressione fit attritus partium fortior et separatio ab invicem difficilior; et per consequens diminuitur materiæ fluiditas. Rursus si partes fluidi sunt alicubi crassiores seu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores superficies in quibus partes separentur ab invicem. In hujusmodi casibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliâve aliquâ conditione restitui suppono. Hoc nisi fiat, materia ubi minus fluida est magis cohærebit et segnior erit, ideóque motum tardius recipiet (d) et longius propagabit quàm pro ratione superius assignatâ. (e) Si figura vasis non sit

(d) * *Et longius propagabit quàm pro ratione superius assignatâ.* In superioribus demonstrationibus Newtonus supposuit fluidum homogeneum esse et pressionem ubique æqualem; si verò in diversis a vorticis centro distantiis aliqua sit partium fluidi aut pressionis inæqualitas, minorem vel majorem fluiditatem inde ortam, vel lubricitate partium vel lentore aliâve aliquâ conditione ad æqualitatem restitui supponit, ut vortex in eodem statu juxtà leges præscriptas, permaneat. Hoc nisi fiat, materia ubi minus fluida est, magis cohærebit et segnior erit, ideóque motum a globo centrali communicatum difficiliùs ac tardiùs, cæteris paribus, recipiet; sed illum longius propagabit. Nam si vorticis partes ità inter se et cum globo cohærerent, ut nullâ vi possent separari, non posset globus centralis circumvolvi, quin materia tota vorticis, tanquam vectis rigidus, simul circumvolveretur. Undè quò magis partes illæ cohærent, eò longiùs motum a globo centrali acceptum propagant. Et ideò etiamsi materia vorticis homogenea non sit, et pressio inæqualis supponatur, vim suam obtinent difficultates, quas contrà vorticum in naturâ possibilitatem Newtonus proposuit in Cor. 2. 4. 5. et 6. Prop. LII.

(e) * *Si figura vasis non sit sphærica.* Sit C N H K, figura vasis in quo fluidum solo sphæræ A L F impulsu agatur in orbem, et particulæ fluidi quæ vasis superficiem C N H K, contingunt, movebuntur in lineis non circularibus, sed conformibus eidem vasis figuræ, particulæ verò quæ sphæræ A L F proximæ sunt, circulos describent. Undè quò magis particulæ fluidi a sphærâ centrali distant, eò magis orbitarum quas describunt, figura a circulari differt et ad vasis figuram accedit. Quia verò particularum circulos describentium tempora periodica erant (Prop. LII.) ut quadrata distantiarum a centro S; erunt in hoc vase ut quadrata mediocrium distantiarum quam proximè. Sic parti-




culæ P orbitam B P G B describentis tempus periodicum erit quam proximè ut quadratum distantiæ P S, quæ est media arithmetica inter distantiam maximam B S, et minimam S G, sivè erit ut tempus periodicum particulæ P, cir-

sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus sed conformibus eidem vasis figuræ, et tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium distantiarum a centro quam proximè. In partibus inter centrum et circumferentiam, ubi latiora sunt spatia, tardiores erunt motus, ubi angustiora velociores (f) neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim describent minus curvos, et conatus recedendi a centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quàm augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo a spatiis angustioribus in latiora recedent paulo longius a centro, sed isto recessu tardescent; et accedendo postea de latioribus ad angustiora accelerabuntur, et sic per vices tardescent et accelerabuntur particulæ singulæ in perpetuum. (g) Hæc ita se habebunt in vase rigido. Nam in fluido infinito constitutio vorticum innotescit per Propositionis hujus Corollarium sextum.

Proprietates autem vorticum hâc Propositione investigare conatus sum, ut pertentarem si quâ ratione phænomena cœlestia per vortices explicari possint. Nam phænomenon est, quod planetarum circa Jovem revolventium tempora periodica sunt in ratione sesquiplicatâ distantiarum a centro Jovis; et eadem regula obtinet in planetis qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæ regulæ in planetis utrisque quam accuratissimè, quâtenus observationes astronomicæ hactenus prodidêre. Ideóque si planetæ illi a vorticibus circa Jovem et Solem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi vortices eâdem lege revolvi. Verùm tempora periodica partium vorticis prodierunt in ratione duplicatâ distantiarum a centro motus: neque potest ratio illa diminui et ad rationem sesquiplicatam reduci, (h) nisi vel

culum describentis, cujus radius P S. Nam tempus periodicum, cæteris paribus, crescit ut velocitas absoluta decrescit; sed cùm vortex supponatur esse in statu permanenti, et eadem proindè materiæ quantitas per latiora spatia ut C A, et per angustiora ut F H, simul transeat; oportet ut materiæ velocitas in spatiis latioribus minuatur, et in angustioribus augeatur. Quo fit ut particula P, eodem ferè tempore describat orbitam B P G B, quo velocitate mediocri describeret circulum cujus esset radius P S.

(f) * *Neque tamen particulæ velociores.* Nam vortex non potest esse in statu permanenti quin particula P, in spatiis angustioribus L N, F H, ad centrum S accedat; et ideò necesse est ut in iisdem spatiis conatus recedendi a centro minùs augeatur per incrementum velocitatis, quàm diminuitur per decrementum curvaturæ. Est enim vis quâ particula P, in loco G, nititur a circumferentiâ M G recedere, ut quadratum velocitatis particulæ directè et radius circuli curvam osculantis in G, inversè (Cor. 1. Prop. IV. et not. 121. Lib. I.).

(g) * *Hæc ita se habebunt,* in vase rigido aut in spatio aliis vorticibus circumdato, quo tanquam vase, juxtà Cartesii opinionem materia vorticis continetur. Ex his autem Newtoni observationibus sequitur. 1. Planetarum qui circà Cartesiani vorticis centrum eâdem lege cum vorticis partibus moventur, orbitas eò magis ad circuli figuram accedere debere quo centro vorticis propiores sunt; et propterea excentricitatem orbitæ Mercurii longè minorem esse excentricitate orbitæ Saturni et omnium superiorum planetarum, contrà observationes astronomicas. Sequitur 2. in Cartesianâ hypothesi explicari non posse cur planetæ ellipses accuratas, non verò circulos aut irregulares figuras describant. Sequitur 3. omnium orbitarum aphelia et perihelia a Sole spectata in iisdem inter fixas locis esse posita atquè immota manere; cùm tamen ex observationibus astronomicis certum sit, planetarum aphelia a se invicem longe distare et lento motu agi.

(h) * *Nisi vel materia vorticis eò fluidior sit.* (Per not. 332.)

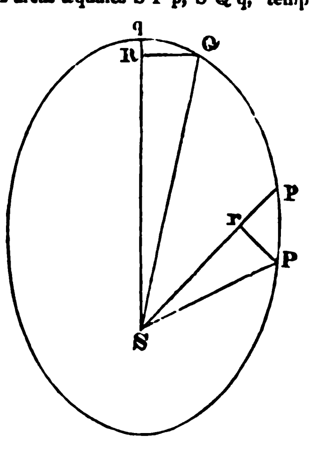
materia vorticis eo fluidior sit quo longius distat a centro, vel resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex auctâ velocitate quâ partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in majore ratione quàm ea est in quâ velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores et minus fluidæ, nisi graves sint in centrum, (i) circumferentiam petent; et verisimile est quod, etiamsi demonstrationum gratiâ hypothesin talem initio Sectionis hujus proposuerim, ut resistentia velocitati proportionalis esset, (k) tamen resistentia in minori sit ratione quàm ea velocitatis est. (l) Quo concesso, tempora periodica partium vorticis erunt in majori quàm duplicatâ ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si vortices (uti aliquorum est opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius usque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio sesquiplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere potest. (m) Viderint itaque philosophi quo pacto phænomenon illud rationis sesquiplicatæ per vortices explicari possit.

(i) * *Circumferentiam petent.* Id experientiâ constat; nam si aqua in vase contenta in vorticem agatur, paleæ et alia corpuscula minùs fluida petunt circumferentiam.

(k) * *Tamen resistentia in minori sit ratione.* (Vid. ultimam not. in hoc schol.)

(l) * *Quo concesso.* (Per not. 333.)

(m) * *Viderint itaque philosophi.* Difficultas crescit, si tria simul conjungantur, quæ primus omnium Keplerus mirâ sagacitate ex observationibus astronomicis deduxit. Primum est, planetas in ellipsibus, quarum umbilicum Sol occupat, revolutiones suas peragere. Secundum est planetas singulos radiis ad Solem ductis, et satellites radiis ad suum primarium ductis, areas describere temporibus proportionales. Tertium est, tempora periodica planetarum circà Solem et satellitum circà primarium suum, esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum a centro sui motûs. Ex hâc proportione colligitur planetarum velocitates in mediocribus distantiis ab umbilico communi esse reciprocè in ratione subduplicatâ distantiarum illarum. Sint enim D, et d, mediocres planetarum distantiæ T et t, eorum tempora periodica, et quoniam in singulis planetarum orbitis parva est distantiæ maximæ et minimæ differentia, si conferatur cum differentiâ quæ inter distantias duorum planetarum intercedit, spatia temporibus T et t, descripta erunt quam proximè ut distantiæ D et d; unde velocitates erunt ut $\frac{D}{T}$ et $\frac{d}{t}$, hoc est, ut $\frac{D}{D^{\frac{3}{2}}}$, et $\frac{d}{d^{\frac{3}{2}}}$, sivè ut $\frac{1}{D^{\frac{1}{2}}}$ et $\frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}$, seu in subduplicatâ ratione mediocrium distantiarum inversè, in quâ etiam ratione sunt velocitates partium vorticis circularis in distantiis D et d, a Sole (per Prop. LIII.) Verùm per alteram analogiam, arearum scilicet et temporum, velocitates partium vorticis circularis sunt in ratione simplici distantiarum a Sole reciprocè. Nam si planeta P, orbitam ellipticam P q Q p describat et radiis ad umbilicum S ductis areas æquales S P p, S Q q, tempusculo




dato verrat, centro S et radiis S P, S Q describantur arcus circulares quam minimi P r, Q R, qui radiis S p, S q, occurant in r, et R, erit area S P p = S p × P r = S Q q = S q × Q R, et hinc P r : Q R = S Q : S P. Sed P r et Q R sunt ut spatia circularia eodem tempore descripta ideóque ut velocitates circulares partium vorticis in P, et Q; quarè velocitates illæ sunt in ratione inversâ distantiarum. Porrò quàm

## PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

*Corpora, quæ in vortice delata in orbem redeunt, ejusdem sunt densitatis cum vortice, et eâdem lege cum ipsius partibus quoad velocitatem et cursus determinationem moventur.*

Nam si vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ seu puncta physica datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neque

difficile sit ab his aliisque contradictionibus hypothesim vorticum liberare, ex variis hâc de re eruditorum dissertationibus satis manifestum est. Vide Leibnitii tentamen de Motuum Cœlestium Causis; Villemotii opus de Vorticibus; illustrissimi Marchionis Poleni dialogum de eâdem materiâ; Dissertationes celeber. virorum Saurini in Comm. Acad. Reg. Scient. an. 1709., Bulffingeri de Causâ Gravitatis, Joan. Bernoulli Cogitationes Novas de Systemate Cartesii, ejusdem Physicam Cœlestem inter Academiæ præmia, Domini de Molieres Lectiones Physicas.

Illustrium authorum qui vorticum hypothesim strenuè vindicarunt, varias hâc de re dissertationes hic percurrere nimis longum foret, nec tantas componere lites nostrum est. Eam enim Newtonus sibi vel maximè impugnandam assumit vorticum hypothesim quam Cartesius ipse constituerat, natasque post primi autoris mortem hujus systematis emendationes quam plurimas saltem directè non petit. At silentio prætermittere non licet dissertationem doctissimi viri Joan. Bernoullii ab Academiâ Regiâ Paris. præmio condecoratam, cui titulus est: Cogitationes Novæ de Systemate Cartesii. Existimat clariss. autor superiorum Propositionum demonstrationes mero sophismate laborare, eò quod Newtonus orbium contiguorum et sese mutuo atterentium impressionem solùm definierit ex superficierum magnitudine et velocitate relativâ quâ ab invicem separantur; earum verò superficierum pressionem minimè consideraverit, vimque vectis neglexerit quæ, cæteris paribus, major est in majoribus rotis et minor in minoribus. Verùm licet in suis demonstrationibus pressionem ubique æqualem supposuerit Newtonus, hujus tamen pressionis inæqualitatem in scholio consideravit, et quid ex illâ sequatur, generatim ostendit. Vim quidem vectis prorsùs neglexit, et meritò quidem, quantum intelligere possumus. Quamvis enim in vecte regido cujus partes simul eodem motu angulari circà hypomoclion revolvuntur, eò major sit efficacia quo cæteris paribus longior est vectis; quod videlicet vectis partes eò celeriùs moveantur, quò major est earum ab hypomoclio distantia, id tamen ad partes medii fluidi quæ circà centrum aliquod revolvuntur, non videtur transferendum. Et licet Newtonus orbes solidos, demonstrationis gratia, primùm fingat, eos tamen divisos supponit ac deinde in particulas innumeras subdividit ut demonstratio ad naturam medii fluidi accommodetur. Quod si ob qualemcumque partium fluidi cohæsionum, aliqua habenda sit ratio vis vectis, certè ea non videtur assumenda distantiæ a vorticis centro proportionalis, quemadmodùm fit in vecte perfectè rigido, seu cujus partes vi quasi infinitâ connexæ supponuntur et eodem motu angulari revolvuntur.

Cæterùm celeber. Joan. Bernoulli aliam usurpat hypothesim quæ mechanicis perspecta nondùm est certòque explorata. Supponit enim cum D. Amontons in Monum. Paris. an. 1699. resistentiam quæ oritur ex frictione superficierum contiguarum utcumque inæqualium, manente earumdem in sese mutuò pressione, constantem esse; verùm hypothesis illa minùs placuit clariss. Wolfio qui de eâ his verbis loquitur in Elementis Mechanicis num. 965. Equidem Amontons regulam universalem dedit computandi vim ad frictionem in dato quolibet casu superandam, sed cùm omnem frictionem a solâ appressione ex pondere superincedentis derivet, ex antecedentibus satis apparet quod proposito satisfacere nequeat: veram frictionis legem accuratissimis experimentis tentarunt celeberrimi philosophi Desaguillier et Muschenbroek; at eam haud satis constantem observarunt, ut patet ex iis quas Muschenbroek Tom. I. Physices descripsit experimentorum tabulis. Nil ergò certi hâc de re pronuntiari potest. Newtonus tamen conjecturam fecit resistentiam in minori esse ratione quàm ea velocitatis est, eo forsan ductus argumento quod in Historiâ Acad. Reg. an. 1709. hoc ferè modo exponitur: si concipiantur superficies innumeris eminentiis asperæ, dum alia super aliam incedit, superficiei superioris eminentiæ intrà cavitates inferioris, dato tempore, pressionis vi penetrant, fitque resistentia major, si intrà superficiei inferioris cavitates altiùs ingrediantur superficiei superioris eminentiæ, at verò si major sit velocitas, superior superficies intrà inferiorem eodem dato tempore minùs penetrat. Hinc si clariss. Parentii ratio valeat, satis patet resistentiam in minori esse ratione quàm ea velocitatis est. Attamen clariss. Muschenbroek, factis experimentis, resistentiam velocitati proportionalem in motibus tardioribus invenit, in celerioribus verò eam in majori quàm velocitatis ratione observavit.

Assumit D. Bernoullius impressiones orbium contiguorum in se mutuò factas, esse in ratione

quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eâdem lege ac prius: et contra, si vorticis pars congelata et solida ejusdem sit densitatis cum reliquo vortice, et resolvatur in fluidum, movebitur hæc eâdem lege ac prius, nisi quâtenus ipsius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam ad totius motum progressivum nil spectans, et motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum vorticis partium a centro æqualiter distantium, propterea quod solidum in fluidum resolutum fit pars vorticis cæteris partibus consimilis. Ergo solidum, si sit ejusdem densitatis cum materiâ vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materiâ proximè ambiente relativè quiescens. Sin densius sit, (n) jam magis conabitur recedere a centro vorticis quàm prius; ideóque vorticis vim illam, quâ prius in orbitâ suâ tanquam in æquilibrio constitutum retinebatur, jam superans, recedet a centro et revolvendo describet spiralem, non amplius in eundem orbem

compositâ ex ratione summæ virium centrifugarum orbium omnium inferiorum ad centrum usquè vorticis, ex ratione velocitatis quâ orbes contigui ab invicem separantur, et ex ratione distantiæ orbium illorum a centro; undè per analysim deducit tempora periodica partium vorticis sphærici homogenei esse in ratione radicum cubicarum dignitatis quintæ distantiarum a centro; earum verò celeritatem sub æquatore esse reciprocè in ratione radicis cubicæ quadrati distantiarum a centro. Si in hypothesi Bernoullii negligatur vis vectis, eodem calculo quo usus est, tempora periodica inveniuntur proportionalia radicibus cubicis dignitatis quartæ distantiarum a centro; si verò supponamus impressiones orbium in se mutuò factas, esse in ratione compositâ ex ratione pressionum, ratione velocitatum relativarum et ratione superficierum, tempora periodica Bernoulliano calculo inveniuntur quadratis distantiarum proportionalia, uti Newtonus per suam hypothesim invenerat; et si cum his tribus rationibus componatur ratio distantiæ a centro ut vis vectis exprimatur, tempora periodica reperiuntur proportionalia radicibus cubicis dignitatis septimæ distantiarum a centro. Hæ verò analogiæ omnes a regulâ illâ Keplerianâ, quâ tempora periodica statuuntur esse in ratione sesquiplicata distantiarum, dissentiunt. Ut ergò vorticis sphærici leges cum Kepleri sancitis conciliet Bernoullius, supponit densitatem vorticis esse in ratione subduplicatâ distantiæ centro reciprocè, planetas verò non esse ejusdem prorsus densitatis cum medio fluido in quo primùm collocati sunt, ideóque ob majorem vel minorem suam densitatem in eo medio successivè descendere et ascendere, intereadùm circulari motu vorticis abripiuntur, ex quibus motibus simul compositis nascuntur ellipticæ planetarum trajectoriæ et apheliorum lentissimi motus. Sed medium illud in quo planeta, cùm densior est, descendit, et ubi rarior est, ascendit, vel grave est in centrum vorticis vel non. Si grave non sit, planeta in medio rariori positus, eodemque cum medio illo gyrationis motu actus, majori vi a centro recedere et spiralem trajectoriam describendo in infinitum abire debet; et contrà, planeta in medio densiori primùm collocatus, ad centrum per spiralem lineam perpetuò accederet, quod medii densioris major esse debeat vis centrifuga quàm planetæ rarioris. Si medium grave sit in centrum vorticis, ipsiusque densitas, decrescentibus distantiis a centro, crescat, cœlestis materiæ densitas, ob parvam orbitarum quas planetæ describunt, excentricitatem, æqualis assumi potest densitati cujusque planetæ huic materiæ innatantis; atque adeò densitas cœlestis materiæ ad distantiam Saturni æqualis erit densitati Saturni, ad distantiam Jovis, Martis, &c. æqualis erit densitati horum planetarum, et omnes illæ densitates erunt inter se in ratione subduplicatâ distantiarum a Sole reciprocè. Si itaque Telluris densitas mediocris supponatur æqualis densitati aquæ, materia cœlestis inter Solem et Tellurem constituta aquâ densior erit et corporum motui maximè resistet. Sed ut ex cometarum motibus, aliisque observationibus constat, materia cœlestis inter Solem et Tellurem motui corporum minimè resistit. Nam cometarum motus sunt summè regulares, et easdem leges cum planetarum motibus observant, et in omnes cœli plagas liberrime feruntur, atque ad Solem usque ferè penetrant sine resistentiâ.

(n) * *Jam magis conabitur.* Nam vis centrifuga motrix, cæteris paribus, augetur vel minuitur in ratione quantitatis materiæ (per Def. 8. Lib. I.) et materiæ quantitas, dato corporis volumine, augetur vel minuitur in ratione densitatis (2. Lib. I.)

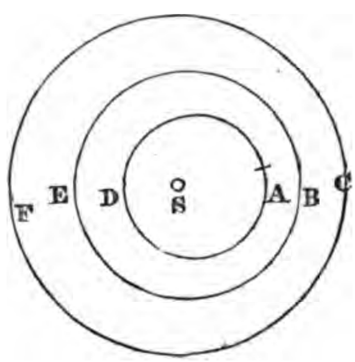
rediens. Et eodem argumento si rarius sit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem orbem nisi sit ejusdem densitatis cum fluido. Eo autem in casu ostensum est, quod revolveretur eâdem lege cum partibus fluidi a centro vorticis æqualiter distantibus. Q. e. d.

*Corol.* 1. Ergo solidum quod in vortice revolvitur et in eundem orbem semper redit, relativè quiescit in fluido cui innatat.

*Corol.* 2. Et si vortex sit quoad densitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet a centro vorticis distantiam revolvi potest.

### *Scholium.*

Hinc liquet planetas a vorticibus corporeis non deferri. Nam planetæ secundum hypothesin Copernicæam circa Solem delati revolvuntur in ellipsibus umbilicum habentibus in Sole, et radiis ad Solem ductis areas describunt temporibus proportionales. At partes vorticis tali motu revolvi nequeunt. Designent A D, B E, C F, orbes tres circa Solem S descriptos, quorum extimus C F circulus sit Soli concentricus, et interiorum duorum aphelia sint A, B et perihelia D, E. Ergo corpus quod revolvitur in orbe C F, radio ad Solem ducto areas temporibus proportionales describendo, (°) movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in orbe B E, tardius movebitur in aphelio B et velocius in perihelio E, (p) secundum leges astronomicas; cùm tamen (q) secundum leges mechanicas materia vorticis in spatio angustiore inter A et C velocius moveri debeat quàm in spatio latiore inter D et F; id est, in aphelio velocius quàm in perihelio. Quæ duo repug-




(°) * *Movibitur uniformi cum motu.* Æqualibus enim temporibus æquales areæ et proinde æquales arcus, hoc est, æqualia spatia describuntur.

(p) * *Secundùm leges astronomicas.* Quoniam axis ellipseos per aphelium B et perihelium E transit, estque ellipsi normalis, area quam radius vector S B tempore quam minimo describit, erit æqualis rectangulo ex distantiâ S B in arcum quam minimum a corpore in B descriptum; et similiter area æqualis quam radius vector S E eodem tempore quam minimo describit, æquatur rectangulo ex distantiâ S E ductâ in arcum a corpore in E descriptum, et ideò prior arcus est ad posteriorem, hoc est, velocitas in B, est ad velocitatem in E, ut distantia S E, ad distantiam majorem S B.

(q) * *Secundùm leges mechanicas.* Nam cùm vortex supponatur esse in statu permanenti, æquales materiæ quantitates per spatium angustius A C, et per spatium latius D F, ut sit in fluviis, eodem tempore transeunt, et propterea materia vorticis in spatio angustiore inter A et C, velociùs movetur quàm in spatio latiore inter D et F. Quantitas autem materiæ, quæ dato tempore transit per spatium A C, vel D F, est ut spatium hoc directè et materiæ velocitas mediocris inversè, et ideò mediocris velocitas materiæ inter A et C, est ad mediocrem velocitatem materiæ inter D et F, ut F D ad A C.

nant inter se. Sic in principio signi Virginis, ubi aphelium Martis jam versatur, distantia inter orbes Martis et Veneris est ad distantiam eorundem orbium in principio signi Piscium ut tria ad duo circiter, et propterea materia vorticis inter orbes illos in principio Piscium debet esse velocior quàm in principio Virginis ([r]) in ratione trium ad duo. Nam quo angustius est spatium per quod eadem materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore transit, eo majori cum velocitate transire debet. Igitur si Terra in hâc materiâ cœlesti relativè quiescens ab eâ deferretur, et unà circa Solem revolveretur, ([s]) foret hujus velocitas in principio Piscium ad ejusdem velocitatem in principio Virginis in ratione sesquialterâ. ([t]) Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major esset quàm minutorum primorum septuaginta, et in principio Piscium minor quàm minutorum quadraginta octo: et cùm tamen (experientiâ teste) apparens iste Solis motus major sit in principio Piscium quàm in principio Virginis, et propterea Terra velocior in principio Virginis quàm in principio Piscium. ([u]) Itaque hypothesis vorticum cum phænomenis astronomicis omnino pugnat, et non tam ad explicandos quàm ad perturbandos motus cœlestes conducit. Quomodo verò motus isti in spatiis liberis absque vorticibus peraguntur, intelligi potest ex Libro primo, et in Mundi Systemate plenius docebitur.

([r]) * *In ratione trium ad duo* (per not. præced.)

([s]) * *Foret hujus velocitas.* Ex observationibus astronomicis constat Terram inter Veneris et Martis orbes positam esse.

([t]) * *Undè Solis motus diurnus apparens.* Hic motus est angulus quem Sol, radiis ad Terram ductis, proprio motu ab occidente in orientem unoquoque die describere nobis videtur, quem quidem angulum Terra, radiis ad Solem ductis, in hypothesi Copernicеâ, conficit. Porrò notissimum est, circulum illum quem Sol inter fixas motu annuo describere videtur, ab astronomis dividi in partes duodecim æquales, seu signa quorum hæc duo Virgo et Pisces sunt directè opposita, ità ut dum Terra in hypothesi Copernici, est in principio Piscium, Sol appareat in principio Virginis et contrà. Cùm igitur angularis velocitas Terræ in principio Piscium sit ad ejus velocitatem angularem in principio Virginis ut 3 ad 2, Solis motus diurnus apparens in principio Virginis est ad ejus motum apparentem in principio Piscium in eâdem ratione 3 ad 2. Solis motus diurnus apparens medius est minutorum primorum 59 et secundorum 8, seu secundorum 3548, qui numerus dicatur M; quarè si Solis motus diurnus apparens in principio Virginis, ponatur $= M + X$, et in principio Piscium $= M - X$, erit $M + X : M - X = 3 : 2$, unde invenitur $X = \frac{1}{5} M = 707''$ quam proximè, ac proindè erit $M + X = 4255'' = 70' + 55''$, et $M - X = 2841'' = 47' + 21''$. Ergò Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major esset quàm minutorum primorum septuaginta, et in principio Piscium minor quàm minutorum quadraginta octo; cùm tamen ex observationibus astronomicis Sol in principio Virginis e Tellure visus motu diurno conficere videatur minuta prima 58 tantùm in principio Piscium minuta prima 60 seu gradum unum.

([u]) * *Itaque hypothesis vorticum.* Quoniam vorticis materia circulos describit æquatori vorticis parallelos, necesse est (per hanc Prop. LIII.) ut planetæ omnes ferantur in orbitis æquatori parallelis, sed observatum est nullum planetam in orbitâ æquatori parallela revolutiones suas absolvere, et cometas variis directionibus in omnes cœli plagas ferri. Eadem est difficultas si per vim centrifugam partium vorticis explicetur vis centripeta seu gravitas corporum quæ ad axem vorticis perpendiculariter tendere deberent, non verò ad vorticis centrum dirigi. Sed de his vide Acta Erudit. Lips. an. 1686. et 1695.; Diaria Erudit. 1703. 1707. Monumenta Acad. Paris. 1709. Dissertationes clariss. Hugenii et Bulffingeri de Causâ Gravitatis.

FINIS TOMI SECUNDI.

# INDEX PROPOSITIONUM

## LIBRI SECUNDI.

FINIS PROPOSITIONUM LIBRI SECUNDI.

GLASGUÆ:
ANDREAS ET JOANNES M. DUNCAN,
*Academiæ Typographi.*